Math. S. 358 L Milinowski

ELEMENTAR-SYNTHETISCHE GEOMETRIE DER KEGELSCHNITTE.

VON

A. MILINOWSKI,

OBERLEHRER AM GYMNASIUM ZU WEISSENBURG I. ELSASS.

MIT FIGUREN IM TEXT.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1882.

8/3 130 F 4 M. 80

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Bruno, F. Faà di, Einleitung in die Theorie der binären Formen. Mit Unterstützung von Professor M. Noether deutsch herausgegeben von Dr. Theodor Walter. [VIII, 379 S. und 4 tabellarische Beilagen.] gr. 8. 1881. n. *M.* 10.80.

Cantor, Moritz, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Erster Band. Von den ältesten Zeiten bis zum Jahre 1200 n. Chr. Mit vielen Holzschnitten im Text. [VIII u. 804 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 20.—

Escherich, Dr. **Gustav von,** Professor an der Universität Czernowitz, Einleitung in die analytische Geometrie des Raumes. [VIII u. 282 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 5.20.

Harnack, Dr. **Axel,** o. Professor der Mathematik an dem Polytechnikum zu Dresden, die Elemente der Differential- und Integralrechnung. Zur Einführung in das Studium dargestellt. Mit Figuren im Text. [VIII u. 409 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 7.60.

Helmert, Dr. **F. R.,** Professor an der technischen Hochschule zu Aachen, die mathematischen und physikalischen Theorieen der höheren Geodäsie. Einleitung u. I. Theil: Die mathematischen Theorieen. Mit vielen Figuren im Text. [XV u. 631 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 18.—

Henrici, J., Professor am Gymnasium zu Heidelberg, und P. Treutlein, Professor am Gymnasium zu Karlsruhe, Lehrbuch der Elementar-Geometrie. Erster Teil: Gleichheit der planimetrischen Gröfsen. Kongruente Abbildung in der Ebene. Pensum der Tertia. Mit 188 Figuren in Holzschnitt. [VIII u. 152 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 2.—

Herwig, Dr. **Hermann,** Professor an der technischen Hochschule zu Darmstadt, physikalische Begriffe und absolute Maasse. [VIII und 89 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 2.40.

Hesse, Otto, Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der geraden Linie, des Punktes und Kreises in der Ebene. Dritte Auflage revidiert von Dr. S. Gundelfinger, Professor am grofsherzoglichen Polytechnikum zu Darmstadt. [VIII u. 230 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 5.20.

Joachimsthal, F., Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die allgemeine Theorie der Flächen und der Linien doppelter Krümmung. Zweite Auflage, bearbeitet von L. Natani. Mit zahlreichen Figuren im Text. [VIII u. 242 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 6.—

ELEMENTAR-SYNTHETISCHE

GEOMETRIE

DER

KEGELSCHNITTE.

ELEMENTAR-SYNTHETISCHE GEOMETRIE DER KEGELSCHNITTE.

VON

A. MILINOWSKI,

OBERLEHRER AM GYMNASIUM ZU WEISSENBURG I. ELSASS.

MIT FIGUREN IM TEXT.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1882.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Vorwort.

Aufser den elementaren Vorlesungen Steiners, welche Geiser unter dem Titel „Die Theorie der Kegelschnitte in elementarer Darstellung“ herausgegeben hat, besitzt die deutsche Literatur kein Werk, welches die Eigenschaften der Kegelschnitte einheitlich und elementar darzustellen versucht. Und auch die Steiner'schen Vorlesungen erfüllen nur teilweise diesen Zweck, denn sie schliefsen die Behandlung der Polareigenschaften und der Kegelschnittbüschel und Kegelschnittscharen fast gänzlich aus. Das vorliegende Buch unternimmt es, in elementarer Form einen grofsen Teil der bekannteren Kegelschnitteigenschaften zu entwickeln. Der Begriff elementar steht hier im Gegensatz zu projektivisch. Gewöhnlich versteht man unter elementar-geometrischer Behandlung diejenige, die sich nur auf Kongruenz und Ähnlichkeit stützt; beide versagen aber oder lassen sich nur auf grofsen Umwegen dann zur Geltung bringen, wenn es sich um harmonische oder involutorische Beziehungen handelt. Daher sind im vorliegenden Werke die einfachen Eigenschaften der harmonischen und involutorischen Gebilde dem Gebiete der elementaren Geometrie zugezählt, was um so unbedenklicher erscheint, da sie sich als leichte Folgerungen der Eigenschaften ähnlicher Figuren erweisen. Das harmonische Gebilde ist die Grundlage der neueren Geometrie. Wie es in der projektivischen Geometrie mittelbar zur Anwendung kommt, denn projektivische Gebilde sind solche, in denen harmonischen Elementen wieder solche Elemente entsprechen, so soll es in vorliegendem Buche unmittelbar benutzt werden. Als bequemste Form zu seiner Anwendung ergab sich die schon von Moebius aufgestellte harmonische Verwandtschaft, eine durchaus elementare, durch den Begriff des harmonischen Gebildes vermittelte Beziehung zwischen den Punkten und Geraden der Ebene. Dieselbe wird in ausgedehntem Mafse zur Übertragung der Kreiseigenschaften auf Kegelschnitte angewendet. Deshalb erschien es notwendig diese Eigenschaften im Zusammenhange und ausführlich abzuleiten. Da dieselben

zum grofsen Teile harmonischer Natur sind, so wurde die Theorie des harmonischen Gebildes an die Spitze gestellt. Ihr reihen sich an die harmonischen und polaren Eigenschaften der Kreise und Kreisbüschel. Letztere führen zur Involution, die wegen ihrer grofsen Wichtigkeit eingehend behandelt wurde. Dann folgen die Theorie der Ähnlichkeitspunkte und die Kreisverwandtschaft. Diese hat ihren Grund in den Eigenschaften der harmonischen Pole eines Kreises und wurde zuerst von Plücker (1834) unter dem Namen „Prinzip der reciproken Radien“ und dann von Moebius (1853) als „Kreisverwandtschaft“ aufgestellt. In eingehender Weise ist letztere von Reye (1879) in seiner Kugelgeometrie benutzt worden, um das erweiterte Berührungsproblem des Apollonius zu lösen: „Einen Kreis zu konstruieren, welcher drei gegebene Kreise unter gegebenen Winkeln schneidet.“ Dieselbe Verwandtschaft ist von Taylor benutzt worden, um den Feuerbach'schen Satz zu beweisen, dafs der Mittelkreis eines Dreiecks von seinen Berührungskreisen berührt wird und von Petersen „Methoden und Theorien“ 1879, um die berühmte Aufgabe zu lösen: „In einen Kreis ein n-Eck zu zeichnen, dessen Seiten durch gegebene Punkte gehen.“

An die Spitze der Theorie der Kegelschnitte wurde der Satz gestellt: „In jeder harmonischen Verwandtschaft, die den Mittelpunkt eines Kreises zum Centrum hat, ist dem Kreise ein Kegelschnitt verwandt, welcher den Kreismittelpunkt zu einem Brennpunkte hat.“ Daraus ergeben sich gleichzeitig die Brennpunktseigenschaften und die Polarentheorie der Kegelschnitte. Aber auch in jeder beliebigen harmonischen Verwandtschaft ist dem Kreise ein Kegelschnitt verwandt. Da sich nun durch harmonische Verwandtschaft ein beliebiges Fünfeck in ein Kreisfünfeck verwandeln läfst, so fliefst daraus der fundamentale Satz, dafs ein Kegelschnitt durch fünf seiner Punkte bestimmt ist. Soviel Analogien in ihrer Wirkung die harmonische Verwandtschaft auch mit der räumlichen Centralprojektion besitzt, so hat die erstere den Vorzug, planimetrische Eigenschaften ohne räumliche Betrachtungen darzulegen und sich auf die Theorie der Oberflächen übertragen zu lassen.

Diejenigen Kreise, die bei der Erzeugung der Kegelschnitte benutzt werden, der Scheitelkreis, die Leitkreise oder irgend ein Kreis um einen Brennpunkt, erscheinen in verschiedenen Abbildungen als Bilder des Kegelschnittes. Dadurch aber erhält man neue Mittel die harmonischen Eigenschaften des Kreises auf den Kegelschnitt zu übertragen.

Nachdem der Kegelschnitt als harmonische Kurve des Kreises betrachtet ist, werden die einzelnen Arten der Kegelschnitte auf verschiedene Weise erzeugt und die hauptsäch-

lichsten Eigenschaften derselben, um ihre gegenseitige Abhängigkeit möglichst aufzudecken, aus jeder Erzeugungsart besonders abgeleitet.

Zunächst wurden die Eigenschaften der Parabel aus ihrer Erzeugung als Ort eines Punktes, der von einem festen Punkte und einer festen Geraden gleiche Abstände hat, entwickelt. Diese Erzeugungsart läfst sich in doppelter Weise verallgemeinern; entweder tritt für die feste Gerade ein fester Kreis oder für das Verhältnis 1 der Abstände ein beliebiges anderes Verhältnis ein. Die so erhaltenen Orter sind Ellipsen oder Hyperbeln. Die letztere Erzeugungsart, die sich auch unmittelbar aus der harmonischen Beziehung zwischen Kreis und Kegelschnitt ergiebt, ist besonders fruchtbar. Sie führt leicht zu einer direkten Ableitung der Polareigenschaften, sowie zu den Beziehungen zwischen dem Kegelschnitte und den ihn doppelt berührenden Kreisen, welche Steiner im Crelle'schen Journal mitgeteilt hat. Diese Kreise hat man wegen der Analogie mancher ihrer Eigenschaften mit denen der Brennpunkte Brennkreise genannt. So führen sie besonders zu einer Verallgemeinerung der letzten Erzeugungsart, da der Kegelschnitt als Ort eines Punktes erscheint, dessen Abstand von einer festen Geraden zu seiner Tangente oder kürzesten Sehne an einen festen Kreis in einem bestimmten Verhältnisse steht. Von den Berührungskreisen des Kegelschnittes werden aufser den doppelt berührenden Kreisen noch die Krümmungskreise näher untersucht und die Steinersche und Newtonsche Konstruktion ihrer Mittelpunkte sowie die bekannteren Ausdrücke ihrer Radien abgeleitet.

Unter den Kegelschnittkonstruktionen sind in gröfserer Zahl solche behandelt worden, für welche Hauptelemente, also Axen, Brennpunkte, Leitlinien, Durchmesser gegeben sind. Um jedoch die Bedeutung der Polareigenschaften recht hervortreten zu lassen, sind mit alleiniger Benutzung derselben die Konstruktionen der Kegelschnitte aus gegebenen Punkten und Tangenten durchgeführt.

Im dritten Abschnitte werden die wichtigsten Eigenschaften der Kegelschnittbüschel und Kegelschnittscharen mit reellen und imaginären Grundelementen untersucht. Hat ein Büschel zwei oder vier imaginäre Grundpunkte, so läfst es sich durch harmonische Verwandtschaft in ein Kreisbüschel verwandeln und die Eigenschaften des ersteren lassen sich aus denen des letzteren folgern. Aber auch in dem Falle von vier reellen Mittelpunkten führt die Anwendung der harmonischen Verwandtschaft sofort zu dem Hauptsatze, dafs die Kegelschnitte des Büschels jede Gerade in einer Involution schneiden, aus welchem Satze

sich dann leicht die Polareigenschaften des Büschels ergeben. Durch Zurückführung auf besonders anschauliche Lagen der Kegelschnitte eines Büschels mittelst der harmonischen Verwandtschaft lassen sich unschwer die Arten der Kegelschnitte erkennen, die in einem Büschel enthalten sind. Besonders hervorgehoben sind solche Eigenschaften, denen analoge Eigenschaften von Kreisbüscheln entsprechen, so namentlich die Beziehungen zwischen konjugierten Kegelschnittbüscheln. Die Eigenschaften von Kegelschnitten, die sich doppelt berühren, sind ausführlich entwickelt und auch hier wieder ist auf diejenigen besonders Rücksicht genommen, die als Verallgemeinerungen von Kreisbeziehungen, namentlich Eigenschaften der Potenzlinie, erscheinen. So erkennt man das Berührungsproblem des Apollonius als einen speziellen Fall der Aufgabe: „Es sind drei Kegelschnitte $C_1 C_2 C_3$ gegeben, welche einen vierten K doppelt berühren; man soll einen fünften $\mathfrak{K}$ konstruieren, der K doppelt und $C_1 C_2 C_3$ einfach berührt."

Wie das cyklische Polarsystem (44) als Kernkurve einen reellen oder imaginären Kreis hat, so enthält ein beliebiges Polarsystem, dessen Konstruktion auf den involutorischen Eigenschaften der Axen beruht, als Kernkurve einen reellen oder imaginären Kegelschnitt, letzteren, wenn die Involutionen auf beiden Axen imaginäre Doppelpunkte haben. Das Polarsystem führt in einfachster Weise nochmals zu den Polareigenschaften der Kegelschnittbüschel, auch solcher, deren Individuen imaginär sind.

Nachdem bis dahin das harmonische Gebilde unmittelbar zur Erforschung der Kegelschnitteigenschaften angewendet ist, wird es im vierten Abschnitte nach Reyes Vorgang zur Herstellung projektivischer Gebilde benutzt, um dem Leser Gelegenheit zu geben, sich mit den fundamentalen Gesetzen derselben, die ja die Grundpfeiler unserer höheren Geometrie sind, vertraut zu machen und ihn die Bedeutung derselben für die Theorie der Kegelschnitte erkennen zu lassen.

Den Schluſs bildet eine Anzahl von Sätzen und Aufgaben, welche teils die gegebenen Theorien erweitern, teils den Übungsstoff zu ihrer Anwendung bieten sollen. —

Für die Ausarbeitung des vorliegenden Werkes war zunächst der Umstand maſsgebend, daſs wir keine ausführliche elementare Darstellung der Theorie der Kegelschnitte besitzen, dann aber auch der Wunsch des Verfassers, den mathematischen Fachgenossen, den Lehrern an den Gymnasien und Realschulen, bei etwaiger Durchnahme der Kegelschnitte die Bekanntschaft mit den elementaren Methoden derselben zu vermitteln. Wohl nur wenige von ihnen werden Gelegenheit gehabt haben, ein

Kolleg über elementare Geometrie zu hören; die Vorlesungen über projektivische Geometrie bieten aber keinen genügenden Ersatz. Sie liefern keine Methoden, die der zukünftige Lehrer an der Schule verwenden könnte, beanspruchen ein hoch entwickeltes Anschauungsvermögen, das der Studierende häufig von der Schule nicht mitbringt und werden deshalb vielleicht nicht mit demjenigen Eifer und Interesse gehört, den diese gröfste und durchaus deutsche Schöpfung der Mathematik zu verlangen ein Recht hat.

Es ist einer der schwersten Vorwürfe, den man dem geometrischen Unterrichte unserer Schulen zu machen berechtigt ist, dafs ihm noch oft die notwendige konstruktive Grundlage fehlt; in Folge dessen wird die Bildung der räumlichen Anschauungskraft vernachläfsigt und so keine Lust zu geometrischen Studien geweckt. Der Studierende wendet Kraft und Neigung der Analysis zu und, wenn er einst als Lehrer an die Schule kommt, wird auch er keine Geometer erziehen. Und doch kann gerade die Geometrie wegen ihrer anschauungsbildenden Kraft durch keine andere Wissenschaft ersetzt werden. — Die elementar-synthetische Behandlungsweise der Kegelschnitte hat bis jetzt im Ganzen wenig Sympathien; man ist sogar soweit gegangen, dieselbe als schwerfällig und deshalb ungeeignet für den Schulunterricht zu erklären. Vielleicht gelingt es der vorliegenden Bearbeitung, die mit elementaren Methoden auch tiefer liegende Eigenschaften der Kegelschnitte ohne Schwierigkeit zu entwickeln vermag, jene Ansichten zu widerlegen und dadurch mittelbar für eine allgemeinere Einführung der Kegelschnitte in den Unterrichtsstoff unserer Schulen zu wirken. Die neuere Geometrie, also namentlich die Eigenschaften des harmonischen Gebildes, der Potenzlinien und Ähnlichkeitspunkte, also ungefähr der Inhalt der von Steiner im Jahre 1833 herausgegebenen kleinen Schrift: „Die geometrischen Konstruktionen ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises, als Lehrgegenstand auf höheren Unterrichtsanstalten“ ist längst in den mathematischen Lehrplan unserer Schulen aufgenommen. Zu jedem Lehrstoffe gehört aber der notwendige Übungsstoff. Ohne denselben wird er trocken und dürftig. Ein Blick aber auf unsere Aufgabensammlungen, auf die Themata der Abiturientenprüfungen zeigt sofort, dafs nur selten jene schönen Theorien entsprechende Anwendung finden. Und doch mufs, wenn der geometrische Unterricht unserer Schulen die ihm gebührende Stellung einnehmen soll, das harmonische Gebilde nicht wie bisher als Zweck, sondern als Mittel für jeden weiteren Fortschritt betrachtet werden. Die zahlreichen und so einfachen Anwen-

dungen lassen es geradezu als den Mittelpunkt des geometrischen Pensums der oberen Klassen erkennen. Von diesem Gesichtspunkt aus hat der Verfasser der vorliegenden Schrift ein Schulbuch unter dem Titel: „Die Geometrie für Gymnasien und Realschulen. Ein Lehr- und Übungsbuch, bearbeitet von A. Milinowski. Leipzig bei Teubner“ erscheinen lassen, welches namentlich auch eine kurze Darstellung der Kegelschnitte enthält und zu den einzelnen Abschnitten der neueren Geometrie ausreichenden Übungsstoff bietet. In keinem derselben fliefsen aber die Aufgaben so zahlreich, leicht und einfach, wie in demjenigen, der die Kegelschnitte behandelt. Erst die Theorie der letzteren giebt für viele Kreiseigenschaften die ausreichende Erklärung und wird dadurch zum notwendigen Schlufsstein der elementaren Geometrie. In diesem Sinne, stets Rücksicht nehmend auf die Bedürfnisse der Fachgenossen, ist das vorliegende Buch bearbeitet worden.

Unter den Schriften, die mir vielfache Anregung und Unterstützung geboten haben, nenne ich diejenigen von Kortum, Pfaff, Hankel, Weinmeister, Petersen, Taylor, namentlich aber die Werke von Schroeter, Reye und Salmon-Fiedler. Das Studium der letzteren, die zum Teil denselben Stoff, aber projektivisch oder analytisch behandeln, dürfte durch mein Buch vorbereitet und wesentlich erleichert werden. Dasselbe wird, so hoffe ich, allen denen nicht unwillkommen sein, welche Neigung oder Veranlassung haben, sich mit der elementaren Theorie der Kegelschnitte zu beschäftigen. Und so übergebe ich dasselbe dem wohlwollenden Urteile der Fachgenossen mit dem Wunsche, es möge der elementar-synthetischen Forschung Freunde und Anhänger erwerben.

Weifsenburg i. Elsafs, November 1881.

Milinowski.

Inhalt.

Erster Abschnitt.

Gerade und Kreis.

		Seite
§ 1.	Das harmonische Gebilde	1
§ 2.	Harmonische Eigenschaften des Kreises	8
§ 3.	Kreisbüschel	13
§ 4.	Involution	16
§ 5.	Die Ähnlichkeitspunkte	31
§ 6.	Die Kreisverwandtschaft	45
§ 7.	Die harmonische Verwandtschaft	54
§ 8.	Anwendungen der harmonischen Verwandtschaft	64
§ 9.	Die harmonische Abbildung	76
§ 10.	Die Polarisation	78

Zweiter Abschnitt.

Die Kegelschnitte.

§ 11.	Der Kegelschnitt als harmonische Kurve des Kreises	81
§ 12.	Pol und Polare beim Kegelschnitte	86
§ 13.	Konjugierte Punkte und Strahlen	87
§ 14.	Bestimmung der Kegelschnitte durch Punkte und Tangenten	91
§ 15.	Die Brennpunkte	49
§ 16.	Konstruktion der Kegelschnitte aus gegebenen Punkten und Tangenten	105
§ 17.	Poldreiecke	109
§ 18.	Die Parabel	119
§ 19.	Ellipse und Hyperbel	133
§ 20.	Die Berührungskreise eines Kegelschnittes	189
§ 21.	Konstruktion von Kegelschnitten	216

Dritter Abschnitt.

Kegelschnittbüschel und Kegelschnittschar.

§ 22.	Das Kegelschnittbüschel mit vier reellen Grundpunkten	249
§ 23.	Die Kegelschnittschar mit vier reellen Tangenten	255

Seite

§ 24. Gemeinschaftliche Punkte und Tangenten 261
§ 25. Das Kegelschnittbüschel mit zwei und vier imaginären Grundpunkten 268
§ 26. Die Kegelschnittschar mit zwei und vier imaginären Tangenten 293
§ 27. Kegelschnitte in doppelter Berührung 307
§ 28. Das Polarsystem 323

Vierter Abschnitt.

§ 29. Die projektivischen Gebilde 353
Sätze und Aufgaben 379

Erster Abschnitt.

Gerade und Kreis.

§ 1.

Das harmonische Gebilde.

1. Auf einer Geraden sei AB eine Strecke und C ein Punkt innerhalb oder aufserhalb derselben. Seine Entfernungen AC und BC von den Endpunkten der Strecke heifsen die *Abschnitte* derselben.

2. Eine feste Gerade a hat mit einer beweglichen x, die sich um einen festen Punkt A dreht, in jeder Lage der letzteren einen Schnittpunkt. Nur in der parallelen Lage giebt es keinen Schnittpunkt. Um jedoch diese Ausnahme zu beseitigen, giebt man auch parallelen Geraden einen Schnittpunkt im Unendlichen, so dafs ganz allgemein der Satz gilt: „Irgend zwei Gerade einer Ebene haben einen Schnittpunkt.“ Da es durch A nur eine Parallele zu a giebt, so folgt noch:

a. *Jede Gerade hat nur einen unendlichen fernen Punkt.*

b. *Alle unendlich fernen Punkte einer Ebene liegen auf einer Geraden* g_∞ (der unendlich fernen Geraden).

Denn die Verbindungsgerade zweier unendlich fernen Punkte kann sich nicht ins Endliche erstrecken, weil eine Gerade nur einen unendlich fernen Punkt hat.

3. *Eine Strecke AB in zwei Abschnitte zu teilen, die in einem bestimmten Verhältnisse $m : n$ stehen.*

Man ziehe durch A und B zwei parallele Gerade, schneide auf ihnen $AE : BF = m : n$ ab, mache $BG = BF$, ziehe EF und EG, so sind C und D die gesuchten Teilpunkte. Denn aus ähnlichen Dreiecken folgt

Fig. 1.

$$AC : BC = AE : BF = m : n$$
$$AD : BD = AE : BG = m : n$$

Es bleibt noch nachzuweisen, dass es aufser C und D keine Punkte giebt, welche AB im Verhältnisse von $m : n$ teilen. Zieht man durch D irgend eine Gerade, welche beliebigen Parallelen durch A und B in

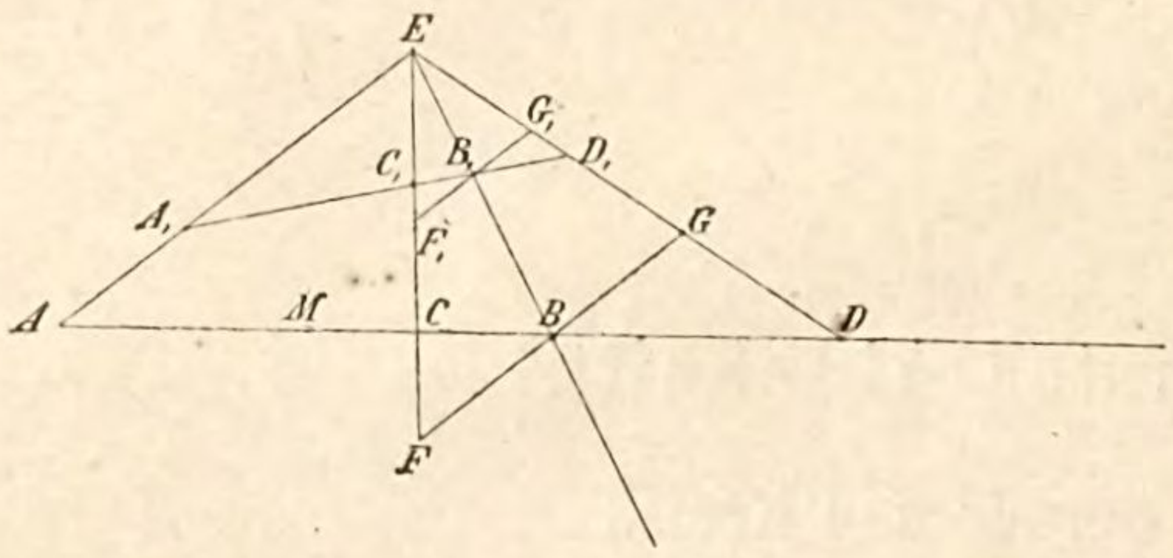


Fig. 1.

E_1 und G_1 begegnet, so verhält sich

$$AE_1 : BG_1 = AD : BD = m : n.$$

Daraus folgt also, dass die Parallelen durch A und B beliebig gewählt werden können; man gelangt stets zu demselben Punkte D.

4. Die gestellte Aufgabe hat also zwei Auflösungen. Von den beiden Teilpunkten liegt der eine stets auf der Strecke, der andere auf der Verlängerung. Sie teilen die Strecke *harmonisch*.

Eine Strecke AB ist demnach in C und D harmonisch geteilt, wenn sie innen und aufsen nach demselben Verhältnisse geteilt ist. Dabei ist zu berücksichtigen, dafs die Entfernungen des Teilpunktes von A gleichzeitig die ersten oder letzten Glieder der Verhältnisse sind.

a. *Ist AB in C und D harmonisch geteilt, so ist auch CD in A und B harmonisch geteilt.* Denn aus der Proportion

$$AC : BC = AD : BD$$

folgt

$$AC : AD = BC : BD$$

Defshalb heifsen $ABCD$ *vier harmonische Punkte* und sowohl A und B, wie C und D *zugeordnete* Punkte. Die vier Punkte $ABCD$ bilden eine *harmonische Punktreihe.*

Im Folgenden werden zugeordnete Punkte stets neben einander geschrieben.

b. *Liegt ein Punkt C in der Mitte zweier Punkte A und B, so liegt sein zugeordneter harmonischer im Unendlichen und umgekehrt.*

Setzt man in 3. $m = n$ so fällt C in die Mitte von AB und D ins Unendliche.

c. *Ist AB in C und D harmonisch geteilt und in M halbiert, so ist $MA^2 = MC \,.\, MD$.*

Aus der Proportion $AC : BC = AD : BD$ folgt, (Fig. 1),

$$AM + MC : BM - MC = AM + MD : MD - MB$$

oder da $AM = BM$ ist, durch Umformung

$$AM : CM = DM : AM$$

und

$$AM^2 = CM \,.\, DM$$

d. *Sind von den vier harmonischen Punkten $ABCD$ drei, etwa ABC, gegeben, so folgt die Konstruktion von D aus Fig. 1. Rückt C nach B hin, so bewegt sich auch D nach B und wenn C mit B zusammenfällt, so fällt auch D mit B zusammen.*

Durchläuft der Punkt C die Strecke AB in der Richtung von A nach B, so durchläuft D von A aus in der Richtung von B nach A durch's Unendliche die ganze Gerade, bis er gleichzeitig mit C in B anlangt.

5. Vier Strahlen, welche einen Punkt S mit vier harmonischen Punkten $ABCD$ verbinden, heifsen *vier harmonische Strahlen* und bilden ein *harmonisches Strahlenbüschel $S\,(ABCD)$*, S heifst der *Scheitel* des Büschels. Die durch zugeordnete Punkte gehenden Strahlen heifsen zugeordnete Strahlen.

6. Die vier harmonischen Punkte $ABCD$ verbinde man (Fig. 1) mit dem beliebigen Punkte E und schneide sie durch eine Transversale in $A_1 B_1 C_1 D_1$. Durch B_1 ziehe man $F_1 G_1 \parallel FG$ so mufs $B_1 F_1 = B_1 G_1$ sein, weil $BF = BG$ ist. Daraus aber folgt, wegen der Konstruktion in 3., dafs $A_1 B_1 C_1 D_1$ vier harmonische Punkte sind. Also:

a. *Zieht man zu einem von vier harmonischen Strahlen eine Parallele, so halbiert der ihm zugeordnete Strahl das von den beiden anderen begrenzte Stück der Parallelen.*

b. *Vier harmonische Strahlen schneiden jede Transversale in vier harmonischen Punkten.*

c. *Stehen zwei zugeordnete Strahlen auf einander senkrecht, so halbieren sie die von den anderen gebildeten Winkel.*

Denn ist $EA \perp EB$, so ist $\triangle BEF \cong BEG$, und daher $\sphericalangle BEF = BEG$.

d. *Halbiert ein Strahl den Winkel zweier anderen, so steht er auf dem ihm zugeordneten harmonischen senkrecht.* (cf. c.)

e. *Wenn von vier Strahlen durch einen Punkt zwei aufeinander senkrecht stehen und die Winkel der anderen halbieren, so sind es harmonische Strahlen.* (cf. c.)

f. Der Satz a. giebt eine einfache Konstruktion von vier harmonischen Strahlen.

g. Die Aufgabe: „Zu drei Strahlen den vierten harmonischen zu konstruieren“ löst man mit Benutzung von a. oder b.

7. *Beschreibt man über dem Abstande zweier zugeordneten harmonischen Punkte als Durchmesser einen Kreis, so haben alle Punkte desselben von den beiden anderen zugeordneten Punkten ein konstantes Abstandsverhältnis.*

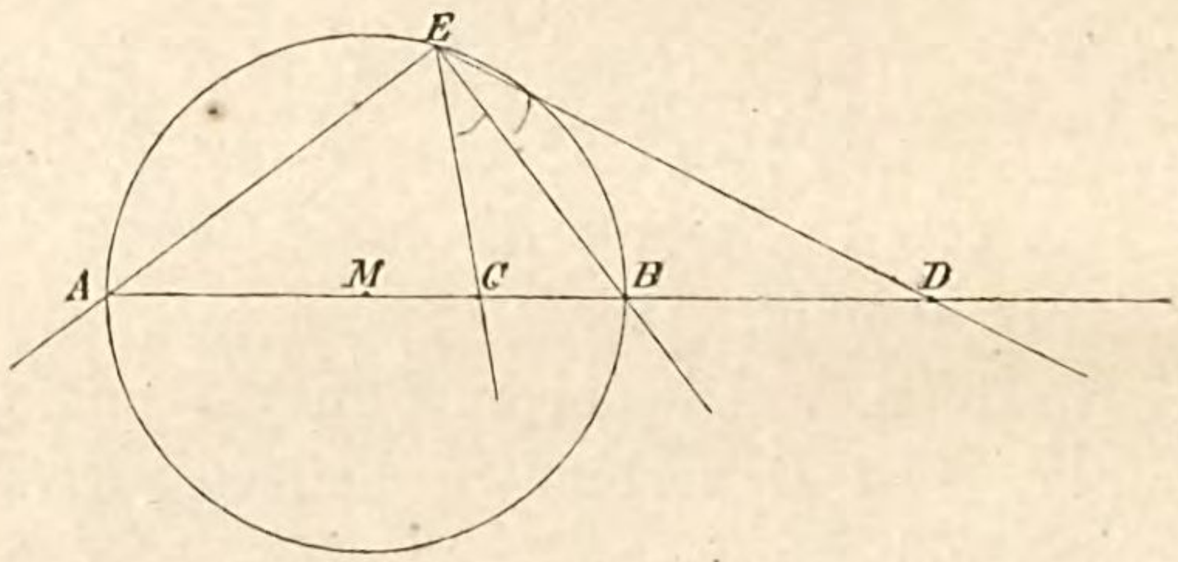


Fig. 2.

Nach 6 c. ist $\sphericalangle BEC = BED$ und daher $EC : ED = BC : BD$.

8. *Zwei Strecken AB und CD auf einer Geraden durch ein Punktpaar harmonisch zu teilen.*

a. AB liegt ganz aufserhalb CD.

Uber AC und BD zeichne man zwei Kreisbogen (Halbkreise), deren Peripheriewinkel sich zu 180^0 ergänzen und sich schneiden; einer ihrer Schnittpunkte sei S. Halbiert man die Winkel ASB und CSD durch SE und SF, so teilen E und F die Strecken AB und CD harmonisch.

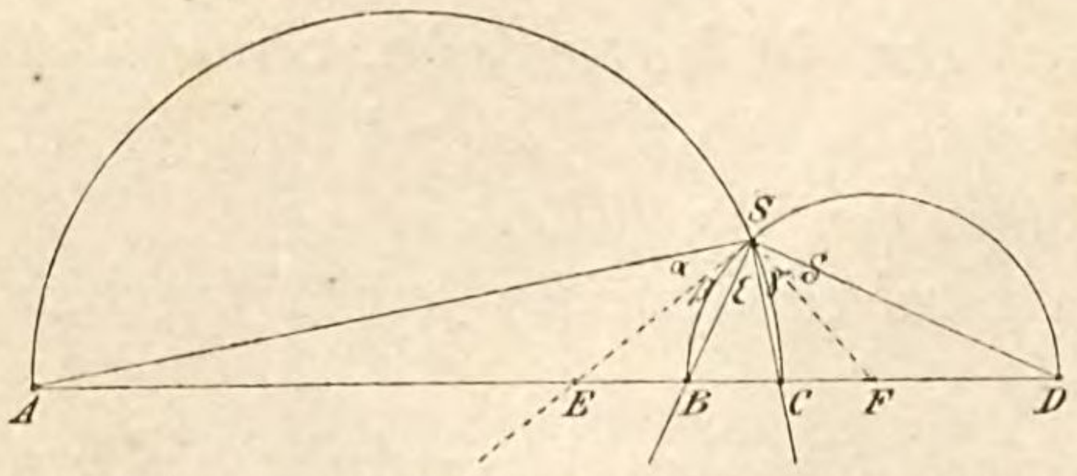


Fig. 3a.

Da $\alpha = \beta$, $\gamma = \delta$, $ASC + BSD = \alpha + \beta + \varepsilon + \gamma + \delta + \varepsilon$,

so ist $\beta + \gamma + \varepsilon = 90^0$, also sind nach 6e. $S\ (ABEF)$ und $S\ (CDEF)$ harmonisch.

Es erübrigt noch nachzuweisen, dass EF das einzige Punktpaar ist, welches gleichzeitig AB und CD harmonisch teilt. Aus dem Vorigen ergiebt sich, dafs S auf dem Kreise über EF als Durchmesser liegt. Wählt man auf diesem beliebig einen Punkt X, so ist $\sphericalangle AXC + BXD = 180^0$, also müssen alle Kreispaare durch AC und BD, deren Peripheriewinkel zusammen 180^0 betragen, sich auf dem Kreise über EF treffen und es ist EF das einzige Punktpaar, welches der Aufgabe genügt.

b. CD liegt innerhalb AB (Fig. 3b.).

Über AC und BD oder AD und BC beschreibe man zwei sich schneidende Kreisbogen von gleichem Peripheriewinkel; ist S ein Schnittpunkt derselben, so haben die Winkel ASB und CSD dieselben Halbirungslinien und diese teilen daher AB und CD in M und N harmonisch.

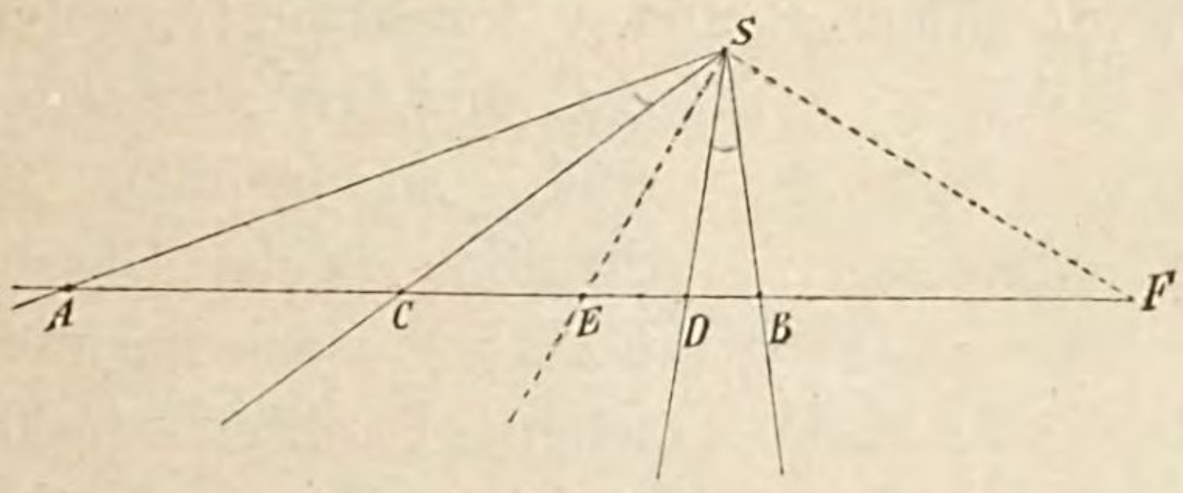


Fig. 3b.

Der Kreis über MN hat die Eigenschaft, dafs jedem seiner Punkte die Strecken AC und BD unter gleichen Winkeln erscheinen.

Auf dieser Eigenschaft beruht die Auflösung der folgenden Aufgabe:

„Auf einer Geraden sind drei Strecken gegeben, man soll einen Punkt konstruieren, welchem dieselben unter gleichen Winkeln erscheinen.“

Sind AB, CD, EF drei Strecken einer Geraden, so konstruiere man die Kreise, von deren Punkten man AB und CD oder AB und EF unter gleichen Winkeln sieht. Von ihren Schnittpunkten erscheinen alle drei Strecken unter gleichen Winkeln.

c. CD liegt teils innerhalb, teils aufserhalb AB.

In diesem Falle hat die Aufgabe keine Lösung; das gesuchte Punktpaar ist *imaginär*.

Zwei auf einer Geraden liegende Strecken besitzen demnach stets ein reelles oder imaginäres Punktpaar, welches beide harmonisch teilt.

d. Der Endpunkt D der einen Strecke liegt im Unendlichen.

Ist EF das teilende Punktpaar und D im Unendlichen, so ist $CE = CF$ und nach 4c. $CE^2 = CA \,.\, CB$.

9. Ein *vollständiges Vierseit* ist eine Gruppe von vier Geraden mit ihren sechs Schnittpunkten; es hat drei Diagonalen.

10. *Jede Diagonale eines vollständigen Vierseits wird durch die beiden anderen harmonisch geteilt.*

Das vollständige Vierseit sei $ABCDEF$ mit den drei Diagonalen AC, BD, EF.

Man denke sich zu AE, AF, AH und CE, CF, CH die vierten harmonischen Strahlen x und y konstruiert, welche AH und CH zugeordnet sind, so werden die Strahlen beider Büschel EF in vier harmonischen Punkten treffen und da drei dieser Punkte, nämlich EFH, für beide Büschel dieselben sind, so müssen sich x und y in einem Punkte von EF, welcher dem Punkte H zugeordnet ist, treffen. Aus demselben Grunde müssen sich x und y auch auf BD schneiden, also fällt ihr Schnittpunkt mit demjenigen J von EF und BD zusammen. Es sind also $BDGJ$ und $EFHJ$ harmonisch.

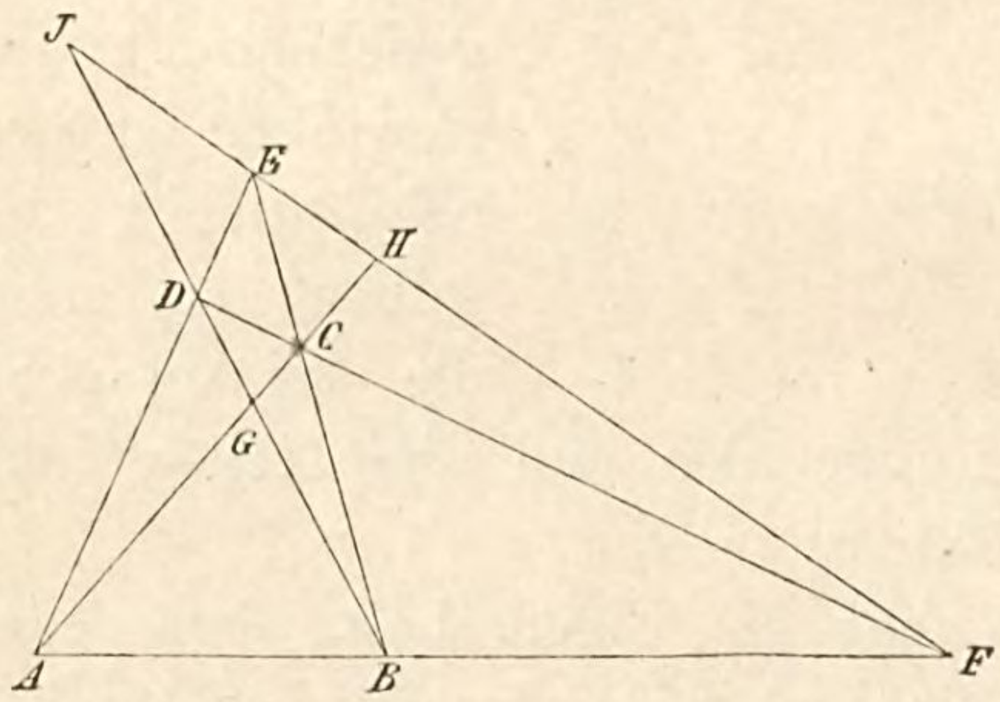


Fig. 4.

Das harmonische Büschel $F\ (BDGJ)$ schneidet aber auch die Diagonale AC in der harmonischen Reihe $ACGH$.

11. Der letzte Satz gestattet eine Anzahl von Konstruktionen *nur mit Hilfe des Lineals* auszuführen.

a. Zu drei Strahlen den vierten harmonischen zu konstruieren.

Die drei Strahlen seien AE, AF, AH. Auf demjenigen AH, zu welchem der zugeordnete konstruiert werden soll, nehme man beliebig C, ziehe durch C zwei Gerade, welche

die anderen beiden Strahlen in B und E, D und F treffen, endlich BD und EF bis zu ihrem Schnittpunkte J, so ist AJ der gesuchte Strahl.

b. Zu drei Punkten den vierten harmonischen zu konstruieren.

Durch 6b. zurückgeführt auf a.

c. Durch einen gegebenen Punkt zu einer halbierten Strecke eine Parallele zu ziehen.

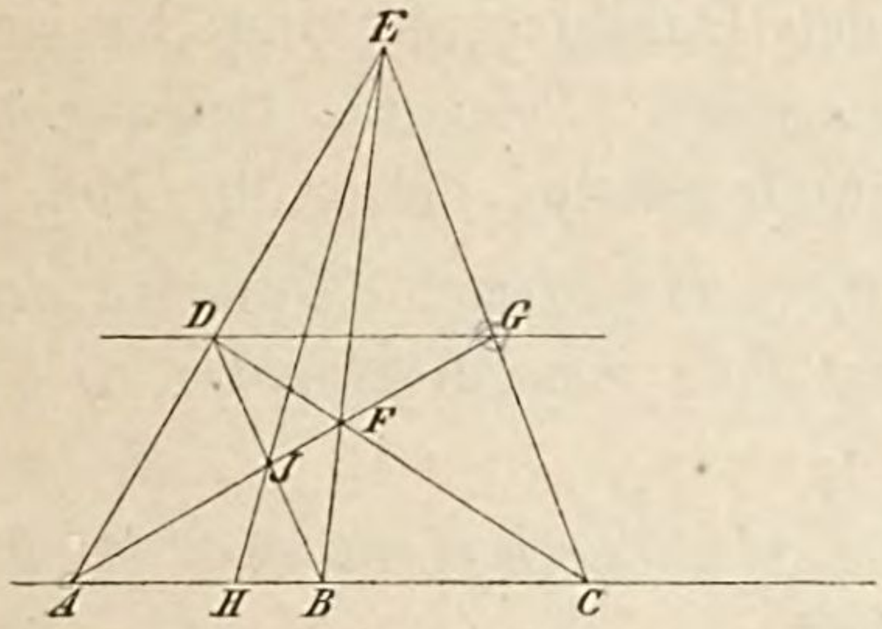


Fig. 5.

Gegeben ist $AB = BC$ und Punkt D. Auf AD wähle man E beliebig, ziehe BE, CE, CD, AF und endlich DG.

In dem vollständigen Vierseit $DEFGCA$ wird die Diagonale AC von den beiden anderen DG und EF harmonisch geteilt. Da $AB = BC$, so mufs der Schnittpunkt von AB und DG nach 4b. im Unendlichen liegen.

d. Eine Strecke auf einer von zwei Parallelen zu halbieren (Fig. 5).

e. Von einer Strecke AC auf einer von zwei Parallelen den dritten Teil abzuschneiden (Fig. 5).

Man schneidet AF mit BD in J und AB mit EJ in H, so ist $AH = \frac{1}{3} AC$.

Denn im vollständigen Vierseite $EDFJAB$ wird AB durch EJ und DF in H und C harmonisch geteilt, also ist $AH : BH = AC : BC = 2 : 1$.

f. In ähnlicher Weise kann man nacheinander $\frac{1}{4} AC$, $\frac{1}{5} AC$, ... abschneiden.

g. Gegeben sind drei Gerade abc, die nicht durch einen Punkt gehen, und ein Punkt D; man soll durch D eine Transversale legen, welche abc in solchen Punkten ABC schneidet, dass $ABCD$ harmonische Punkte sind.

a und c scheiden sich in E; man ziehe ED und konstruiere zu a, c, ED den vierten harmonischen, ED zugeordneten, Strahl. Er treffe b in B; dann ist DB die verlangte Transversale.

h. Gegeben sind drei Punkte ABC, die nicht in gerader Linie liegen und eine Gerade d; man soll auf d einen Punkt bestimmen, dessen Verbindungslinien mit ABC solche Gerade abc sind, dass $abcd$ harmonische Strahlen sind.

§. 2.

Harmonische Eigenschaften des Kreises.

12. Zwei Punkte, welche den Durchmesser eines Kreises harmonisch teilen, heifsen *harmonische Pole*; die Senkrechte in einem heifst die *Polare* des anderen und dieser ihr *Pol.*

13. *Der Radius ist die mittlere Proportionale zwischen den Entfernungen zweier harmonischen Pole vom Mittelpunkte.*

Folgt aus 4c.

14. *Jede Sehne eines Kreises wird durch einen ihrer Punkte und seine Polare harmonisch geteilt.*

Der Durchmesser AB sei in C und D harmonisch geteilt; in C sei auf AB die Senkrechte errichtet, welche die Polare von D ist und durch D eine beliebige Sehne EF gelegt, welche die Polare von D in G schneidet, so sollen $EFDG$ harmonische Punkte sein.

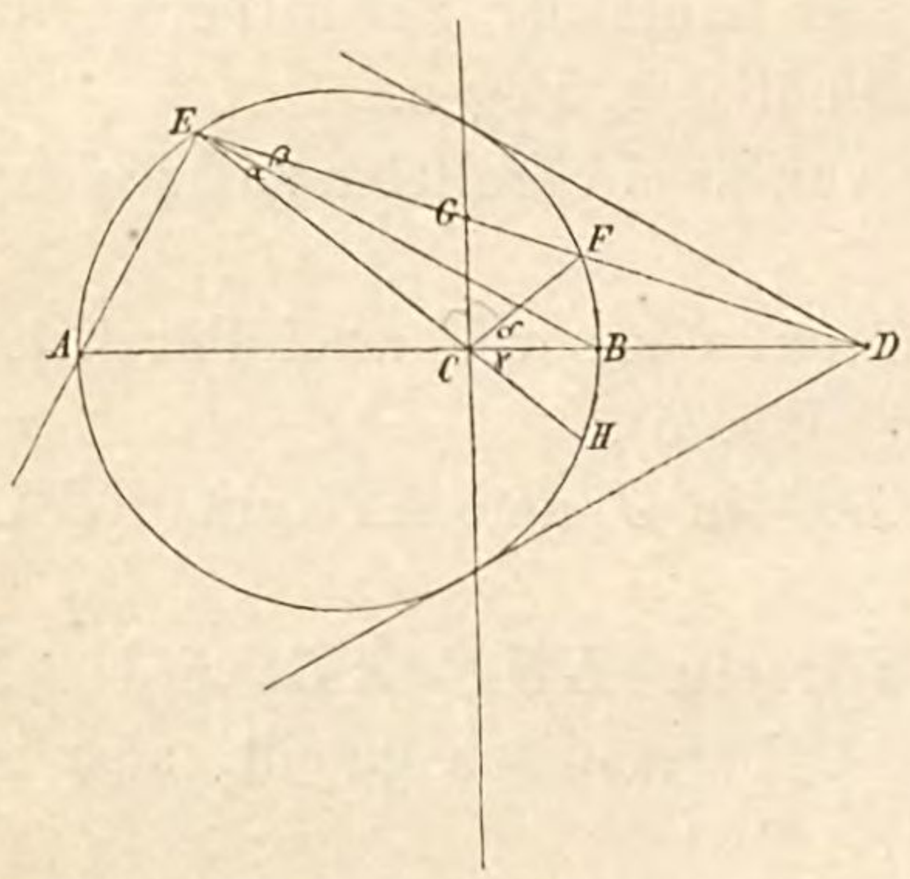


Fig. 6.

In dem harmonischen Büschel $E\,(ABCD)$ steht $EA \perp EB$, also ist $\sphericalangle\, \alpha = \beta$ (6c.), daher auch $\overset{\frown}{BF} = \overset{\frown}{BH}$ und $\gamma = \delta$; also ist (6e.) $C\,(EFGD)$ harmonisch.

a. *Die Polare eines aufserhalb des Kreises gelegenen Punktes ist seine Berührungssehne.* (4d.)

b. *Die Polare eines Kreispunktes ist seine Tangente.*

c. *Die Polare des Mittelpunktes ist die unendlich ferne Gerade.* (4b.)

15. *Die Gerade, welche zwei Diagonalpunkte eines vollständigen Kreisvierecks verbindet, ist die Polare des dritten.*

Da die Sehnen AB und CD durch F und EG harmonisch geteilt werden, so ist EG die Polare von F.

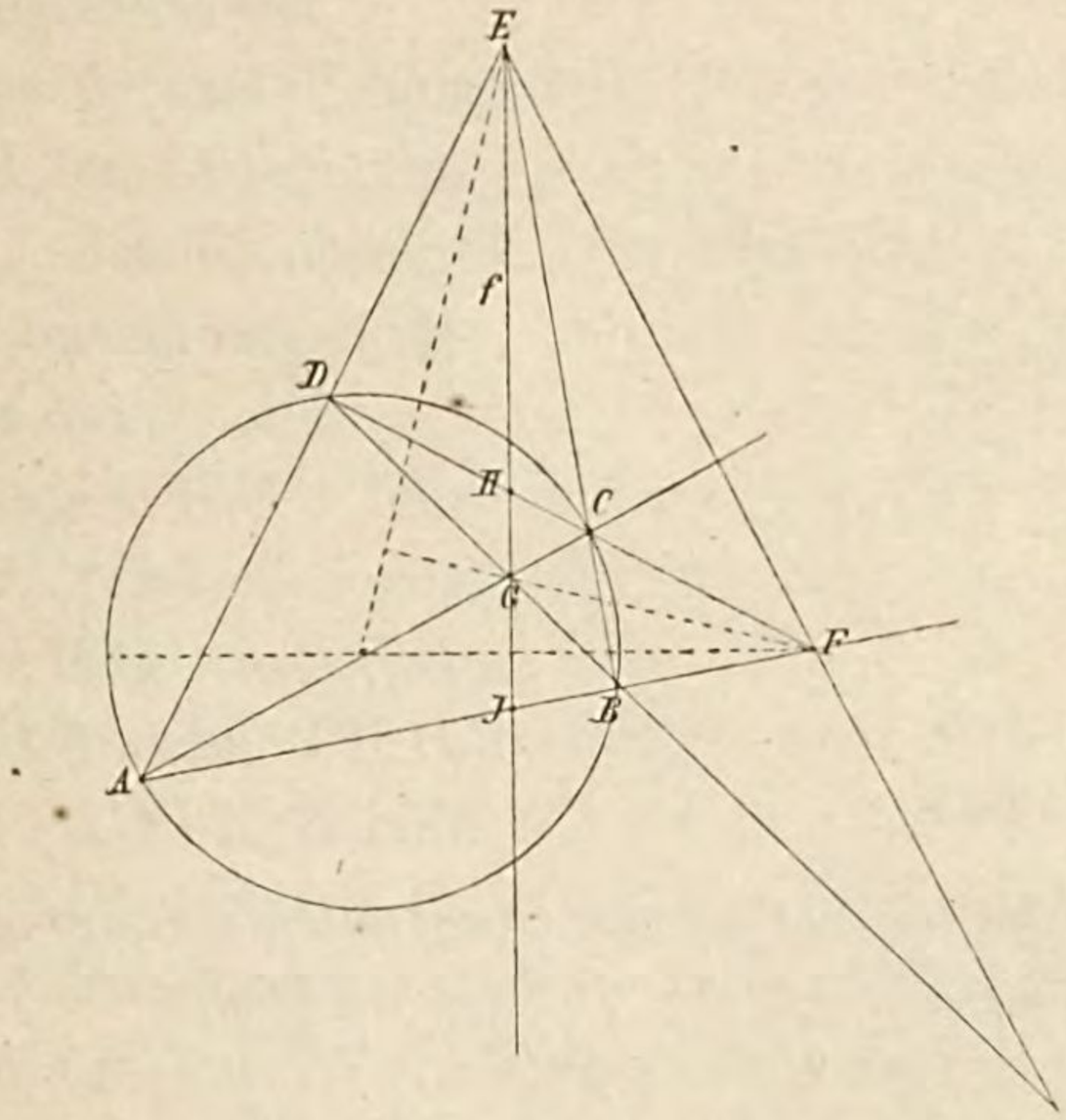


Fig. 7.

Drei Punkte von der Lage, dass die Verbindungslinie von zweien die Polare des dritten ist, sind die Ecken eines *Poldreiecks.*

16. *Wenn ein Punkt eine Gerade durchläuft, so dreht sich seine Polare um den Pol der Geraden.* Fig. 7.

I. F und f seien Pol und Polare, E sei ein beliebiger Punkt von f. Man ziehe EA, FA, FD und erhält die Schnittpunkte B und C; diese müssen wegen 14. und 10. mit E in einer Geraden liegen, also ist FG die Polare von E.

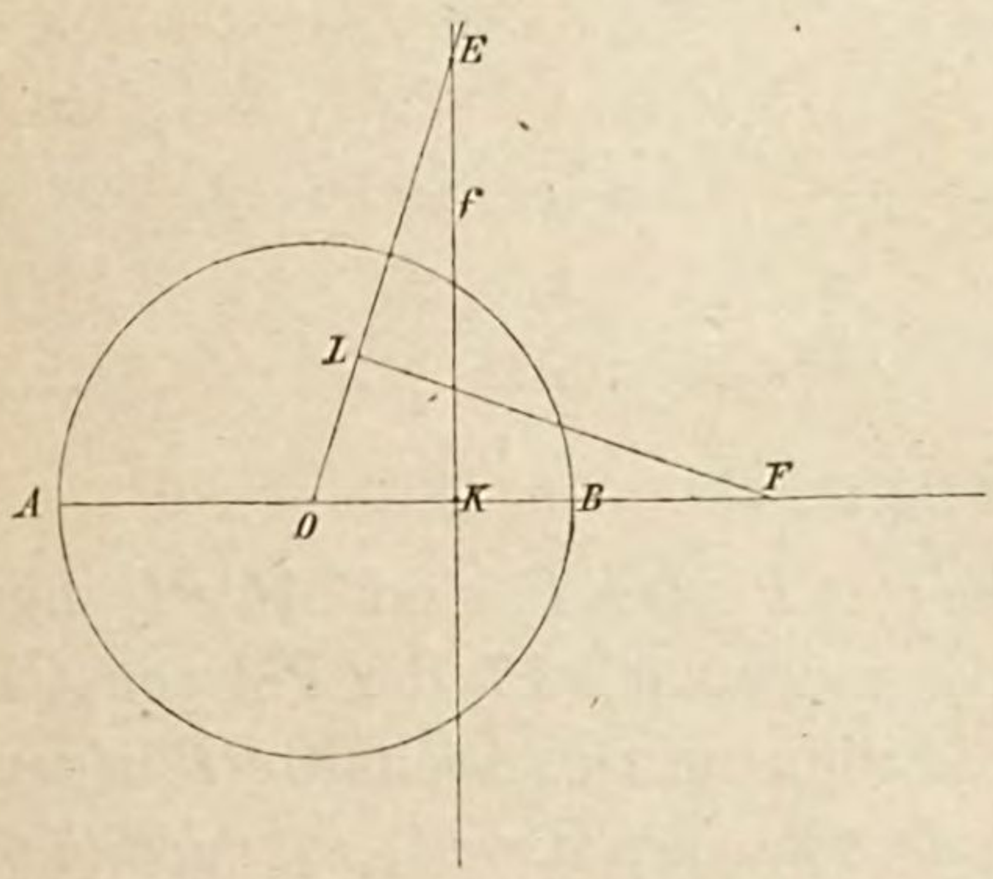


Fig. 8.

II. F und f seien Pol und Polare und E ein beliebiger Punkt von f. Man ziehe OE, $FL \perp OE$, so ist $OK \,.\, OF = OL \,.\, OE = r^2$, also sind (13) E und L harmonische Pole und FL ist die Polare von E.

17. *Irgend zwei Tangenten eines Kreises werden durch einen Strahl ihres Schnittpunktes und dessen Pol harmonisch getrennt.*

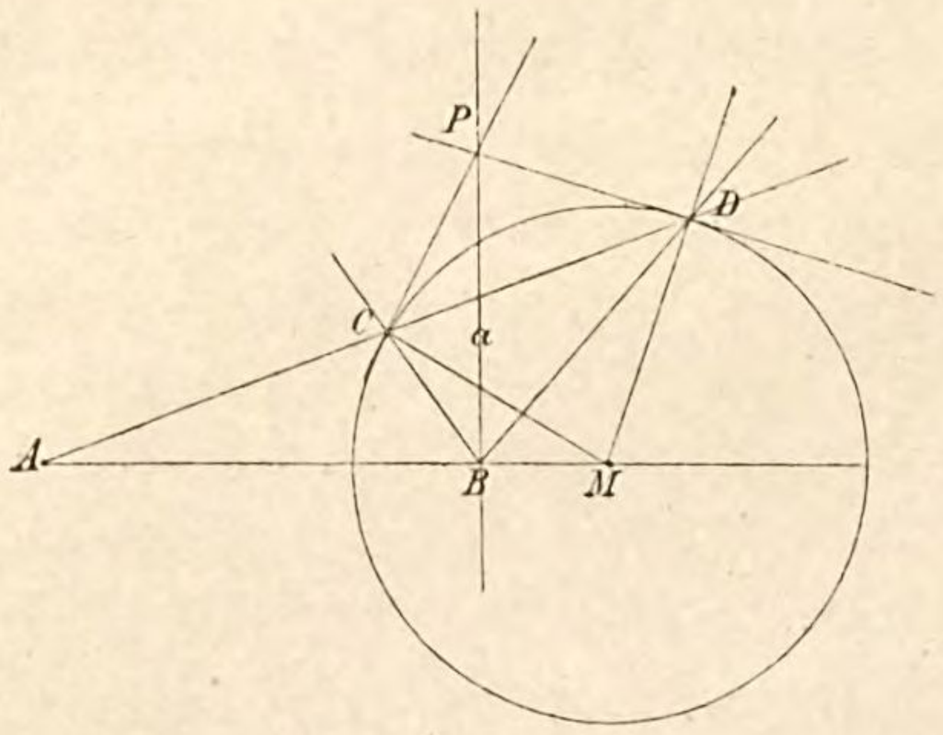


Fig. 9.

Es seien A und a Pol und Polare, P sei ein Punkt auf a, PC und PD die Tangenten durch ihn, B und A harmonische Pole.

Die Vierecke $BCMP$ und $PDMP$ sind Kreisvierecke, also ist $\sphericalangle CBP = CMP$, $DBP = DMP$, $CMP = DMP$, also $CBP = DBP$ und $B(APCD)$ harmonisch.

18. *Der Schnittpunkt zweier Diagonalen eines umgeschriebenen vollständigen Vierseits ist der Pol der dritten.*

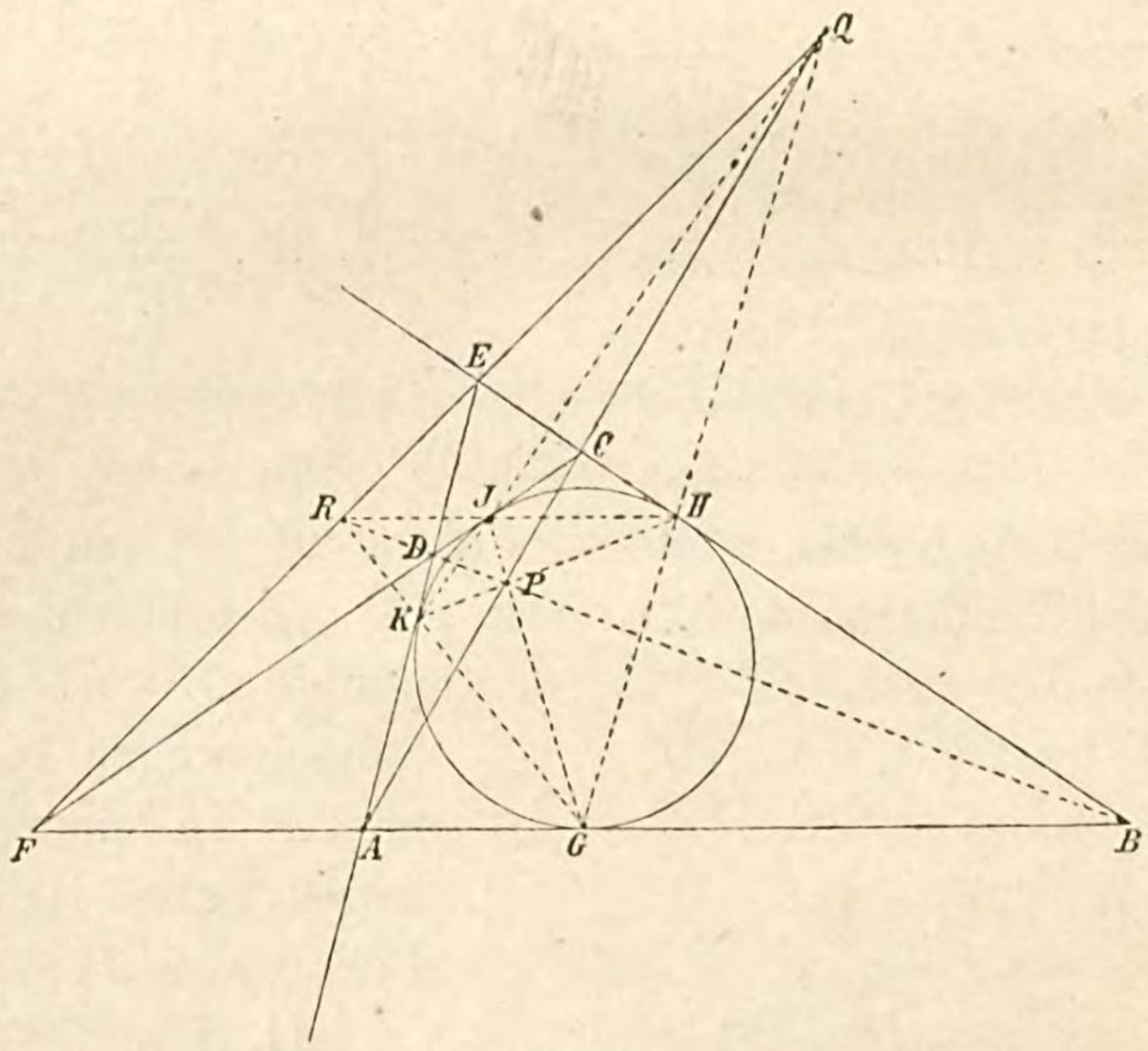


Fig. 10.

In dem Tangentenvierseit $ABCDEF$ sind $ACPQ$ und $BDPR$ harmonisch (10), also muss nach 17. der Pol von QR sowohl auf AC wie auf BD, mithin im Durchschnitte P liegen.

19. *Dreht sich eine Gerade um einen Punkt, so durchläuft ihr Pol die Polare des Punktes.*

Beweis wie 16.

20. *Die Polaren von vier harmonischen Punkten sind harmonische Strahlen, und die Pole von vier harmonischen Strahlen sind harmonische Punkte.*

Auf einer Geraden g seien $ABCD$ vier harmonische Punkte; ihre Polaren schneiden sich im Pole G von g und stehen auf den Strahlen des Büschels $O(ABCD)$ senkrecht, wenn O der Mittelpunkt des Kreises ist. Deshalb muss das Büschel der Polaren dem harmonischen Büschel $O(ABCD)$ kongruent sein.

21. *In jedem einem Kreise eingeschriebenen Vierecke schneiden sich die Gegenseiten und die Tangenten in den Gegenecken in vier harmonischen Punkten.*

Die Diagonalen des eingeschriebenen Vierecks $KGHI$ schneiden sich in PQR, deshalb ist QR die Polare von P und die Pole der Diagonalen KH und GI, d. h. die Schnittpunkte E und F der Tangenten in ihren Endpunkten müssen auf QR liegen. Da aber $P(ABGH)$ nach 10. harmonisch ist, so müssen $RQFE$ nach 20. auch harmonisch sein. Fig. 10.

22. *In jedem einem Kreise umgeschriebenen Vierseite sind die Verbindungslinien der Gegenecken und der Berührungspunkte auf den Gegenseiten vier harmonische Strahlen.*

Beweis wie in 21. an Fig. 10.

23. Zwei Punkte, von denen jeder auf der Polare des anderen (16) liegt, heifsen *konjugierte Punkte* in Bezug auf den Kreis; zwei Strahlen, von denen jeder (19) durch den Pol des anderen geht, heifsen *konjugierte Strahlen.*

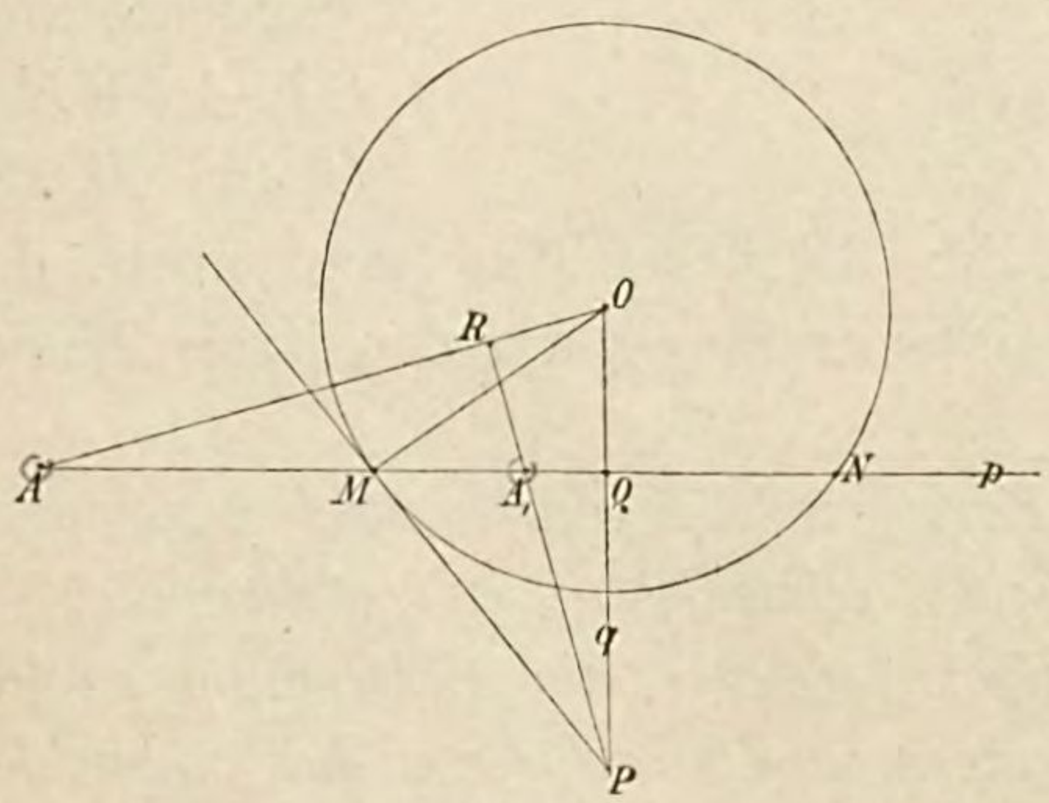


Fig. 11 a.

24. *Einem Punkte sind alle Punkte seiner Polare und einem Strahle alle Strahlen seines Poles konjugiert.* (16, 19).

25. *Fällt man vom Mittelpunkte eines Kreises eine Senkrechte auf eine Gerade, so ist das Produkt der Abstände ihres Fusspunktes von irgend zwei konjugierten Punkten dieser Geraden konstant.*

Fig. 11a. b.

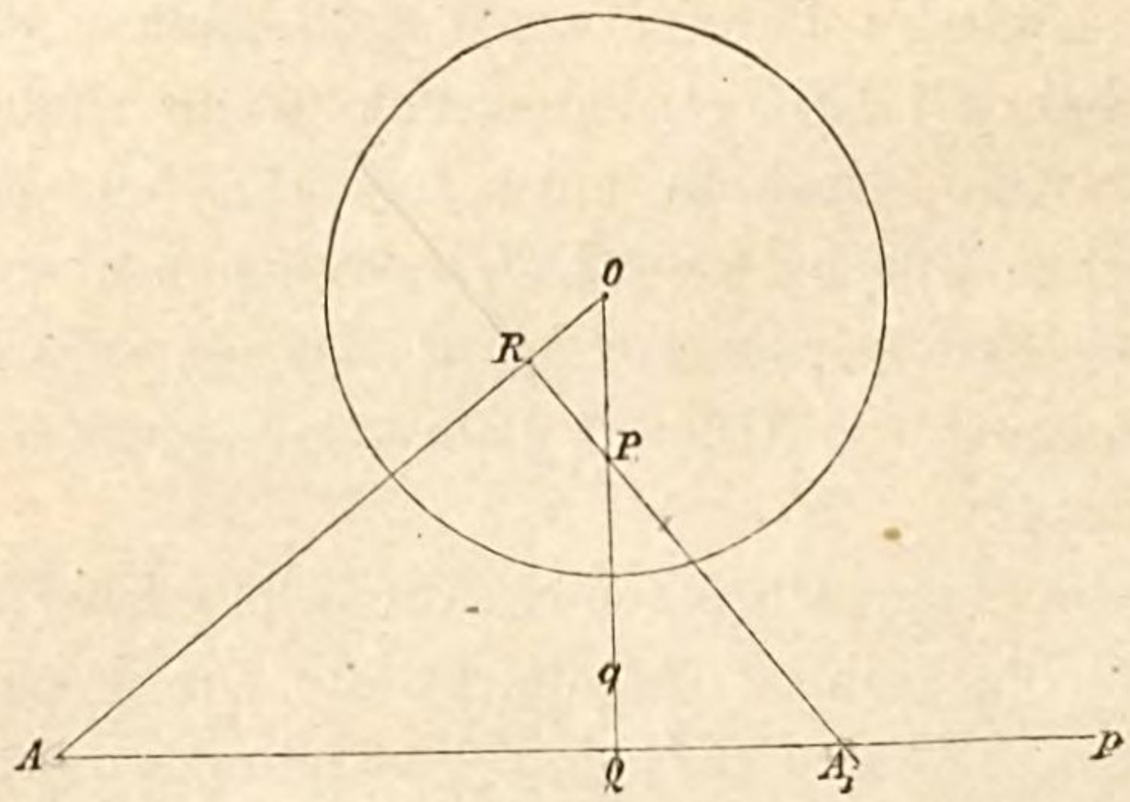


Fig. 11b.

Es sei $OQ \perp p$, P der Pol von p, $PR \perp AO$; dann sind A und A_1 konjugierte Punkte und aus ähnlichen Dreiecken folgt $AQ : QO = QP : A_1Q$ oder $AQ \,.\, A_1Q = QO \,.\, QP = QM^2 = QN^2$, da $\sphericalangle\, OMP = OMQ = 90^0$.

26. Wenn sich zwei Kreise so schneiden, dafs die Tangenten in einem, also in jedem Schnittpunkte, einen Winkel α bilden, so sagt man, die beiden Kreise schneiden sich unter dem Winkel α.

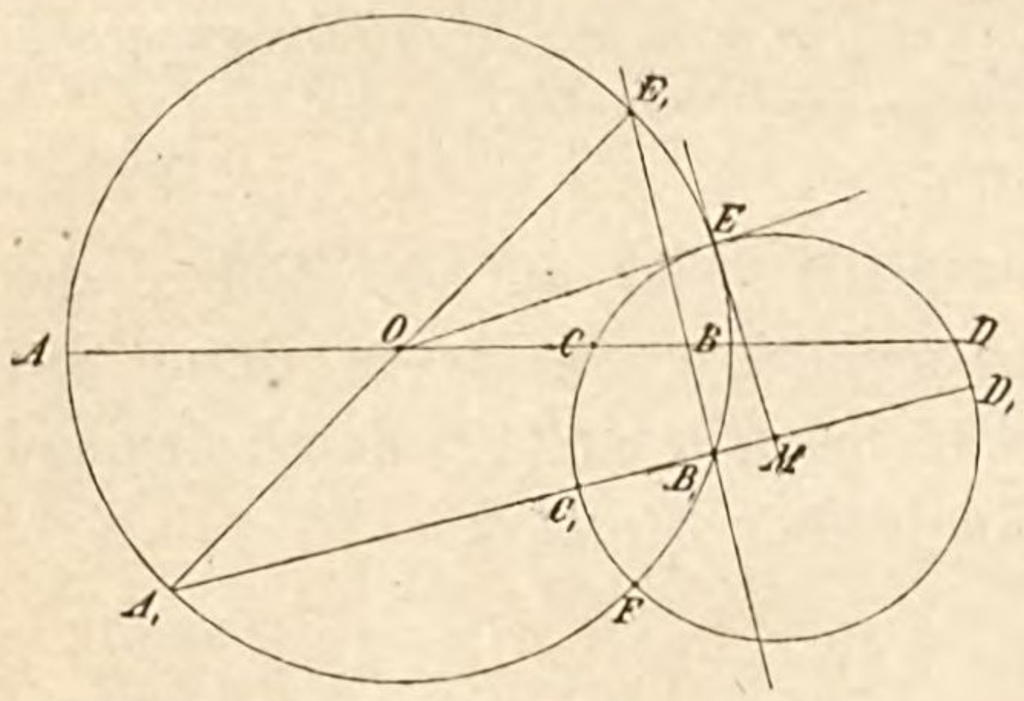


Fig. 12.

27. Durch zwei harmonische Pole C und D eines Kreises O sei ein Kreis M gelegt, welcher jenen in E und F schneidet; dann ist (4c) $OC \,.\, OD = OB^2 = OE^2$, also OE Tangente an Kreis M und $OE \perp ME$. Die Kreise O und M schneiden sich also rechtwinklig. Berücksichtigt man noch, dass A und B konjugierte Punkte in Bezug auf den Kreis M sind, so folgen die Sätze:

a. *Jeder Kreis, welcher durch zwei harmonische Pole eines andern gelegt wird, schneidet diesen rechtwinklig.*

b. *Der Kreis, welcher die Entfernung zweier conjugierten Punkte eines andern zum Durchmesser hat, schneidet diesen rechtwinklig.*

Im Kreise O ziehe man noch einen Durchmesser A_1E_1, welcher den Kreis M nicht trifft. Die Punkte D_1 und C_1 des

Durchmessers A_1M sind konjugiert in Bezug auf O, weil $ME^2 = MD_1^2 = MA_1 \,.\, MB_1$ ist, also sind A_1 und B_1 harmonische Pole für den Kreis M und da $B_1E_1 \perp A_1M$, so ist B_1E_1 die Polare von A_1 in Bezug auf den Kreis M, folglich sind A_1 und E_1 konjugierte Punkte in Bezug auf diesen Kreis. Die imaginären Schnittpunkte der Geraden A_1E_1 und des Kreises M teilen also A_1E_1 harmonisch. Es folgt:

c. *Wenn zwei Kreise sich rechtwinklig schneiden, so sind zwei diametrale Punkte des einen konjugiert in Bezug auf den anderen.*

§ 3.

Kreisbüschel.

28. Zieht man durch einen Punkt P beliebige Sehnen eines Kreises, so sind die Produkte aus ihren Abschnitten einander gleich und zwar gleich dem Quadrate der Tangente durch P oder gleich dem Quadrate seiner halben kürzesten Sehne, je nachdem er ausserhalb oder innerhalb des Kreises liegt. Dieses konstante Produkt heifst „*die Potenz des Kreises im Punkte P.*“

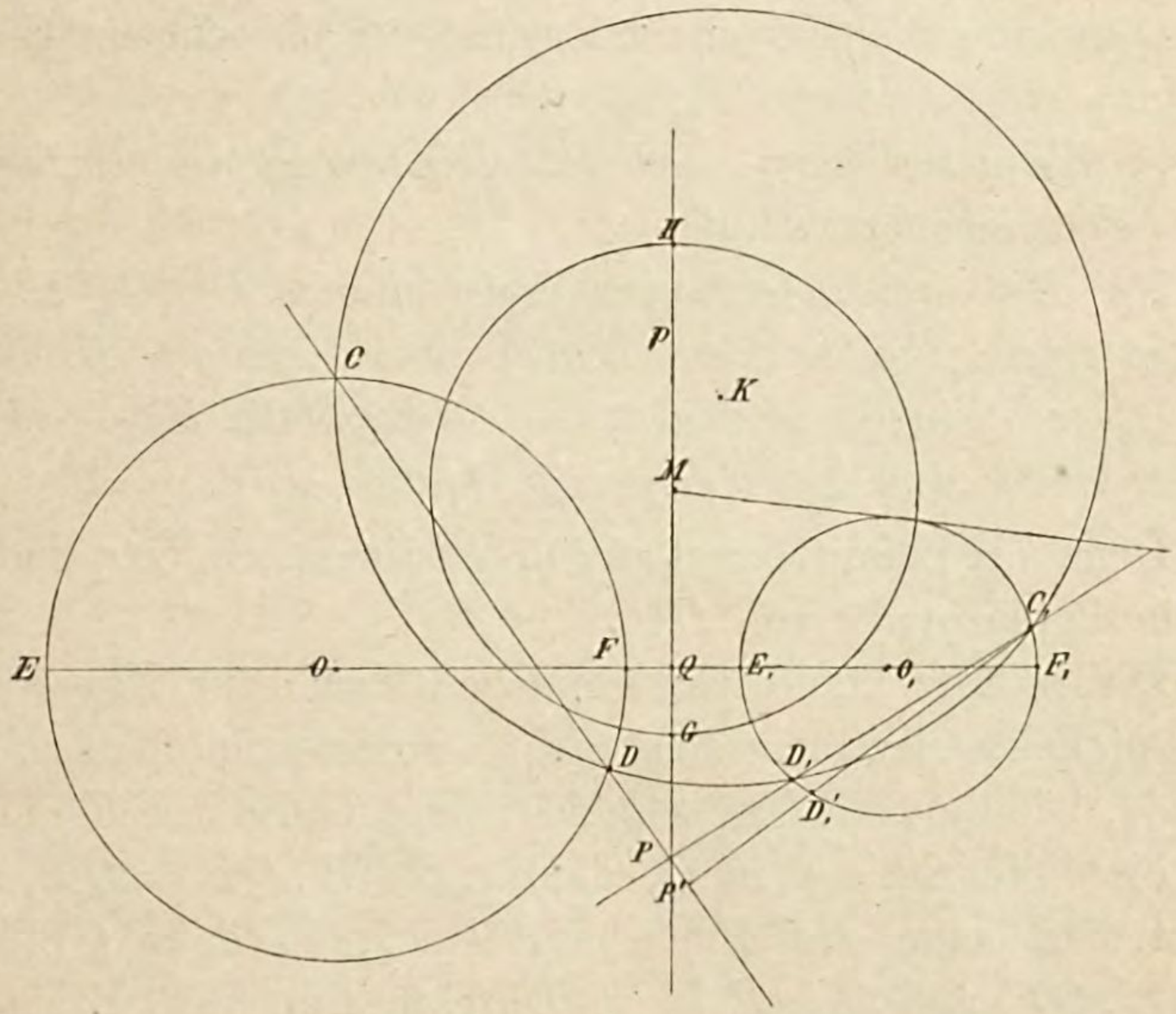


Fig. 13.

29. Schneiden sich zwei Kreise O und O_1 in A und B, so so haben sie in jedem Punkte P von AB gleiche Potenz. Ein

Punkt, in welchem zwei Kreise gleiche Potenz haben, heifst ein *Potenzpunkt* derselben. Sind p und p_1 seine Entfernungen von den Mittelpunkten, r und r_1 die Radien der Kreise, so ist $p^2 - p_1^2 = r^2 - r_1^2$, denn die Tangenten von P an die Kreise sind gleich. Haben O und O_1 keinen gemeinschaftlichen Punkt und schneidet man sie mit einem Kreise K in CD und C_1D_1, so haben sie im Durchschnitte P von CD und C_1D_1 gleiche Potenz, denn $PC \,.\, PD = PC_1 \,.\, PD_1$ (28). Da mit veränderlichem K auch P sich ändert, so giebt es unendlich viele kontinuierlich aufeinander folgende Potenzpunkte von O und O_1. Alle diese Punkte liegen auf einer geraden Linie. Denn gäbe es auf CD ausser P noch einen Potenzpunkt P', und schneidet man mit $P'C_1$ den Kreis O_1 noch in D_1', so wäre $P'C \,.\, P'D = P'C_1 \,.\, P'D_1'$ und es müssten die vier Punkte CDC_1D_1' auf einem Kreise liegen, dieser hätte mit K die drei Punkte CDC_1 gemeinsam und muss daher mit ihm zusammenfallen; also fallen auch D_1 und D_1' und daher auch P und P' zusammen. Also:

a. *Der Ort der Potenzpunkte zweier Kreise ist eine Gerade und heisst die „Potenzlinie“ oder der „Potenzort“ der Kreise.*

Diese muss aus Symmetriegründen senkrecht zur Centrale stehen.

b. *Wenn zwei Kreise sich schneiden, so ist die gemeinschaftliche Sehne ihre Potenzlinie.*

30. *Die drei Potenzlinien dreier Kreise OO_1O_2 schneiden sich in einem Punkte, dem Mittelpunkte desjenigen Kreises der $O_1O_2O_3$ rechtwinklig schneidet, — Orthogonalkreis — oder von $O_1O_2O_3$ unter dem Durchmesser geschnitten wird.*

Denn der Schnittpunkt der Potenzlinien von OO_1 und O_1O_2 ist ein Potenzpunkt von OO_2.

Dieser Satz liefert ein bequemes Mittel zur Konstruktion der Potenzlinien zweier sich nicht schneidenden Kreise.

31. Die Centrale OO_1 schneidet diese Kreise in EF und E_1F_1 und die Potenzlinie p in Q, dann ist $QE \,.\, QF = QE_1 \,.\, QF_1$. Konstruiert man ein Punktpaar E_2F_2, so dass $QE_2 \,.\, QF_2 = QE \,.\, QF$, und über E_2F_2 als Durchmesser einen Kreis O_2 so hat dieser mit O und O_1 die Gerade p zur Potenzlinie. Da es unzählig viele Punktpaare wie E_2F_2 gibt, so gibt es auch unzählig viele Kreise, welche mit O und O_1 dieselbe Potenzlinie p haben.

Alle Kreise, welche dieselbe Potenzlinie haben, bilden ein „*Kreisbüschel.*“ Ihre Schnittpunkte, falls sie vorhanden sind heifsen *Grundpunkte.*

Der Punkt Q, in dem die Potenzlinie von der Centrale geschnitten wird, heisst der „*Centralpunkt*“ des Büschels.

32. Da zwei Kreise eines Büschels mit Grundpunkten ausser diesen keinen gemeinschaftlichen Punkt haben können, so kann durch irgend einen Punkt der Ebene nur ein Kreis des Büschels gehen.

Sind O und O_1 die beiden das Büschel bestimmenden Kreise und schneiden sich dieselben nicht, so lege man durch einen Punkt C_2 einen Kreis K, der O in C und D trifft, schneide die Potenzlinie von OO_1 mit CD in P und K mit C_2P in D_2, lege durch C_2D_2 einen Kreis, dessen Mittelpunkt O_2 auf der Centrale OO_1 liegt, so ist er derjenige Kreis des Büschels, welcher durch C_2 geht.

33. Auf der Potenzlinie p des Büschels (OO_1) sei M irgend ein Punkt; da er ein Potenzpunkt des Büschels ist, so sind die von ihm an die Kreise des letzteren gezogenen Tangenten einander gleich und es läfst sich um ihn ein Kreis legen, der alle Kreise des Büschels rechtwinklig schneidet. Er treffe p in G und H, so sind diese Punkte (27 c) konjugierte Punkte in Bezug auf alle Kreise des Büschels. Ist Q der Centralpunkt des Büschels, so ist auch $QG \,.\, QH$ constant (25), also:

a. *Zwei Punkte der Potenzlinie, welche konjugiert sind für einen Kreis des Büschels, sind es für alle.*

Diese Eigenschaft hat aufser der Potenzlinie noch die unendlich ferne Gerade. Sind G' und H' auf g_∞ konjugierte Punkte für den Kreis O, also $OG' \perp OH'$, so ist auch $O_1G' \perp O_1H'$ also sind G' und H' auch konjugiert für O_1.

Wenn der Punkt M die Potenzlinie p durchläuft, so durchläuft der Kreis M eine Reihe von Kreisen, die von allen Kreisen des Büschels (OO_1) rechtwinklig geschnitten werden, also in jedem der Punkte $OO_1O_2 \ldots$ gleiche Potenz, deshalb die Centrale OO_1 zur Potenzlinie haben und folglich ein Büschel (M) bilden. Die beiden Kreisbüschel (O) und (M) heifsen „*konjugierte Büschel*“ und stehen in einer solchen Beziehung, dafs jeder Kreis des einen Büschels jeden des anderen rechtwinklig schneidet.

Schneiden sich die Kreise O und O_1, so liegen die End-

punkte EF und E_1F_1 ihrer Durchmesser auf der Centrale zu beiden Seiten des Centralpunktes und da sie in Bezug auf den Kreis M konjugierte Punkte sind, so kann OO_1 diesen Kreis nicht schneiden. Haben aber O und O_1 keine gemeinschaftlichen Punkte, so liegen die Endpunkte EF und E_1F_1 auf derselben Seite von Q, also schneidet OO_1 den Kreis M in denjenigen Punkten, welche jene Durchmesser harmonisch teilen. Hieraus folgt:

b. *Wenn die Kreise eines Büschels zwei gemeinschaftliche Punkte haben, so haben die Kreise des konjugierten Büschels keine gemeinschaftlichen Punkte und umgekehrt.*

In anderer Fassung: *Wenn zwei Kreise sich schneiden, so trifft kein Orthogonalkreis derselben ihre Centrale, wenn die Kreise sich nicht schneiden, so trifft jeder Orthogonalkreis ihre Centrale in denjenigen beiden Punkten, welche die auf ihr liegenden Durchmesser harmonisch teilen.*

Aus diesem Satze folgt eine andere Konstruction der Aufgabe 8.

34. Durch einen beliebigen Punkt C_2 läfst sich nach 32. ein Kreis des Büschels legen; in diesem sei C_2' der diametrale Punkt von C_2. Dann sind C_2 und C_2' konjugierte Punkte in Bezug auf alle Kreise $OO_1O_2\ldots$, also schneiden sich die Polaren von C_2 in Bezug auf diese Kreise in C_2'.

Die Polaren eines Punktes in Bezug auf alle Kreise eines Büschels schneiden sich in einem Punkte.

§ 4.
Die Involution.

35. Haben die Punktpaare AA_1, BB_1, CC_1, ... zu einem Punkte Q eine solche Lage, dass $QA\,.\,QA_1 = QB\,.\,QB_1 = QC\,.\,QC_1 = \ldots$ ist und liegen je zwei Punkte eines Paares entweder immer auf derselben Seite oder immer auf verschiedenen Seiten von Q, so bilden die Punktpaare eine „*Punktinvolution*“. Q heifst der „*Centralpunkt*“ und das konstante Produkt $QA\,.\,QA_1$ die „*Potenz der Involution.*“

Die Verbindungslinien eines Punktes mit den Punktpaaren einer Punktinvolution bilden die Strahlenpaare einer *Strahleninvolution.*

36. a. *Alle Paare von konjugierten Punkten einer Geraden in Bezug auf einen Kreis bilden eine Involution.* (25).

b. *Alle Paare von konjugierten Strahlen eines Punktes in Bezug auf einen Kreis bilden eine Involution.* (23).

c. *Die Kreise eines Büschels schneiden jede Gerade in den Punktpaaren einer Involution.*

Denn alle Kreise haben im Schnittpunkte der Geraden mit der Potenzlinie gleiche Potenz.

d. *Durch die Punktpaare einer Involution lassen sich die Kreise eines Büschels legen.*

Sind AA_1, BB_1, CC_1, ... Punktpaare einer Involution mit dem Centralpunkte Q und legt man durch AA_1 und BB_1 zwei Kreise α und β, die sich in S und T schneiden, so mufs die Potenzlinie ST durch Q gehen, weil Q ein Potenzpunkt der Kreise ist und ein durch STC gelegter Kreis mufs auch durch C_1 gehen.

e. *Zwei Punktpaare einer Involution bestimmen dieselbe. Zwei Involutionen auf einer Geraden haben daher höchstens ein gemeinschaftliches Punktpaar.*

Denn legt man durch sie zwei Kreise, so bestimmt deren Potenzlinie den Centralpunkt der Involution.

f. *Die Punktpaare einer Involution bilden für alle Kreise eines bestimmten Büschels Paare konjugierter Punkte. Zwei Punkte eines Paares heifsen konjugierte Punkte der Involution.*

Ueber den Entfernungen AA_1 und BB_1 als Durchmesser beschreibe man Kreise α und β so sind AA_1, BB_1 und alle Punktpaare der durch sie bestimmten Involution Paare konjugierter Punkte in Bezug auf jeden Kreis des dem Büschel $(\alpha\beta)$ konjugierten Kreisbüschels. (33, 27 c.)

g. Sind die Punktpaare AA_1, BB_1, ... Paare konjugierter Punkte in Bezug auf einen Kreis O (Fig. 11a und 11b), so giebt es in dem Falle, dafs alle Punktpaare stets auf einer Seite von Q liegen, Fig. 11a, ein Punktpaar MN, welches die Punkte eines jeden Paares harmonisch trennt. Da $QM^2 = QN^2 = QA \,.\, QA_1$ (4c), so fallen in M sowohl wie in N zwei Punkte eines Paares zusammen; daher heifsen M und N *Doppelpunkte der Involution.*

Die Doppelpunkte einer Involution trennen irgend zwei konjugierte Punkte derselben harmonisch.

Eine Involution, bei welcher je zwei konjugierte Punkte auf entgegengesetzten Seiten des Centralpunktes liegen, hat keine Doppelpunkte.

37. *Zieht man durch einen Punkt P Sehnen eines Kreises, AA_1, BB_1, ... und verbindet deren Endpunkte mit einem Punkte R der Peripherie, so bilden die Verbindungslinien die Strahlenpaare einer Involution.*

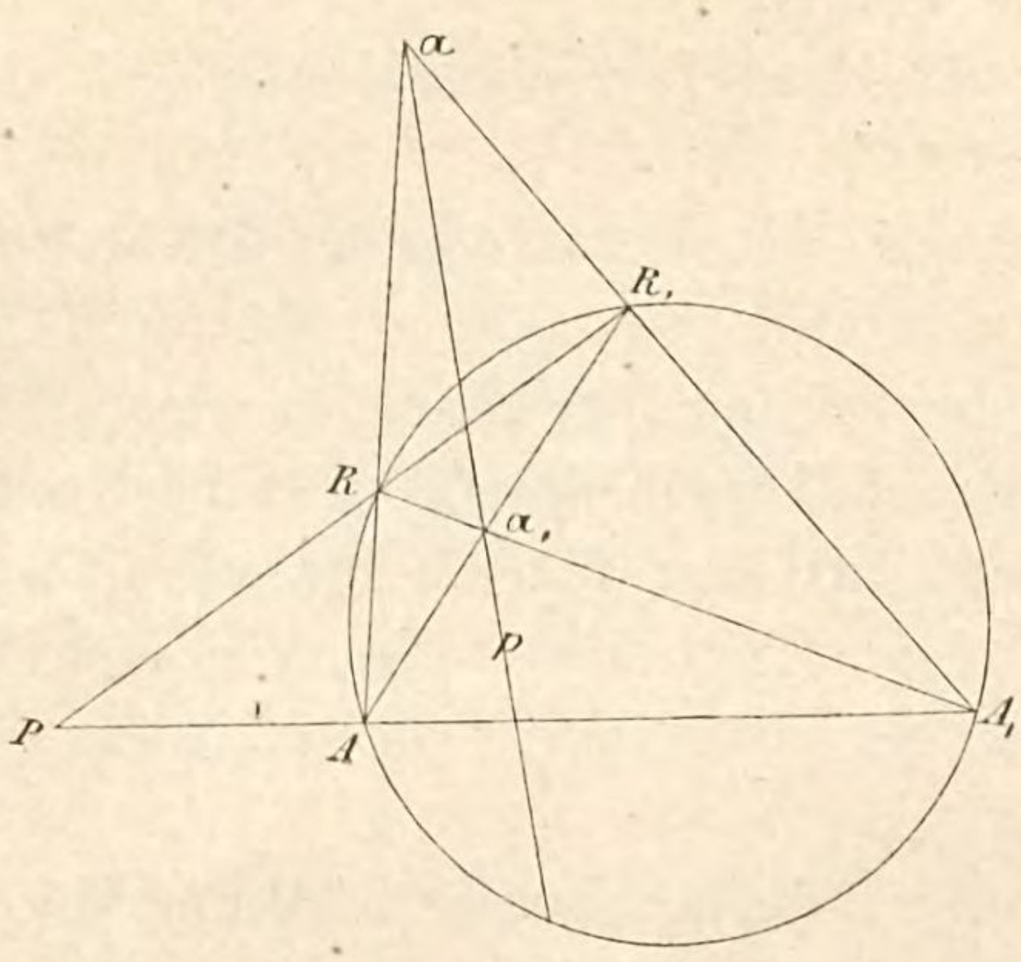


Fig. 14.

Man schneide den Kreis mit PR in R_1, so sind die Schnittpunkte α und α_1 von RA mit R_1A_1 und RA_1 mit R_1A konjugierte Punkte in Bezug auf den Kreis (15). Es treffen also die Strahlenpaare $R(AA_1, \ldots)$ die Gerade p in Punktpaaren einer Involution. (36a).

38. Jede Strahleninvolution kann auf die in 37. angegebene Art hervorgerufen werden. Sind nämlich (Fig. 14) $\alpha\alpha_1$, $\beta\beta_1$, ... Punktpaare einer Involution auf einer Geraden p und ist R ein beliebiger Punkt, so sind R $(\alpha\alpha_1, \beta\beta_1, \ldots)$ Strahlenpaare einer Involution. Die Kreise über $\alpha\alpha_1$, $\beta\beta_1$, ... bilden ein Büschel (36c); unter den Kreisen des konjugierten Büschels giebt es einen O, der durch R geht; er schneide die Strahlenpaare in AA_1, BB_1, CC_1, ... Da α und α_1 konjugierte Punkte in Bezug auf O sind, so müssen $A\alpha_1$ und $A_1\alpha$ sich in einem Punkte R_1 von O schneiden. Der Schnittpunkt P von AA_1 und RR_1 ist aber der Pol von p, durch den also alle Sehnen AA_1, BB_1, CC_1, ... gehen müssen.

39. *Zwei Strahleninvolutionen in demselben Punkte haben höchstens ein gemeinschaftliches Strahlenpaar.*

Die Kreise M und $\mathfrak{M}$ schneiden sich in R; durch R lege man zwei Strahlenpaare aa_1 und bb_1, welche die Kreise in AA_1 BB_1 und $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$ schneiden. Man bestimme die Schnittpunkte P und $\mathfrak{P}$ der Sehnen AA_1, BB_1 und $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$. Zieht

man durch P und $\mathfrak{P}$ in den Kreisen M und $\mathfrak{M}$ Sehnen, so bestimmen die Verbindungslinien ihrer Endpunkte mit R zwei Strahleninvolutionen, welche nach 38. ganz allgemeiner Natur

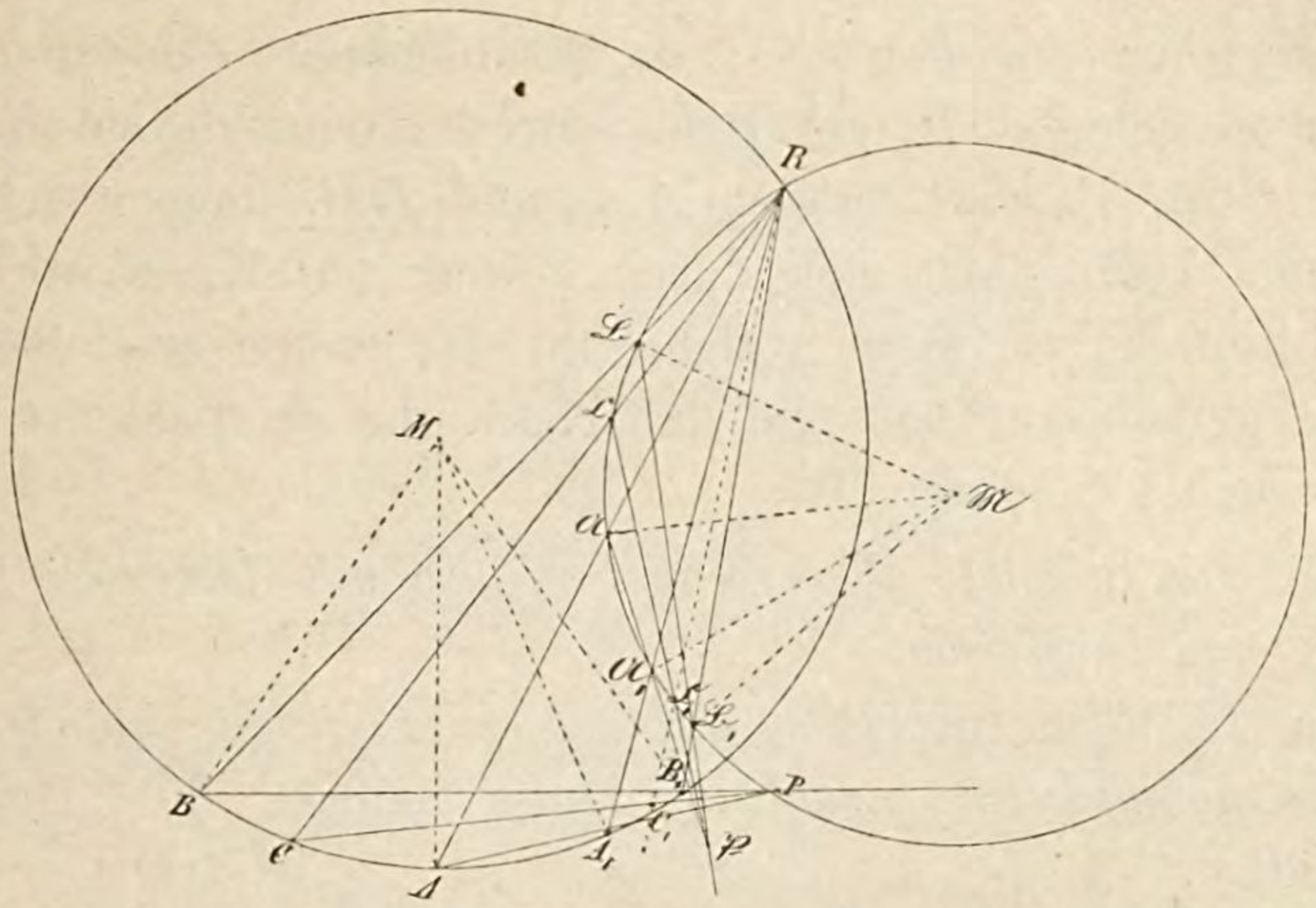


Fig. 15.

sind. Diese haben zwei gemeinschaftliche Strahlenpaare aa_1 und bb_1; es soll gezeigt werden, dafs sie alle Strahlenpaare gemein haben.

Wegen Winkelgleichheit sind die Dreiecke AA_1M und $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{M}$, BB_1M und $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1\mathfrak{M}$ ähnlich; bezeichnet man die Kreisradien mit r und $\mathfrak{r}$, so ist $AA_1 : \mathfrak{A}\mathfrak{A}_1 = BB_1 : \mathfrak{B}\mathfrak{B}_1 = r : \mathfrak{r}$. Da auch $\sphericalangle APB = \mathfrak{A}\mathfrak{P}\mathfrak{B}$ ist, wegen Ähnlichkeit der Bogen AB und $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, A_1B_1 und $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$, so ist auch Viereck $MAPB \sim \mathfrak{M}\mathfrak{A}\mathfrak{P}\mathfrak{B}$ und es verhält sich $PA : \mathfrak{P}\mathfrak{A} = r : \mathfrak{r}$.

Man ziehe durch P die Sehne CC_1 in M, schneide $\mathfrak{M}$ mit RC in $\mathfrak{C}$, und ziehe in $\mathfrak{M}$ durch $\mathfrak{P}$ die Sehne $\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$, so läfst sich zeigen dafs $RC_1\mathfrak{C}_1$ in einer Geraden liegen.

Da $AC : \mathfrak{A}\mathfrak{C} = r : \mathfrak{r}$, $\sphericalangle A_1AC = \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ ist, so ist $\triangle PAC \sim \mathfrak{P}\mathfrak{A}\mathfrak{C}$, also $\sphericalangle APC = \mathfrak{A}\mathfrak{P}\mathfrak{C}$, und da Bogen $AC \sim \mathfrak{A}\mathfrak{C}$ ist, d. h. sie fassen gleiche Peripheriewinkel, so mufs auch Bogen $A_1C_1 \sim \mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_1$ sein. Weil aber $RA_1\mathfrak{A}_1$ in einer Geraden liegen, so müssen dies auch $RC_1\mathfrak{C}_1$ thun. Es fallen also die Strahlenpaare RC, RC_1 und $R\mathfrak{C}$, $R\mathfrak{C}_1$ der beiden Involutionen zusammen. Da diese beliebig waren, so müssen die Involutionen identisch sein.

40a. *Jeder Kreis durch den Scheitel einer Strahleninvolution schneidet die Strahlenpaare in solchen Punktpaaren, daſs ihre Verbindungslinien sich in einem Punkte treffen.* Dieser Punkt heiſst das „*Involutionscentrum.*“

Es seien $aa_1, bb_1, cc_1, \ldots$ die Strahlenpaare einer Involution mit dem Scheitel R; ein Kreis durch R shneide sie in AA_1, BB_1, CC_1, ... Die Geraden AA_1 und BB_1 mögen sich in P treffen. Dann läſst sich durch P und den Kreis in R eine Involution hervorrufen, welche mit der ersten zwei Strahlenpaare gemeinsam hat und daher mit ihr identisch ist. Also geht auch CC_1 durch P.

b. *Die Schenkel aller rechten Winkel mit demselben Scheitel bilden eine Involution.*

c. *In jeder Involution giebt es ein Paar zu einander senkrechter konjugierter Strahlen.* Diese heiſsen die „*Axen der Involution.*“

41. *Jede Gerade wird von einer Strahleninvolution in einer Punktinvolution geschnitten.*

I. Beweis. Die Strahlenpaare $R\,(aa_1, bb_1, cc_1, \ldots)$ werden von einer Geraden g in AA_1, BB_1, CC_1, ... geschnitten. Wären nun nicht

$$AA_1,\ BB_1,\ CC_1,\ \ldots$$

sondern

$$AA_1,\ BB_1,\ CC_1',\ \ldots$$

in Involution, so wären auch die Strahlen $R\,(AA_1, BB_1, CC_1', \ldots)$ in Involution. Da aber auch $R\,(AA_1, BB_1, CC_1, \ldots)$ in Involution sind, so fallen RC_1 und RC_1', also auch C_1 und C_1' zusammen.

II. Beweis. Auf g seien $AA_1, BB_1, CC_1, \ldots$ Punktpaare einer Involution mit dem Centralpunkte Q. Ihre Verbindungslinien mit R bilden eine Strahleninvolution. Eine Parallele durch A_1 zu AR werde von den Strahlenpaaren in $\mathfrak{BB}_1, \mathfrak{CC}_1, \ldots$

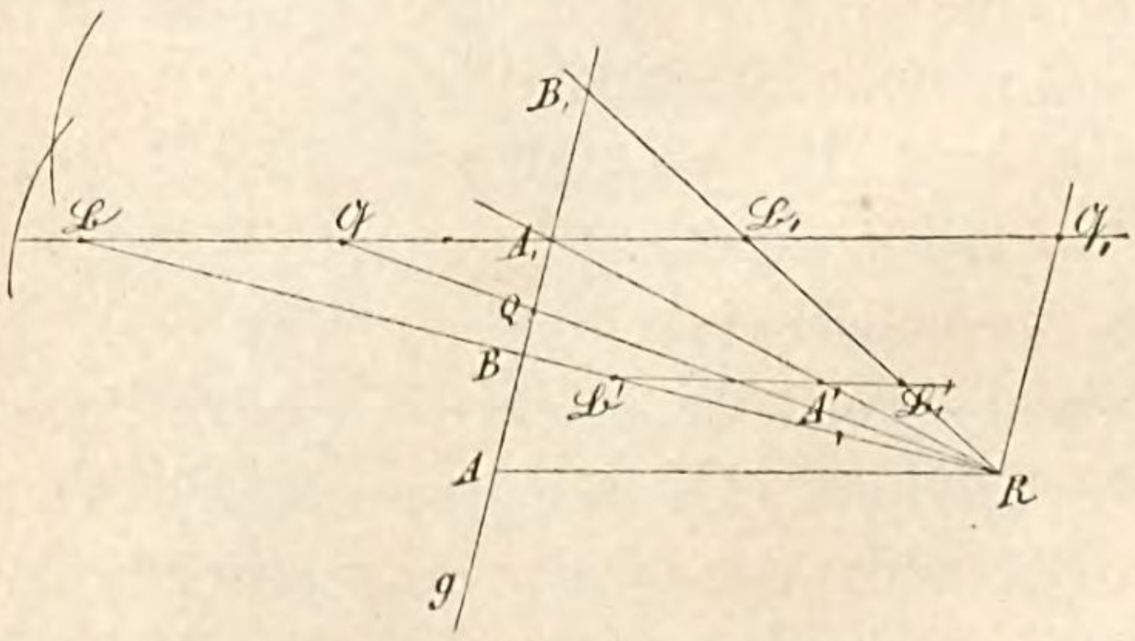


Fig. 16.

getroffen; $R\mathfrak{D}_1 \parallel g$. Dann ist aus ähnlichen Dreiecken

$$A_1\mathfrak{B} = \frac{A_1B}{AB}\cdot AR,\ A_1\mathfrak{B}_1 = \frac{A_1B_1}{AB_1}\cdot AR,$$

also

$$A_1\mathfrak{B}\cdot A_1\mathfrak{B}_1 = \frac{A_1B\cdot A_1B_1}{AB\cdot AB_1}AR^2$$

Aus $$AQ : BQ = B_1Q : A_1Q$$

folgt $$AQ - BQ : B_1Q - A_1Q = AQ : B_1Q$$

und $$AQ + B_1Q : BQ + A_1Q = AQ : BQ$$

oder $$AB : A_1B_1 = AQ : B_1Q$$

und $$AB_1 : A_1B = AQ : BQ,$$

also $$\frac{AB\cdot AB_1}{A_1B\cdot A_1B_1} = \frac{AQ^2}{BQ\cdot B_1Q}$$

und daher: $$A_1\mathfrak{B}\cdot A_1\mathfrak{B}_1 = \frac{BQ\cdot B_1Q}{AQ^2}\cdot AR^2$$

Da die rechte Seite konstant ist, so ist auch das Produkt $A_1\mathfrak{B}\ .\ A_1\mathfrak{B}_1$ konstant, d. h. die Punktpaare $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$, ... bilden eine Involution mit dem Centralpunkte A_1.

Zieht man auch zu $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$ eine beliebige Parallele, welche die Involutionsstrahlen in $\mathfrak{B}'\mathfrak{B}_1'$, $\mathfrak{C}'\mathfrak{C}_1'$, ... schneidet, so ist

$$A_1\mathfrak{B} : A_1'\mathfrak{B}' = A_1R : A_1'R$$

$$A_1\mathfrak{B}_1 : A_1'\mathfrak{B}_1' = A_1R : A_1'R,$$

also $$A_1'\mathfrak{B}'\cdot A_1'\mathfrak{B}_1' = \frac{A_1\mathfrak{B}\cdot A_1\mathfrak{B}_1\cdot A_1'R^2}{A_1R^2},$$

d. h. die Punktpaare $\mathfrak{B}'\mathfrak{B}_1'$, $\mathfrak{C}'\mathfrak{C}_1'$, ... bilden eine Involution mit dem Centralpunkte A_1'. Da also die Strahleninvolution jede zu einem ihrer Strahlen parallele Gerade in einer Punktinvolution trifft, so ist der Satz bewiesen.

Dieser zweite Beweis hat dem ersten gegenüber den Vorteil, dafs er ohne Benutzung der Eigenschaften der Kreisbüschel und konjugierten Punkte geführt ist.

42. Von den Aufgaben über Involutionen seien einige, die häufig vorkommen, aufgeführt:

a. *Von einer Punktinvolution kennt man zwei Punktpaare; man soll den Centralpunkt und die Doppelpunkte konstruieren.*

Sind AA_1 BB_1 zwei Punktpaare auf der Geraden g, so lege man durch jedes derselben einen Kreis; die Potenzlinie beider Kreise schneide g in Q. Ist dann $q^2 = QA\cdot QA_1$ so mache man $QM = QN = q$.

b. *Von einer Strahleninvolution kennt man zwei Strahlenpaare; man soll die Doppelstrahlen finden.*

Durch den Scheitel S der Strahlenpaare aa_1 und bb_1 lege man einen Kreis, welcher diese in AA_1 und BB_1 trifft, ziehe AA_1 und BB_1 bis zu ihrem Schnittpunkte J und von J die Tangenten JM und JN an den Kreis, so sind SM und SN die gesuchten Doppelstrahlen.

c. *Auf einer Geraden g liegen zwei Involutionen; man soll das beiden gemeinschaftliche Punktpaar konstruieren.*

Durch jede Involution und einen Punkt S ist ein Kreisbüschel bestimmt; aufser S seien S_1 und S_2 die Grundpunkte dieser Kreisbüschel. Beiden gemeinsam ist der durch SS_1S_2 bestimmte Kreis und dieser schneidet g in demjenigen Punktpaare, welches beiden Involutionen angehört.

d. *In einem Punkte S liegen zwei Strahleninvolutionen; man soll das gemeinsame Strahlenpaar ermitteln.*

Die Strahlenpaare jeder Involution schneiden einen Kreis, der durch den Scheitel gelegt ist, in solchen Punktpaaren, dafs die Verbindungslinien sich in einem Punkte schneiden. Man erhält also zwei solche Punkte J_1 und J_2, die Involutionscentra; die Verbindungslinie schneidet den Kreis in einem Punktpaare und die Verbindungslinien seiner Punkte mit dem Scheitel bilden das gemeinsame Strahlenpaar.

e. *Auf einer Geraden liegen eine Involution und ein Punktpaar; man soll dasjenige Punktpaar der Involution konstruieren, welches das gegebene harmonisch trennt.*

Alle Punktpaare, welche das gegebene harmonisch trennen, bilden eine Involution. 3c.

f. *Dasjenige Strahlenpaar einer Involution zu ermitteln, welches zwei gegebene Punkte harmonisch trennt.* e.

g. *Das rechtwinklige Strahlenpaar einer Involution zu ermitteln.*

Durch den Scheitel S der Involution lege man einen Kreis mit dem Mittelpunkte M, konstruiere das Involutionscentrum J, so schneidet die Gerade JM den Kreis in zwei Punkten, deren Verbindungslinien mit S das gesuchte Strahlenpaar bilden.

h. *In einer involutorischen Punktreihe diejenigen konjugierten Punkte zu bestimmen, welche von einem gegebenen Punkte P gleichweit entfernt sind.*

Von P schneide man $PA = PA_1$, $PB = PB_1$, ... ab, so bilden die Punktpaare AA_1, BB_1, ... eine Involution. Das Punktpaar, welches beiden Involutionen gemeinsam ist, liefert die gesuchten Punkte.

43. Ist p die Potenzlinie des Kreisbüschels (OO_1), so liegt der zu einem Punkte A derselben konjugierte Punkt A_1 bezüglich aller Kreise des Büschels wieder auf p. (34, 33a). Wenn A die Potenzlinie durchläuft, so durchläuft auch A_1 dieselbe; alle Punktpaare AA_1 bilden eine Involution. Hat das Büschel (OO_1) Grundpunkte, so sind dieselben die Doppelpunkte der Involution. Bei einem Büschel ohne Grundpunkte hat die Involution konjugierter Punkte auf dər Potenzlinie auch keine Doppelpunkte. Um jedoch eine allgemeine Fassung der Sätze zu ermöglichen, teilt man einer solchen Involution „*imaginäre Doppelpunkte*“ zu, welche daher auch als die imaginären Schnittpunkte der Kreise mit ihrer Potenzlinie anzusehen sind, denn jeder Punkt, dessen konjugierter bezüglich eines Kreises mit ihm zusammenfällt, liegt auf der Peripherie. Da aber zwei konjugierte Punkte die durch sie gelegte Kreissehne harmonisch trennen, so hat man auch den imaginären Doppelpunkten die Eigenschaft beizulegen, dafs sie jedes Punktpaar der Involution harmonisch trennen, in Übereinstimmung mit der in 8c. gegebenen Definition.

Mit P bezeichne man den Pol von p in Bezug auf den Kreis O. Wenn P aufserhalb des Kreises liegt, so sind die Schnittpunkte SS' von p mit O reell und PS, PS' sind die reellen Tangenten. Für den Fall, dafs P innerhalb und also p aufserhalb liegt, sollen die imaginären Verbindungslinien von P mit den imaginären Schnittpunkten von p und O „*die imaginären Kreistangenten*“ durch P heifsen. Wenn P mit dem Mittelpunkte O zusammenfällt, so heifsen seine Tangenten die „*Kreisasymptoten*“. Diese sind also (36a) die imaginären Doppelstrahlen der dem Punkte zugehörigen Involution solcher Strahlen, die in Bezug auf den Kreis konjugiert sind.

Die dem Mittelpunkt zugehörige Involution konjugierter Strahlen ist rechtwinklig d. h. je zwei konjugierte Strahlen stehen aufeinander senkrecht. Sie schneidet die unendlich ferne Gerade in der ihr zugehörigen Involution konjugierter Punkte,

durch deren imaginären Doppelpunkte also der Kreis gehen muſs. Und weil für jeden Kreis diese Involution dieselbe ist, so folgt:

a. *Alle Kreise der Ebene gehen durch feste imaginäre Punkte auf der unendlich fernen Geraden.* Diese Punkte heiſsen die „*Kreispunkte*“ der Ebene.

b. *Zwei konjugiert imaginäre Punkte liegen stets auf einer reellen Geraden; zwei konjugiert imaginäre Strahlen schneiden sich in einem reellen Punkte.*

Sind O und O_1 zwei sich nicht schneidende Kreise, so giebt es auf ihrer Centrale zwei Punkte Q und R, welche beide Kreisdurchmesser harmonisch teilen. In ihnen schneiden sich alle Kreise $MM_1M_2\ldots$, welche O und O_1 rechtwinklig schneiden; sie treffen die Potenzlinie p von OO_1 in einer Involution, welche aus den in Bezug auf O und O_1 konjugierten Punkten besteht. Die imaginären Doppelpunkte dieser Involution sind die imaginären Schnittpunkte von p mit O und O_1. Verbindet man Q und R mit den Punktpaaren dieser Involution, so erhält man zwei Strahleninvolutionen von der Eigenschaft, daſs je zwei konjugierte Strahlen auf einander senkrecht stehen. Die imaginären Doppelstrahlen qq_1 und rr_1 beider Involutionen schneiden demnach die Potenzlinie p, sowie g_∞ in den beiden imaginären Punktpaaren, in welchen diese Geraden von O und O_1 getroffen werden. Man hat demnach diese Doppelstrahlen qq_1 rr_1 als vier gemeinschaftliche imaginäre Sekanten der Kreise O und O_1 anzusehen. Es folgt:

c. *Zwei Kreise, die sich nicht in reellen Punkten schneiden, haben sechs gemeinschaftliche Sekanten, von denen zwei, die Potenzlinie und die unendlich ferne Gerade, reell und vier imaginär sind. Die letzteren sind paarweise konjugiert imaginär und schneiden sich in zwei reellen Punkten, nämlich in zwei Ecken des beiden Kreisen gemeinschaftlichen Poldreiecks.*

Die aus Q und R nach den imaginären Kreispunkten gezogenen imaginären Strahlen schneiden sich in zwei imaginären Punkten der Potenzlinie von O und O_1.

Es seien nun M und M_1 zwei Kreise mit den reellen Schnittpunkten Q und R, O und O_1 zwei diese rechtwinklig schneidende Kreise, so treffen sich die von Q und R nach den imaginären Kreispunkten gezogenen Geraden in den imagi-

nären Doppelpunkten derjenigen Involution, welche die Kreise des Büschels (MM_1) auf der Centrale bestimmen.

d. *Zwei Kreise M und M_1 die sich in reellen Punkten schneiden, haben demnach sechs gemeinschaftliche Sekanten, von denen zwei, die Potenzlinie und die unendlich ferne Gerade, reell und vier imaginär sind. Von diesen sind je zwei paarweise konjugiert imaginär; sie treffen sich in zwei imaginären Punkten der Centrale. Von dem Poldreiecke der Kreise MM_1 ist also nur eine Ecke reell, die beiden anderen sind imaginär.*

Zur Begründung des Ausdrucks imaginär dient Folgendes. Es ist, Fig. 11a und b, das Produkt $QA \cdot QA_1$ konstant gleich $QO \cdot QP$. Dieses Produkt $QO \cdot QP$ heifst die *Potenz* der Involution $AA_1 \ldots$ mit dem Centralpunkte Q. Sie sei gleich q^2. Wenn A und A_1 auf einer Seite von Q liegen, so haben die Strecken QA und QA_1 gleiches Zeichen und die Potenz q^2 ist positiv; wenn aber (Fig. 11b) A und A_1 auf entgegengesetzten Seiten von Q liegen, so haben die Strecken QA und QA_1 entgegengesetzte Zeichen und die Potenz q^2 ist negativ. Man hat also entweder

$$q^2 = + QO \cdot QP \text{ und } q = \sqrt{+ QO \cdot QP}$$

oder $$q^2 = - QO \cdot QP \text{ und } q = \sqrt{- QO \cdot QP}$$

und es ist q reell oder imaginär. Da im ersten Falle $QM^2 = q^2$, so kann man auch im zweiten Falle sagen, dafs die imaginären Schnittpunkte des Kreises und der Geraden p erhalten werden, wenn man die imaginäre Strecke q von Q aus nach beiden Seiten auf p abträgt.

44. *Der imaginäre Kreis.*

Auf einer Geraden g durch den festen Punkt O denke man sich eine Involution mit dem Centralpunkte O, die imaginäre Doppelpunkte hat. Sind A und A_1 zwei zugeordnete Punkte, so haben die Strecken OA und OA_1 entgegengesetzte Richtung und das Produkt $OA \cdot OA_1$ ist negativ. Man setze $OA \cdot OA_1 = - r^2$. Beschreibt man mit $\sqrt{- r^2}$ um O einen Kreis, so erhält man *einen imaginären Kreis mit reellem Mittelpunkte und rein imaginärem Radius.* In Bezug auf diesen Kreis nennt man auch A und A_1 harmonische Pole und die Senkrechte in einem die Polare des anderen. Dem Punkte A sind

alle Punkte seiner Polare a und der Geraden a alle Geraden durch ihren Pol A *konjugiert.*

Ist B_1 ein beliebiger Punkt der Polare a von A, die also durch A_1 geht und auf OA_1 senkrecht steht und fällt man $AB \perp OB_1$, so ist

$$\triangle OAB \sim OA_1B_1, \text{ also } OB \cdot OB_1 = OA \cdot OA_1 = -r^2.$$

Mithin sind BB_1 harmonische Pole und AB ist die Polare von B_1. Da aber $\sphericalangle ABO = 90^0$ ist, so folgt:

Durchläuft ein Punkt eine Gerade, so durchläuft sein harmonischer Pol in Bezug auf einen reellen oder imaginären Kreis einen Kreis und seine Polare dreht sich um den Pol der Geraden.

Die Gesamtheit aller Paare von harmonischen Polen und von Pol und Polare heifst auch in diesem Falle ein *cyklisches Polarsystem.* Man unterscheidet zwei Arten solcher cyklischen Polarsysteme, wie zwei Arten der Involution, je nachdem die auf irgend einem Durchmesser liegende Involution der harmonischen Pole reelle oder imaginäre Doppelpunkte hat. Der Ort dieser Doppelpunkte heifst der *Kernkreis* des Polarsystem und ist im ersten Falle reell, im zweiten imaginär.

Unter der Potenz des imaginären Kreises O mit dem Radius $\sqrt{-r^2}$ in einem Punkte P versteht man die Gröfse $p^2 = OP^2 - \left(\sqrt{-r^2}\right)^2 = OP^2 + r^2$; der imaginäre Kreis hat also in jedem Punkte der Ebene positive Potenz. „Der Kreis, der mit p um P beschrieben wird, schneidet den imaginären Kreis rechtwinklig.“ Scheidet dieser den Durchmesser OP in CC_1, so ist

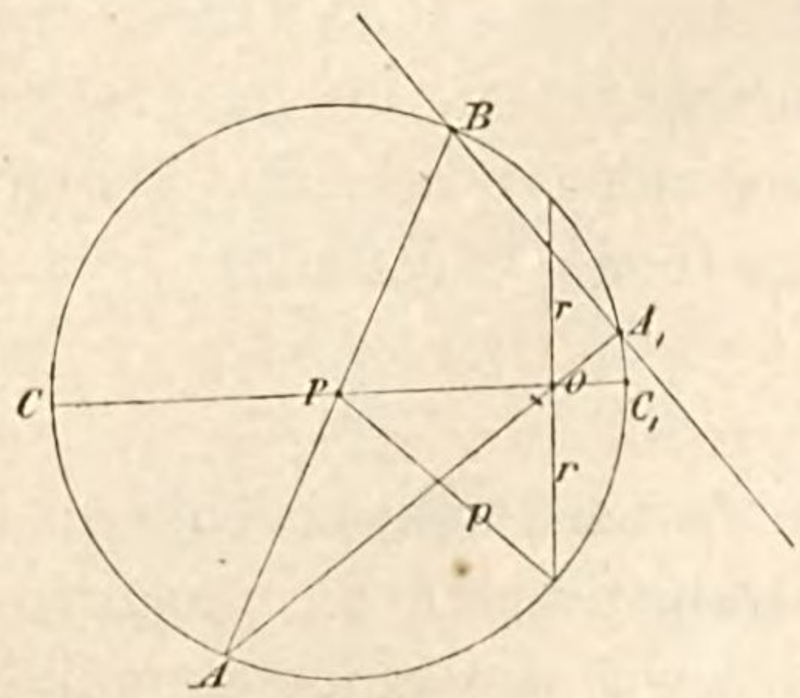


Fig. 17.

$$OC \cdot OC_1 = (OP + CP) \cdot (OP - CP) = OP^2 - CP^2 = -r^2,$$

also sind C und C_1 harmonische Pole. Umgekehrt schneidet jeder über dem Abstande zweier harmonischen Pole als Durchmesser gezeichnete Kreis den Kreis O rechtwinklig. — Auch wenn man durch zwei harmonische Pole AA_1 einen beliebigen Kreis P legt, so mufs er O rechtwinklig schneiden. Denn trifft

PO den Kreis M in CC_1, so ist $OA \cdot OA_1 = OC \cdot OC_1 = -r^2$, also sind CC_1 harmonische Pole.

45. AB sei ein beliebiger Durchmesser des Kreises P; man schneide diesen Kreis mit AO in A_1 dann ist $AO \cdot A_1O = CO \cdot C_1O = -r^2$, also sind AA_1 harmonische Pole bezüglich des Kreises O und da $A_1B \perp AA_1$ ist, so ist A_1B die Polare von A und AB sind konjugierte Punkte. — Also:

a. *Wenn ein reeller Kreis einen imaginären rechtwinklig schneidet, so sind die Endpunkte eines Durchmessers des ersteren konjugierte Punkte bezüglich des anderen. — Jeder Kreis, welcher durch zwei harmonische Pole eines imaginären Kreises oder über der Entfernung zweier konjugierten Punkte als Durchmesser konstruiert wird, schneidet diesen rechtwinklig.*

Zwei imaginäre Kreise mit den Mittelpunkten O und O_1 haben die Radien $\sqrt{-r^2}$ und $\sqrt{-r_1^2}$. Soll ein Punkt P ein Potenzpunkt beider sein, so muſs $OP^2 + r^2 = O_1P^2 + r_1^2$, also $OP^2 - O_1P^2 = -(r^2 - r_1^2)$ sein. Fällt man $PR' \perp OO_1$, so ist $OP^2 - O_1P^2 = OR'^2 - O_1R'^2$ und wenn S ein beliebiger Punkt dieser Senkrechten p' ist, so ist auch $OS^2 - O_1S^2 = OR'^2 - O_1R'^2 = -(r^2 - r_1^2)$ und jeder Punkt von p' ist ein Potenzpunkt, p' selbst die Potenzlinie beider Kreise. Hieraus folgt:

b. *Der Ort aller Potenzpunkte zweier imaginären Kreise ist eine Gerade, die Potenzlinie der Kreise; sie steht auf der Centrale senkrecht.*

46. Zwei reelle Kreise M und M_1 schneiden sich in den reellen Punkten A und B; die gemeinschaftliche Sekante ist die Potenzlinie. Um die aufserhalb der Kreise liegenden Punkte O derselben, welche die positive Potenz $OA \cdot OB$ haben, lassen sich reelle Kreise zeichnen, welche M und M_1 rechtwinklig schneiden; die innerhalb der Kreise M und M_1 liegenden Potenzpunkte O haben die negative Potenz $-OA \cdot OB$. Daher lassen sich um letztere keine reellen rechtwinklig schneidenden Kreise konstruieren. Ist r die halbe kleinste Sehne durch O in einem der beiden Kreise, so ist $OA \cdot OB = -r^2$ und der mit $\sqrt{-r^2}$ um O konstruierte imaginäre Kreis schneidet M und M_1 rechtwinklig. Beschreibt man aber mit r um

O einen Kreis, so sind seine gemeinschaftlichen Sehnen mit den Kreisen M und M_1 Durchmesser von ihm; er wird von M und M_1 *unter dem Durchmesser* geschnitten. Also:

Soll man die Potenzlinie der imaginären Kreise O und O_1 mit den Radien $\sqrt{-r^2}$ und $\sqrt{-r_1^2}$, konstruieren, so beschreibe man um O und O_1 Kreise mit r und r_1 und konstruiere den Ort der Mittelpunkte derjenigen Kreise, welche die letzteren unter dem Durchmesser schneiden.

47. Man konstruiere die Potenzlinie p der reellen mit r und r_1 beschriebenen Kreise O und O_1, ziehe durch einen beliebigen Punkt B von p die Durchmesser CD und C_1D_1, so

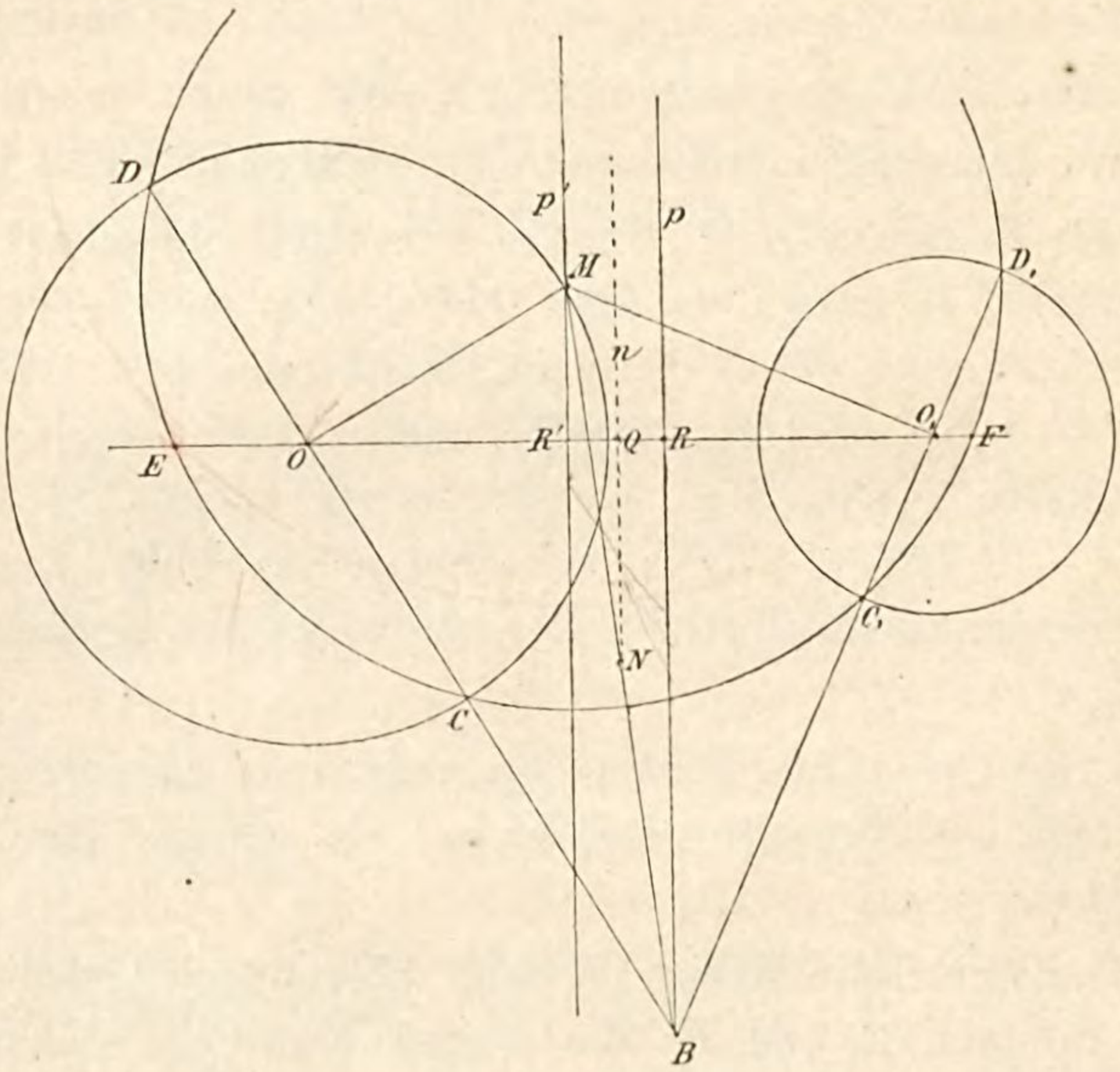


Fig. 18.

müssen CDC_1D_1 auf einem Kreise liegen, da $BC \cdot BD = BC_1 \cdot BD_1$ ist. Sein Mittelpunkt M liegt in dem Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von CD und C_1D_1, also ist $BOMO_1$ ein Kreisviereck und durch seine Ecken läfst sich ein Kreis legen, dessen Mittelpunkt N auf BM liegen mufs. Fällt man $NQ \perp OO_1$, so ist $OQ = O_1Q$ folglich liegt N auf der Mittelsenkrechten n von OO_1. Fällt man von M die Gerade p' senkrecht auf OO_1, so ist n die Mittellinie von pp'. Der Kreis N schneidet aber O und O_1 unter dem Durchmesser. Also:

a. *Die Mittelpunkte aller Kreise, welche zwei andere unter dem Durchmesser oder zwei imaginäre Kreise rechtwinklig schneiden, liegen auf einer Geraden p'.*

Sind M und M_1 zwei dieser Kreise, so sind O und O_1 Potenzpunkte für beide, also müfsen sie sich in zwei festen Punkten der Centrale schneiden; die Mittelsenkrechte dieser Punkte ist p'. Es folgt:

b. *Alle Kreise, welche zwei imaginäre Kreise rechtwinklig oder zwei reelle Kreise unter dem Durchmesser schneiden, treffen sich in zwei festen Punkten der Centrale.*

48. Die Gerade p' nennt man den *zweiten Potenzort* der Kreise O und O_1. Seinen Schnittpunkt R' mit der Centrale findet man, indem man diese in Q halbiert, ihren Schnittpunkt R mit der Potenzlinie bestimmt und $QR' = QR$ macht.

Die drei zweiten Potenzörter dreier Kreise schneiden sich in einem Punkte — oder — *die drei Potenzlinien dreier imaginären Kreise schneiden sich in einem Punkte.*

Denn der Schnittpunkt von zwei Potenzlinien ist ein Potenzpunkt aller drei Kreise.

49. Es seien jetzt O ein reeller, O_1 ein imaginärer Kreis mit den Radien r und $\sqrt{-r_1^2}$. Ein Punkt P ist ein Potenzpunkt beider, wenn $OP^2 - r^2 = O_1P^2 + r_1^2$, also $OP^2 - O_1P^2 = r^2 + r_1^2$ ist. Man fälle $PR'' \perp OO_1$, dann ist $OP^2 - O_1P^2 = OR''^2 - O_1R''^2$ und wenn S ein beliebiger Punkt dieser Senkrechten p'' ist, so ist auch $OS^2 - O_1S^2 = OR''^2 - O_1R''^2 = r^2 + r_1^2$. Also ist jeder Punkt von p'' ein Potenzpunkt der Kreise OO_1.

Man gelangt zur Geraden p'' auf folgendem Wege. Um O_1 denke man sich wieder einen reellen Kreis mit dem Radius r_1 und zwei Kreise MM_1 konstruiert, welche O rechtwinklig und diesen reellen Kreis O_1 unter dem Durchmesser schneiden. Die Kreise M und M_1 müssen die Centrale OO_1 schneiden, die Punkte O und O_1 sind aber Potenzpunkte der Kreise MM_1, also ist OO_1 die Potenzlinie von MM_1. Daher müssen alle Kreise M sich in zwei festen Punkten EF der Centrale OO_1 schneiden und ihre Mittelpunkte liegen auf der Mittelsenkrechten p'' von EF.

Um sie zu konstruieren, errichte man den zu OO_1 senkrechten Durchmesser A_1B_1 des Kreises O_1, ziehe von A_1 die Tangente A_1A an den Kreis O, halbiere AA_1 in C und fälle von C die Senkrechte auf A_1O_1, so trifft sie die Centrale O_1O_2 in ihrem Schnittpunkte mit der Geraden p'', denn sie ist die Potenzlinie des Kreises O_1 und des Punktes A_1. Die Gerade p'' erhält auch den Namen *dritter Potenzort* der Kreise OO_1. Also:

a. *Alle Kreise, welche einen reellen und einen imaginären Kreis rechtwinklig oder einen von zwei reellen Kreisen rechtwinklig und den anderen unter dem Durchmesser schneiden, treffen sich in zwei festen Punkten der Centrale.*

b. *Für drei gegebene Kreise $O_1O_2O_3$ schneiden sich immer je zwei dritte und ein erster oder zweiter Potenzort in einem Punkte* — oder *die Potenzlinien dreier Kreise, von denen zwei reell und einer imaginär oder einer reell und zwei imaginär sind, schneiden sich in einem Punkte.*

50. Der Begriff des cyklischen Polarsystems umfafst sowohl den reellen wie den imaginären Kreis. Der Kürze wegen soll mit dem Worte Kreis fortan sowohl der reelle wie der imaginäre Kreis bezeichnet werden, dadurch erlangt man den Vorteil, den Wortlaut gewisser Definitionen und Sätze die für den Fall reeller Kreise aufgestellt sind, sofort auf imaginäre Kreise übertragen zu können.

Man nennt die Gesamtheit aller Kreise, welche dieselbe Potenzlinie haben, ein Kreisbüschel. In jedem Kreisbüschel giebt es gleichviel reelle und imaginäre Kreise, da jeder Punkt der Centrale sowohl Mittelpunkt eines reellen als Mittelpunkt eines imaginären Kreises des Büschels ist. Denselben Punkt bezeichne man mit M oder $\mathfrak{M}$, je nachdem er Mittelpunkt eines reellen oder imaginären Kreises ist. Alle Kreise, welche zwei Kreise eines Büschels und demnach sämtliche Kreise desselben rechtwinklig schneiden, bilden wieder ein Büschel, dessen Potenzlinie die Centrale des ersten ist, da jeder Punkt der Centrale ein Potenzpunkt aller rechtwinklig schneidenden Kreise ist. Das zweite Büschel heifst dem ersten konjugiert.

51. *Die Polaren eines Punktes G in Bezug auf alle Kreise eines Büschels schneiden sich in einem Punkte.*

Durch den Punkt G geht ein einziger Kreis O des kon-

jugierten Büschels; durch den zweiten Endpunkt seines Durchmessers GG' gehen die Polaren von G bezüglich aller Kreise des Büschels, da G und G' nach einem obigen Satze (45a.) konjugierte Punkte in Bezug auf jeden Kreis dieses Büschels sind.

§ 5.

Die Ähnlichkeitspunkte.

52. *Ähnlichkeitspunkte* zweier Kreise sind diejenigen Punkte, welche die Centrale im Verhältnisse der Radien harmonisch teilen. Derjenige von ihnen, welcher auf der Centrale selbst liegt, heifst der *innere*, der andere der *äufsere* Ähnlichkeitspunkt.

Die Ähnlichkeitspunkte sind daher die Schnittpunkte der gemeinschaftlichen äufseren oder inneren Tangenten (3), denn die Radien nach den Berührungspunkten sind parallel.

Jede Gerade durch einen der Ähnlichkeitspunkte, welche die Kreise trifft, mufs sie in solchen Punktpaaren schneiden, dafs ihre Radien paarweise parallel sind (3), denn es giebt aufser den Ähnlichkeitspunkten keine Punkte, welche die Centrale im Verhältnisse der Radien teilen. (3.)

53. *Die Inversion.*

Durch den Ähnlichkeitspunkt A zweier Kreise O_1 und O_2 ziehe man eine Gerade, welche den Kreisen in $C_1 D_1$ und $C_2 D_2$ begegnet. Da $O_1 C_1 \parallel O_2 C_2$, $O_1 D_1 \parallel O_2 D_2$, so ist auch $A_1 C_1 \parallel A_2 C_2$ und $B_1 D_1 \parallel B_2 D_2$ und weil $A_1 B_1 D_1 C_1$ ein Kreisviereck ist, so müssen auch $A_1 B_2 D_2 C_1$ und $B_1 A_2 C_2 D_1$ Kreisvierecke sein, denn sie haben parallele Seiten, also gleiche Winkel. Zieht man noch eine gemeinschaftliche Tangente durch A, welche in E_1 und E_2 berührt, so müssen auch $A_1 E_1 E_2 B_2$ und $B_1 E_1 E_2 A_2$ Kreisvierecke sein, also ist $AA_1 . AB_2 = AB_1 . AA_2 = AC_1 . AD_2 = AE_1 . AE_2$ konstant. Dieses konstante Produkt heifst die *Potenz* des Ähnlichkeitspunkts.

Fig. 19.

Eine Gerade durch einen Ähnlichkeitspunkt heifst ein „*Ähnlichkeitsstrahl*“; zwei Punkte eines solchen, wie A_1 und B_2, D_1 und C_2, deren Abstände vom Ähnlichkeitspunkte ein konstantes Produkt liefern, heifsen „*inverse Punkte*“.

Verwandelt man die Potenz des Ähnlichkeitspunktes A

in das Quadrat a^2 und beschreibt mit a um A einen Kreis, so heifst dieser der *„äufsere Potenzkreis“*. In gleicher Weise findet man einen *„inneren Potenzkreis“*.

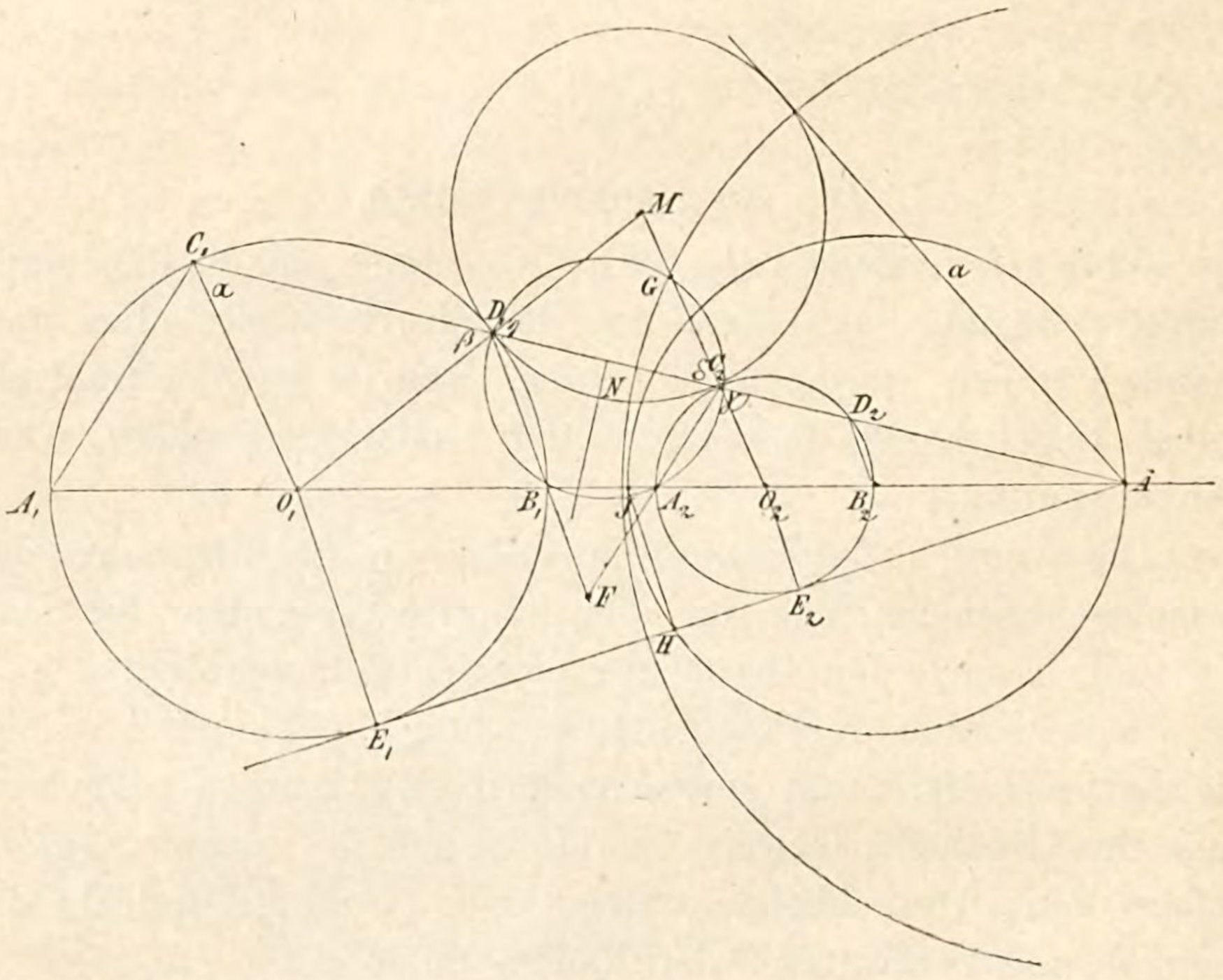


Fig. 19.

Wie man aus den beiden Kreisen O_1 und O_2 den Potenzkreis A konstruieren kann, so läfst sich auch aus dem Kreise A und einem der Kreise $O_1 O_2$ der andere finden. — Nennt man nämlich den Radius des Potenzkreises a, und nimmt auf dem Kreise O_1 drei beliebige Punkte $A_1 B_1 C_1$, so lassen sich auf den Geraden AA_1, AB_1, AC_1 drei Punkte $A_2 B_2 D_2$ mittelst der Gleichungen

$$a^2 = AA_1 \,.\, AB_2 = AB_1 \,.\, AA_2 = AC_1 \,.\, AD_2$$

konstruieren. Diese bestimmen einen Kreis O_2'. Der äufsere Potenzkreis beider ist aber A, also mufs O_2' mit O_2 zusammenfallen.

In gleicher Weise existiert zu jedem beliebigen Kreise M_1 ein anderer M_2 von der Lage, dafs ihr äufserer Potenzkreis der Kreis A ist. Solche zwei Kreise haben also A als äufseren Ahnlichkeitspunkt; sie heifsen *inverse Kreise* für den

Kreis A und je zwei Punkte auf einer Geraden durch A, deren Abstände von A das konstante Produkt r^2 haben, heifsen *inverse Punkte* für den Kreis A.

Die Beziehung, in welche dadurch irgend zwei Punkte der Ebene gebracht sind, heifst *Inversion*; der Punkt A heifst das *Inversionscentrum*; das Radiusquadrat r^2 heifst die *Inversionspotenz*.

Aus dem Vorigen folgt sofort:

a. *Durchläuft ein Punkt einen Kreis, so durchläuft der inverse Punkt auch einen Kreis* oder

Die inverse Figur eines Kreises ist wieder ein Kreis; das Inversionscentrum ist ein Ahnlichkeitspunkt beider Kreise.

b. *Die Schnittpunkte inverser Kreise liegen auf dem Potenzkreise.*

Denn im Schnittpunkte zweier Kreise fallen zwei inverse Punkte zusammen.

c. *Die inverse Figur eines Kreises, welcher durch das Inversionscentrum geht, ist eine Gerade und umgekehrt.*

Denn der inverse Punkt zum Inversionscentrum mufs im Unendlichen liegen, weil $r^2 = o \,.\, \infty$ sein mufs; der inverse Kreis hat also einen unendlich fernen Punkt und degeneriert in eine Gerade.

Auch in folgender Weise ergiebt sich der Beweis. In den Schnittpunkten A_{12} und B_{12} der beiden Kreise A und O_1 fallen je zwei inverse Punkte zusammen. Die auf $A_{12}B_{12}$ senkrechte Centrale AO_1 schneidet diese Gerade in C_2 und den Kreis O_1 in C_1; ferner treffe eine beliebige Gerade diesen Kreis in D_1 und die gemeinschaftliche Sehne in D_2, dann ist $\sphericalangle A A_{12} C_1 = 90^0$ und $C_1 D_1 D_2 C_2$ ein Kreisviereck, also

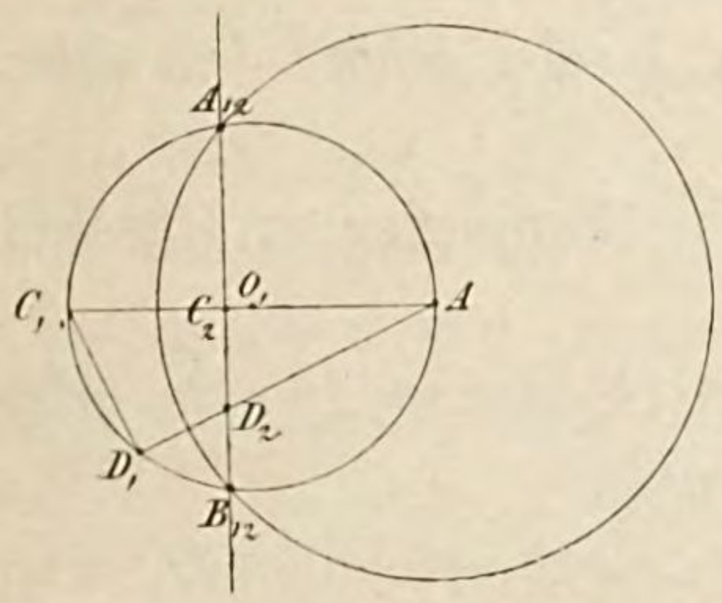


Fig. 19a.

$$AA_{12}{}^2 = AC_1 \,.\, AC_2 = AD_1 \,.\, AD_2.$$

Der Kreis O_1 und die Gerade $A_{12}B_{12}$ sind also inverse Figuren. Da A als Ähnlichkeitspunkt beider anzusehen ist, so ergiebt sich:

d. *Die Ähnlichkeitspunkte einer Geraden und eines Kreises sind die Schnittpunkte des letzteren mit der Geraden, welche aus seinem Mittelpunkte auf die erste senkrecht gefällt ist.* (Cf. 44.)

Die Eigenschaften der Inversion werden sich später in anderer Form nochmals ergeben. Cf. §. 6. — Man hat die Inversion auch *„Princip der reciproken Radien“* genannt.

Fig. 19.

54. Aus $\beta = \alpha = \gamma$, $\beta = \eta$, $\gamma = \delta$ folgt $\eta = \delta$ und $MD_1 = MC_2$, d. h.

a. *In zwei inversen Punkten zweier Kreise werden diese von einem dritten berührt und umgekehrt.*

Durch zwei Paar inverser Punkte z. B. $D_1 C_2 B_1 A_2$ läfst sich ein Kreis N legen. Weil $\beta = \gamma = \eta = \delta$, so ist auch $\sphericalangle O_1 D_1 C_2 = O_2 C_2 D_1$ und weil $\sphericalangle N D_1 C_2 = N C_2 D_1$ ist, so mufs auch $\sphericalangle O_1 D_1 N = O_2 C_2 N$ sein. Daraus folgt:

b. *Jeder Kreis, welcher durch zwei Paar inverser Punkte zweier anderen gelegt wird, schneidet diese unter gleichen Winkeln.*

c. *Jeder Kreis, welcher zwei andere unter gleichen Winkeln schneidet, trifft diese in zwei Paaren inverser Punkte.*

Denn ist N ein Kreis, der O_1 und O_2 unter gleichen Winkeln schneidet, ist also $\sphericalangle O_1 D_1 N = O_2 C_2 N$, so mufs auch $O_1 D_1 C_2 = O_2 C_2 D_1$ sein, weil $N D_1 C_2 = N C_2 D_1$ ist. Daher ist auch $\eta = \delta$, woraus sich leicht $O_1 C_1 \parallel O_2 C_2$ ergiebt.

55. a. *Jeder Kreis, welcher zwei andere unter gleichen Winkeln schneidet, schneidet ihren äufseren Potenzkreis rechtwinklig.*

Denn $AB_1 : AA_2 = AD_1 \,.\, AC_2 = a^2$.

b. *Der äufsere Potenzkreis zweier Kreise gehört dem durch diese bestimmten Büschel an.*

Denn er schneidet alle Kreise des konjugierten Büschels wegen a. rechtwinklig.

c. *Jeder Kreis, welcher durch zwei inverse Punkte gelegt wird, geht noch durch zwei inverse Punkte.*

Denn ist ein Kreis durch $C_1 D_2$ gelegt, welcher O_1 noch in B_1 schneidet, so mufs er durch A_2 gehen, da $AC_1 \,.\, AD_2 = AB_1 \,.\, AA_2$ ist.

d. *Jeder Kreis, welcher den äufseren Potenzkreis zweier Kreise $O_1 O_2$ rechtwinklig schneidet, geht durch zwei Paar in-*

---

*) Für die Lage der Kreise wird hier und im Folgenden die Voraussetzung gemacht, dafs dieselben mindestens zwei reelle gemeinschaftliche Tangenten haben; anderen Falles vertauscht der äufsere Potenzkreis seine Bedeutung mit dem inneren.

verser Punkte' und schneidet daher O_1 und O_2 unter gleichen Winkeln.

Der Kreis N schneide den Potenzkreis A rechtwinklig; er treffe O_1 und O_2 in $B_1 D_1 A_2 C_2$. Ginge AC_2 nicht durch D_1, sondern schnitte es die Kreise N und O_1 in X und Y, so müsste $a^2 = AC_2 \,.\, AX$, weil N und A sich rechtwinklig schneiden und auch $a^2 = AC_2 \,.\, AY$ sein, wegen 53. Also müssen X und Y mit D_1 zusammenfallen.

e. *Die Verbindungslinien von zwei Paaren inverser Punkte schneiden sich auf der Potenzlinie.*

Denn $FB_1 \,.\, FD_1 = FA_2 \,.\, FC_2$.

56. *Beschreibt man über der Entfernung der Ähnlichkeitspunkte zweier Kreise als Durchmesser einen Kreis, so gehört er dem durch jene bestimmten Büschel an.*

Da $O_1 O_2 J A$ (Fig. 19) harmonisch sind, so müssen auch $E_1 E_2 H A$ harmonisch sein, denn $O_1 E_1 \parallel O_2 E_2 \parallel JH$. Alle Kreise des Büschels $(O_1 O_2)$ teilen aber die Strecke $E_1 E_2$ harmonisch, denn E_1 und E_2 sind die Doppelpunkte der durch das Büschel auf der gemeinsamen Tangente hervorgerufenen Involution. Also gehört der Kreis über AJ zu den Kreisen des Büschels.

57. Man findet den Radius des inneren Potenzkreises J der Kreise O_1 und O_2, wenn man durch zwei Paar von Punkten, die bezüglich des inneren Ähnlichkeitspunktes invers sind, einen Kreis N legt, und in diesem die halbe kürzeste Sehne konstruiert. Hieraus folgt, dafs der Kreis J von dem Kreise N *unter dem Durchmesser* geschnitten wird, d. h. die gemeinschaftliche Sehne beider Kreise geht durch den Mittelpunkt J des einen. Der Kreis N schneidet die Kreise O_1 und O_2 unter Winkeln, die sich zu 180^0 ergänzen. Ebenso läfst sich zeigen, dafs jeder Kreis, welcher O_1 und O_2 unter Winkeln schneidet, die sich zu 180^0 ergänzen, durch zwei Paar bezüglich J inverser Punkte geht und daher den inneren Potenzkreis unter dem Durchmesser schneidet. Auch umgekehrt folgt, dafs jeder Kreis, welcher den inneren Potenzkreis unter dem Durchmesser schneidet, die Kreise O_1 und O_2 unter Supplementwinkeln schneidet.

Beweise wie in 54 und 55.

58. *Von den sechs Ähnlichkeitspunkten dreier Kreise liegen viermal drei in einer Geraden.* Diese Geraden heifsen die vier *Ähnlichkeitsaxen* der drei Kreise.

$O_1 O_2 O_3$ seien drei Kreise, $A_{12} J_{12} A_{13} J_{13} A_{23} J_{23}$ ihre Ähnlichkeitspunkte. Man verbinde A_{12} mit A_{23}, ziehe $O_2 B_2 \parallel O_1 O_3$

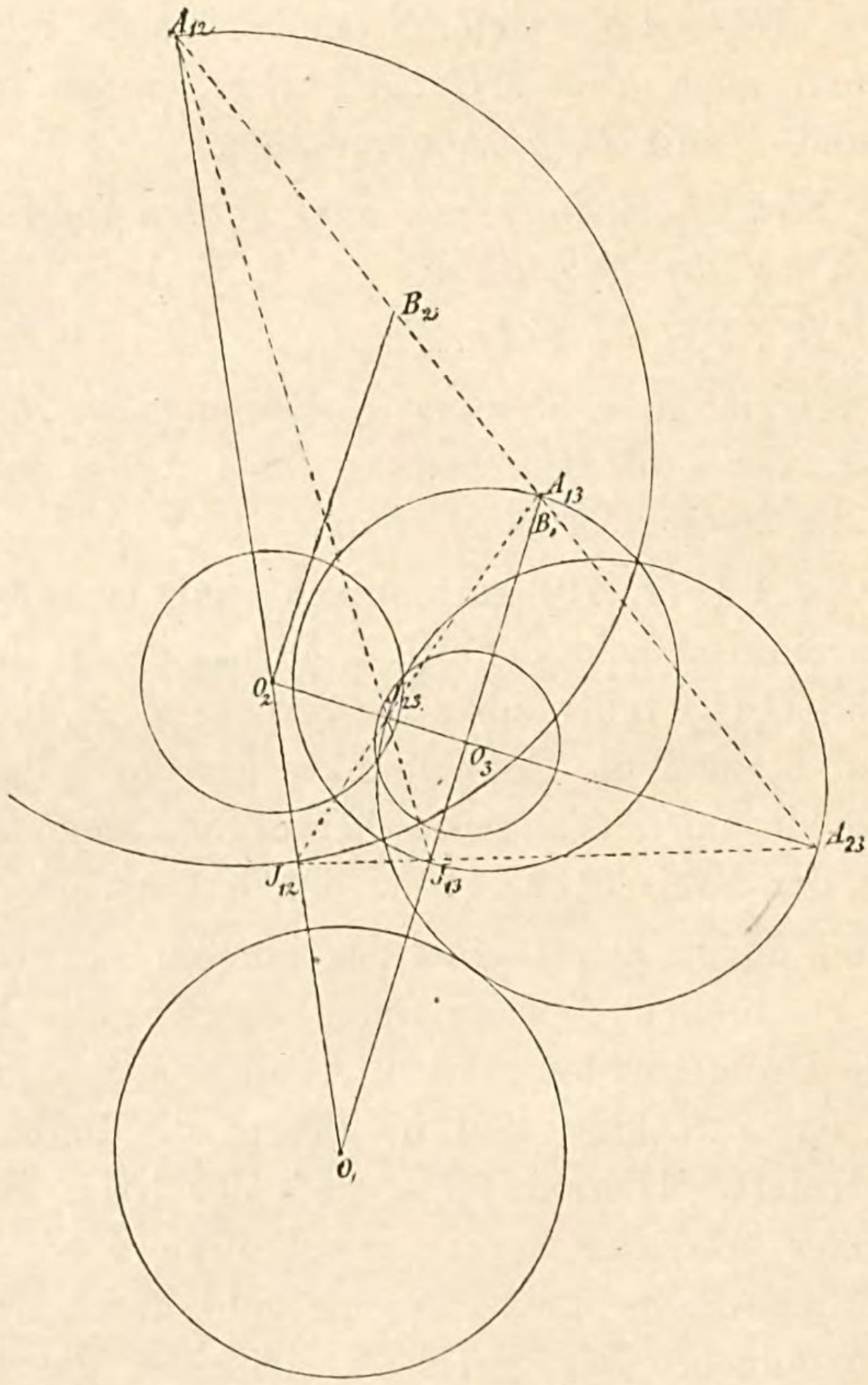


Fig. 20.

und $O_1 O_3$ bis zum Durchschnitte B_1 mit $A_{12} A_{23}$. Bezeichnet man die Radien mit $r_1 r_2 r_3$, so ist

$$O_2 B_2 : O_3 B_1 = O_2 A_{23} : O_3 A_{23} = r_2 : r_3$$
$$O_1 B_1 : O_2 B_2 = O_1 A_{12} : O_2 A_{12} = r_1 : r_2,$$

also $$O_1 B_1 : O_3 B_3 = r_1 : r_3,$$

d. h. B_1 ist der äufsere Ähnlichkeitspunkt von O_1 und O_3. Demnach liegen in einer Geraden

$$A_{12}\,A_{23}\,A_{31}$$

und ebenso $J_{12}\,J_{23}\,A_{31}$

$$A_{12}\,J_{23}\,J_{31}$$

$$J_{12}\,A_{23}\,J_{31}$$

58 a. Die sechs Ecken eines vollständigen Vierseits kann man auf unendlich viele Arten als die sechs Ähnlichkeitspunkte von drei Kreisen ansehen. Sind nämlich $ABCDEF$ die sechs Ecken eines vollständigen Vierseits und man beschreibt um die drei Diagonalpunkte GHJ desselben Kreise mit ihren Abständen von einer Seite z. B. AD, so sind

A und C die Ähnlichkeitspunkte von G und H,
B „ D „ „ „ G „ J,
E „ F „ „ „ J „ H

Die Kreise über AC, BD, EF als Durchmesser gehören (56) bezüglich den Büscheln (GH), (GJ), (JH) an und schneiden daher den Orthogonalkreis von GHJ rechtwinklig. Sie müssen aber auch (27 b) den durch GHF gelegten Kreis rechtwinklig schneiden und gehören daher zu einem Büschel (33). Ihre Mittelpunkte, die Halbierungspunkte der Diagonalen AC, BD, EF liegen also auf einer Geraden: es folgt:

Der Gauſs-Bodenmiller'sche Satz:

Die Kreise über den drei Diagonalen eines vollständigen Vierseits gehören einem Büschel an; die Halbierungspunkte der drei Diagonalen liegen auf einer Geraden.

Wenn diese drei Kreise sich schneiden, so erscheinen jedem Schnittpunkte die drei Diagonalen unter rechten Winkeln.

Demnach sind auch die drei Kreise über $A_{12}J_{12}$, $A_{13}J_{13}$, $A_{23}J_{23}$ Kreise eines Büschels.

59. Der Potenzkreis A_{12} gehört (55 b) dem Büschel (O_1O_2) an und schneidet daher den Orthogonalkreis von $O_1O_2O_3$ rechtwinklig; da dasselbe von den Potenzkreisen $A_{23}A_{13}$ gilt und die Mittelpunkte auf einer Geraden liegen (59), so gehören die drei äuſseren Potenzkreise einem Büschel an. Die Kreise des konjugierten Büschels müssen (55 d) die Kreise $O_1O_2O_3$ unter gleichen Winkeln schneiden. Also:

a. *Alle Kreise, welche drei andere unter gleichen Winkeln*

schneiden, bilden ein Büschel, dessen Centrale die Potenzlinie des Büschels der äufseren Potenzkreise ist.

Aus diesem Satze folgt:

b. *Jeder Kreis eines Büschels schneidet alle Kreise, welche zwei Kreise des Büschels gleichartig berühren, unter gleichen Winkeln.*

Doch läfst sich derselbe auch in folgender Art direkt beweisen.

O_1 und O_2 seien die Mittelpunkte zweier Kreise, welche von einem Kreise M in B_1 und B_2, und um einen bestimmten Fall anzunehmen, gleichartig berührt werden, so dafs B_1B_2 durch den äufsern Ähnlichkeitspunkt A_{12} geht. Eine gemeinschaftliche Tangente t durch A_{12} berühre O_1 und O_2 in C_1 und C_2. Da B_1B_2 sowie C_1C_2 inverse Punktpaare sind, so liegen $B_1B_2C_1C_2$ auf einem Kreise. Ist P der Schnittpunkt der Geraden B_1C_1 und B_2C_2, so ist $PB_1 \,.\, PC_1 = PB_2 \,.\, PC_2$, also ist P ein Potenzpunkt von O_1 und O_2.

Ist Q der Schnittpunkt von B_1C_1 mit M, so folgt aus ähnlichen Dreiecken, dafs $O_1C_1 \parallel MQ$, also auch die gemeinschaftliche Tangente t parallel der Tangente in Q ist. Daher liegt Q auch im Durchschnitte von B_2C_2 mit M und fällt mit P zusammen.

Ein beliebiger Kreis O des Büschels (O_1O_2) schneide M in D und t in E. Denkt man sich durch B_1C_1D und B_2C_2D die Kreise M_1 und M_2 gelegt und PD gezogen, so müssen die Kreise OM_1M_2 sich noch in einem zweiten Punkte D_1 von PD schneiden, weil P ein Potenzpunkt der Kreise OO_1O_2 ist und deshalb $PB_1 \,.\, PC_1 = PB_2 \,.\, PC_2 = PD \,.\, PD_1$ ist.

B_1 und C_1 sowie B_2 und C_2 sind aber inverse Punkte des Kreises M und der Tangente t, wenn man letztere als Kreis betrachtet, also müssen M_1 und M_2 den Kreis M und die gemeinschaftliche Tangente t unter gleichen Winkeln schneiden, also auch letztere und die Tangente d an M in D, mithin liegen M_1 und M_2 auf der Halbierungslinie des Winkels (dt). Weil aber die Kreise OM_1M_2 durch dieselben beiden Punkte DD_1 gehen, so liegen ihre Mittelpunkte auf einer Geraden; also liegt O auf der Halbierungslinie des Winkels (dt) und der Kreis O schneidet die Geraden d und t,

also auch den Kreis M und die Gerade t unter gleichen Winkeln.

Einen anderen Beweis erhält man mittelst der Kreisverwandtschaft. Cf. 73.

60. Zu den drei Kreisen $O_1 O_2 O_3$ komme noch ein vierter O_4; man erhält noch drei äufsere Ähnlichkeitspunkte $A_{14} A_{24} A_{34}$, welche mit $A_{12} A_{23} A_{13}$ die sechs Ecken eines vollständigen Vierseits bilden (58). Es sei O der Schnittpunkt der Potenzlinien der beiden Büschel $(A_{12} A_{13} A_{23})$ und $(A_{12} A_{14} A_{24})$ äufserer Potenzkreise, so läfst sich um O ein Kreis beschreiben, der die fünf Kreise $A_{12} A_{13} A_{23} A_{14} A_{24}$ rechtwinklig und daher $O_1 O_2 O_3 O_4$ unter gleichen Winkeln schneidet. (55d.) Deshalb liegt O aber auch auf der Potenzlinie der Büschel der äufseren Potenzkreise $(A_{13} A_{14} A_{34})$ und $(A_{23} A_{24} A_{34})$. Es folgt:

Der Orthogonalkreis der sechs äufseren Potenzkreise von vier Kreisen schneidet diese unter gleichen Winkeln.

61. *Die Berührungskreise an drei gegebene Kreise.* (Problem des Apollonius.) Die Kreise des Büschels, welche drei andere $O_1 O_2 O_3$ unter gleichen Winkeln schneiden, treffen den einen O_1 in solchen Punkten, dafs ihre Verbindungslinien durch einen Punkt P gehen. (30.) Sind nämlich $K_1 K_2 K_3$ irgend drei Kreise jenes Büschels und ist p ihre Potenzlinie, so ist P das Potenzcentrum sowohl von $O_1 K_1 K_2$, als $O_1 K_1 K_3$, denn P liegt im Durchschnitt von p mit der Potenzlinie von $O_1 K_1$. Von P lege man an O_1 die beiden Tangenten $O_1 B$ und $O_1 C$, so müssen diejenigen Kreise des Büschels $(K_1 K_2)$, welche durch B und C gehen, den Kreis O_1 in diesen Punkten berühren. Wegen 59. müssen dieselben auch die Kreise O_2 und O_3 unter gleichen Winkeln schneiden, d. h. gleichartig berühren. *Hieraus folgt eine Konstruktion derjenigen beiden Kreise, welche drei andere gleichartig berühren.*

62. Die Ähnlichkeitspunkte $A_{12} J_{23} J_{13}$ der drei Kreise $O_1 O_2 O_3$ liegen (58) auf einer Geraden. Der Orthogonalkreis K von $O_1 O_2 O_3$ schneidet den äufseren Potenzkreis A_{12} rechtwinklig und die inneren Potenzkreise J_{23} und J_{13} unter dem Durchmesser. (57.) Alle Kreise, welche die beiden letzten unter dem Durchmesser schneiden, treffen die Centrale $J_{23} J_{13}$ in zwei festen Punkten P und Q (47). Durch diese geht

somit auch der Kreis K und da er den Kreis A_{12} rechtwinklig schneidet, so sind dieselben harmonische Pole in Bezug auf den letzteren und jeder durch sie gelegte Kreis schneidet A_{12} rechtwinklig (27 a). Daher läfst sich schliefsen, dafs alle durch P und Q gelegten Kreise den Kreis A_{12} rechtwinklig und die Kreise $I_{23}I_{13}$ unter dem Durchmesser, also auch O_1 und O_2 unter gleichen, O_1 und O_3 aber und O_2 und O_3 unter Supplementwinkeln schneiden.

Die beiden Kreise dieses Büschels, welche O_1 berühren, berühren auch O_2 und O_3 (59), aber O_1 und O_2 gleichartig, O_1 und O_3 sowie O_2 und O_3 ungleichartig.

Durch die beiden anderen inneren Ähnlichkeitsaxen $A_{13}J_{23}J_{12}$ und $A_{23}J_{13}J_{12}$ gelangt man zu zwei anderen Kreisbüscheln, von denen die Kreise des ersten O_1O_3 unter gleichen, O_1O_2 und O_2O_3 unter Supplementwinkeln, die des andern O_2O_3 unter gleichen, O_1O_2 und O_1O_3 unter Supplementwinkeln schneiden. In jedem dieser Büschel giebt es wieder zwei Kreise, welche $O_1O_2O_3$ berühren und zwar

entweder O_1O_3 gleichartig, O_1O_2 und O_3O_2 ungleichartig
oder O_2O_3 „ O_1O_2 „ O_{13} „

Im Ganzen ergeben sich 8 Berührungskreise von drei Kreisen $O_1O_2O_3$.

63. Zu den drei Kreisen komme ein vierter O_4; man erhält dann noch die Ähnlichkeitspunkte $A_{14}A_{24}A_{34}J_{14}J_{24}J_{34}$. Die vier Ähnlichkeitsaxen $A_{12}A_{13}A_{23}$, $A_{12}J_{14}J_{24}$, $J_{34}A_{13}J_{14}$, $J_{34}A_{23}J_{24}$ führen zu vier Kreisbüscheln, von denen die Kreise des ersten $O_1O_2O_3$ unter gleichen Winkeln, die des zweiten O_1O_2 unter gleichen, O_1O_4 und O_2O_4 unter Supplementwinkeln, die des dritten O_1O_3 unter gleichen, O_1O_4 und O_3O_4 unter Supplementwinkeln, die des vierten endlich O_2O_3 unter gleichen, O_2O_4 und O_3O_4 unter Supplementwinkeln schneiden. Diese vier Büschel haben einen gemeinsamen Kreis, welcher $O_1O_2O_3$ unter gleichen Winkeln und O_4 unter einem Winkel schneidet, der zu jenen der Supplementwinkel ist. In gleicher Weise finden sich noch drei andere Kreise, welche drei von den vier Kreisen $O_1O_2O_3O_4$ unter gleichen und den vierten unter dem Supplementwinkel schneiden. Ferner giebt es noch drei Kreise,

welche je zwei von den vier Kreisen unter gleichen, zu einander supplementären Winkeln schneiden. Daher folgt:

Es giebt acht Kreise, welche vier andere unter solchen Winkeln schneiden, dafs jeder dem anderen gleich oder supplementär ist.

64. Die Eigenschaften der Ähnlichkeitspunkte und Potenzlinien führen zu einer anderen Konstruktion der Berührungskreise von drei gegebenen Kreisen $O_1 O_2 O_3$. Bezeichnet man mit a die äufsere, mit i die innere Berührung des gesuchten Berührungskreises, so lassen sich folgende Fälle unterscheiden:

	O_1	O_2	O_3
1.	a	a	a
2.	i	i	i
3.	a	a	i
4.	i	i	a
5.	a	i	a
6.	i	a	i
7.	i	a	a
8.	a	i	i

Sind M_1 und M_2 diejenigen Kreise, welche $O_1 O_2 O_3$ gleichartig, (aaa und iii), berühren, so sind $B_1 D_1$ und $B_2 D_2$ inverse Punkte für den äufseren Ähnlichkeitspunkt A_{12} von $O_1 O_2$. (54a.) Fig. 21.

Die Punkte $B_1 B_2$, $C_1 C_2$, $D_1 D_2$ sind invers für den inneren Ähnlichkeitspunkt P von $M_1 M_2$, also schneiden sich die Geraden $B_1 B_2$, $C_1 C_2$, $D_1 D_2$ in P (54a.). Hieraus folgt (53), dafs $A_{12} B_1 \,.\, A_{12} D_1 = A_{12} B_2 \,.\, A_{12} D_2$ ist, oder dafs A_{12} ein Potenzpunkt von M_1 und M_2 ist. Sind A_{13} und A_{23} die Ähnlichkeitspunkte von $O_1 O_3$ und $O_2 O_3$, so mufs die Ähnlichkeitsaxe $A_{12} A_{13} A_{23}$ zugleich die Potenzlinie von $M_1 M_2$ sein.

Da ferner $PB_1 \,.\, PB_2 = PC_1 \,.\, PC_2 = PD_1 \,.\, PD_2$ ist, so ist P das Potenzcentrum von $O_1 O_2 O_3$.

Die gemeinschaftlichen Tangenten in B_1 und B_2 schneiden sich in B und da $BB_1 = BB_2$, so liegt B auf der Potenzlinie $A_{12} A_{13} A_{23}$. Die Pole der letzteren bezüglich der Kreise $O_1 O_2 O_3$ liegen daher auf $B_1 B_2$, $C_1 C_2$, $D_1 D_2$. Da aber

$A_{12}A_{13}A_{23}$ und ihre Pole bekannt sind, da man ferner P kennt, so findet man durch Verbindung von P mit diesen Polen die Berührungspunkte $B_1B_2C_1C_2D_1D_2$.

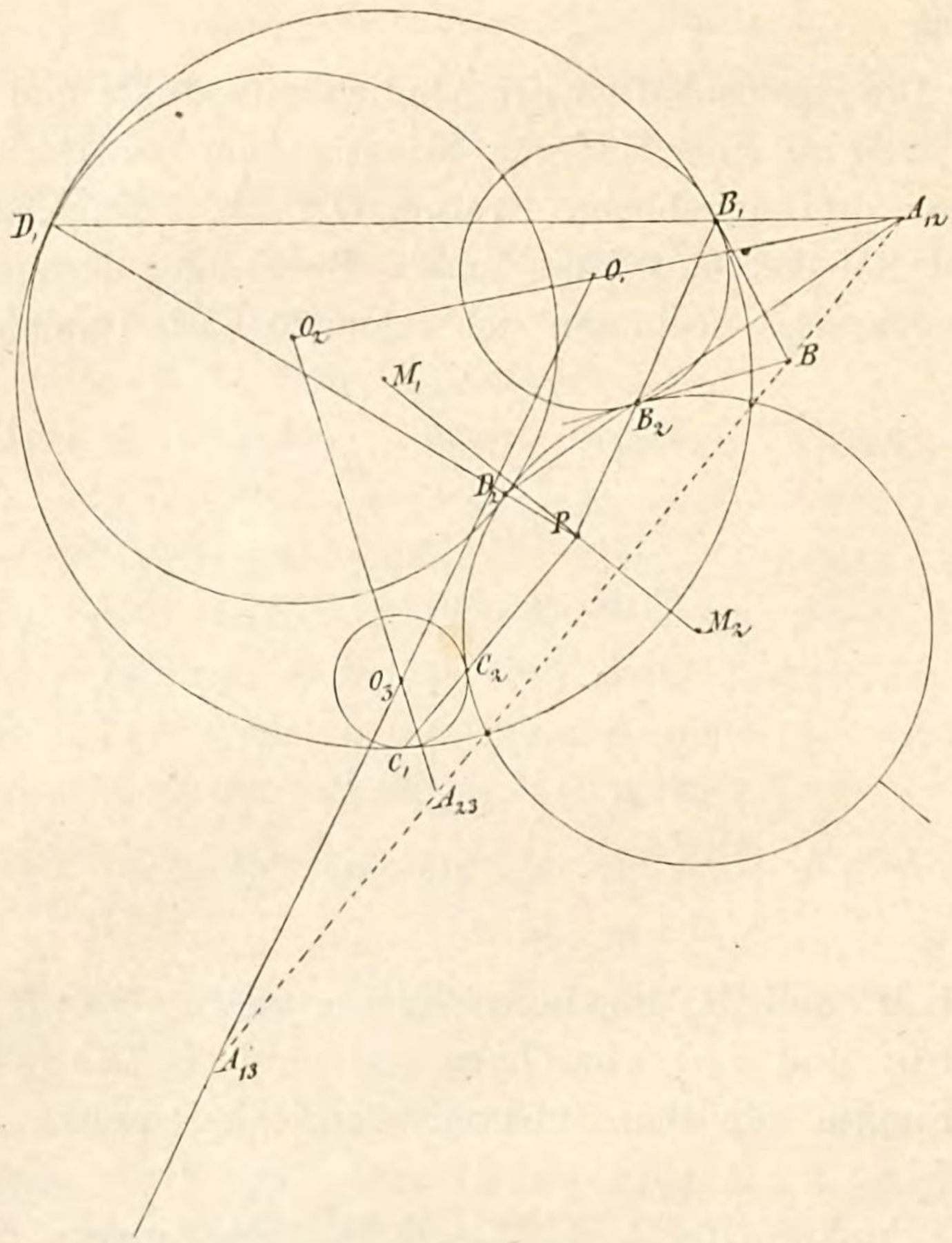


Fig. 21.

Zur Auflösung der übrigen Fälle gelangt man, wenn man die Fälle 3 und 4, 5 und 6, 7 und 8 kombiniert und dieselben Betrachtungen wie in den Fällen 1 und 2 anstellt.

65. *Andere Begründung der Lösung des Berührungsproblems.**)

Die Potenzlinie p_{12} der Kreise O_1O_2 kann als Kreis des Büschels (O_1O_2) angesehen werden; sie schneidet daher den

---

*) Diese Begründung der vorigen Konstruktion giebt Petersen: Methoden und Theorien. Seite 101. Aufgabe 403.

Berührungskreis M_1 und die gemeinschaftlichen Tangenten von O_1 und O_2 unter gleichen Winkeln. Daher ist die

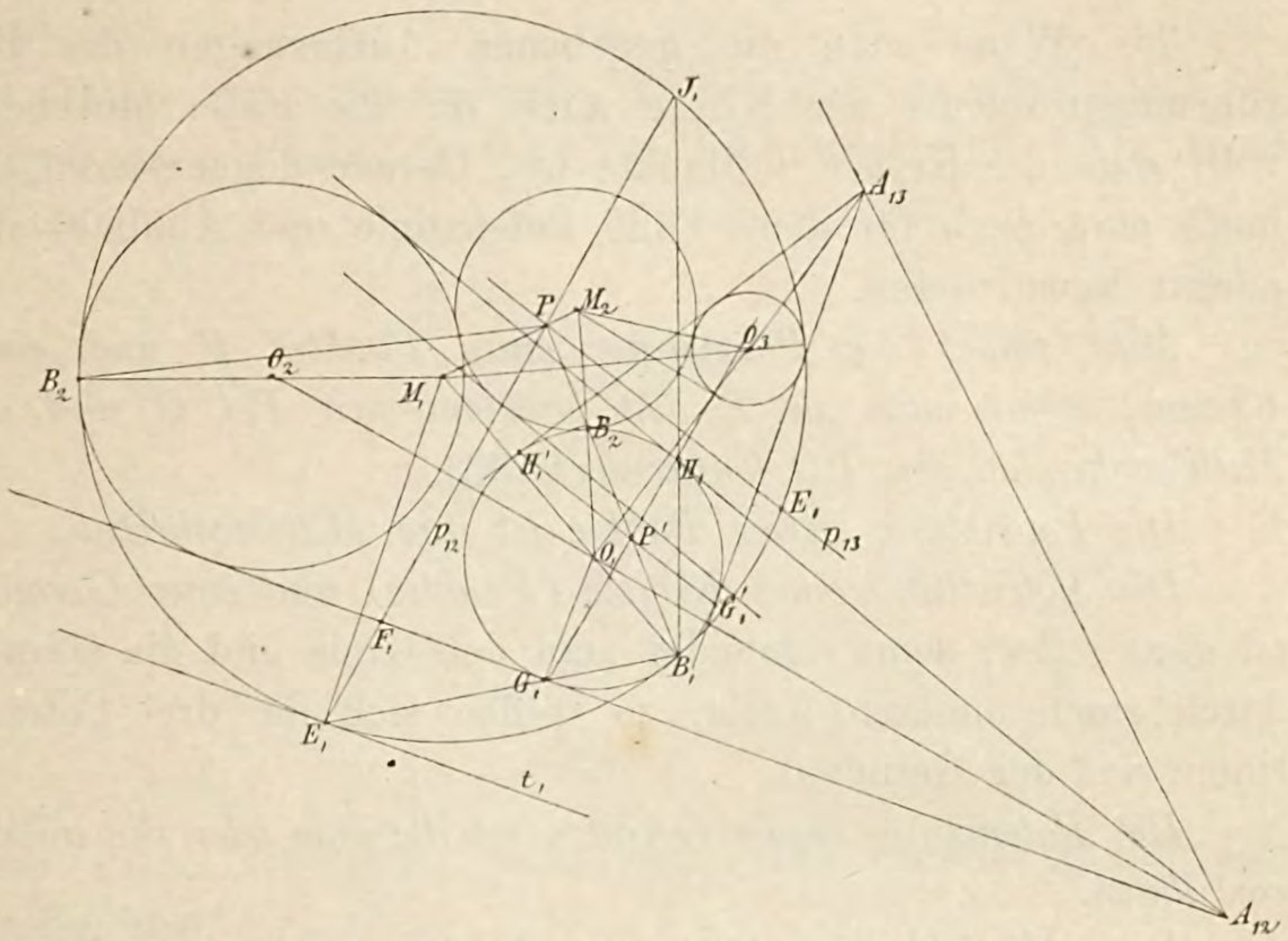


Fig. 22.

Tangente t_1 in E_1 parallel der gemeinschaftlichen Tangente $A_{12}G_1$, folglich

$$M_1E_1 \parallel O_1G_1 \text{ und } B_1G_1E_1 \text{ in einer Geraden;}$$

ebenso folgt, dafs auch

$$B_1H_1J_1,\ B_1G_1'E_1',\ B_1H_1'J_1'$$

je in einer Geraden liegen, wenn $E_1J_1E_1'J_1'$ Durchschnitte der Potenzlinien p_{12} und p_{13} mit M_1, $G_1H_1G_1'H_1'$ Berührungspunkte der gemeinschaftlichen Tangenten der Kreispaare O_1O_2 und O_1O_3 sind. Da nun

$$p_{12} \parallel G_1H_1,\ p_{13} \parallel G_1'H_1'$$

ist, so müssen sich G_1H_1 und $G_1'H_1'$ in einem Punkte P', der mit den Punkten B_1 und P in einer Geraden liegt, treffen.

Demnach findet man den Berührungspunkt auf folgende Art:

Man konstruiert die Potenzlinien p_{12} und p_{13} der Kreispaare O_1O_2 und O_1O_3 und das Potenzcentrum P von $O_1O_2O_3$; darauf die äufseren Ähnlichkeitspunkte A_{12} und A_{13} derselben Kreispaare und deren Polaren bezüglich O_1, die sich im Pole

P' der äufseren Ähnlichkeitsaxe $A_{12}A_{13}A_{23}$ der Kreise $O_1O_2O_3$ in Bezug auf O_1 schneiden. Die Gerade PP' trifft den Kreis O in den Berührungspunkten B_1 und B_2 mit M_1 und M_2.

66. Wenn man die gegebenen Auflösungen des Berührungsproblems der Kreise auch für die Fälle anwenden will, dafs die Kreise in Punkte und Gerade degenerieren, so mufs man auch für diese Fälle Potenzlinie und Ähnlichkeitspunkte konstruieren.

Man findet die Potenzlinie eines Punktes P und eines Kreises, wenn man zu P den harmonischen Pol Q und die Mittelsenkrechte von PQ konstruiert (33).

Die Potenzlinie zweier Punkte ist ihre Mittelsenkrechte.

Die Potenzlinie eines Kreises (Punktes) und einer Geraden ist diese selbst; denn schneidet man den Kreis und die Gerade durch einen anderen Kreis, so treffen sich die drei Potenzlinien auf der Geraden.

Die Potenzlinie zweier Geraden ist die eine oder die andere von ihnen.

Die Ähnlichkeitspunkte eines Kreises und eines Punktes fallen mit diesem zusammen.

Die Ähnlichkeitspunkte zweier Punkte fallen mit dem einen oder anderen zusammen.

Die Ähnlichkeitspunkte eines Kreises und einer Geraden sind die Durchschnitte der Senkrechten, welche vom Mittelpunkte auf die Gerade gefällt werden kann, mit dem Kreise. Denn man hat die unendlich grofse Centrale im Verhältnisse $r : \infty$ zu teilen, wenn r den Radius des Kreises bedeutet. Cf. 53d.

Die Ähnlichkeitspunkte zweier Geraden hat man sich im Unendlichen zu denken.

§ 6.

Die Kreisverwandtschaft.

67. Zwei Punkte, die in Bezug auf einen festen Kreis O harmonische Pole sind, heifsen *kreisverwandte Punkte* und die Beziehung, in welche dadurch je zwei Punkte der Ebene treten, heifst *Kreisverwandtschaft.* O heifst die *Basis* der Verwandtschaft (53).

68. *Bewegt sich ein Punkt auf einer Geraden, so bewegt sich der verwandte Punkt auf einem Kreise, dem verwandten Kreise, welcher durch den Mittelpunkt O der Basis geht und umgekehrt.*

Denn ist p die Gerade, P ihr Pol, so erhält man zu irgend einem Punkte Q von p den harmonischen Pol Q_1, wenn

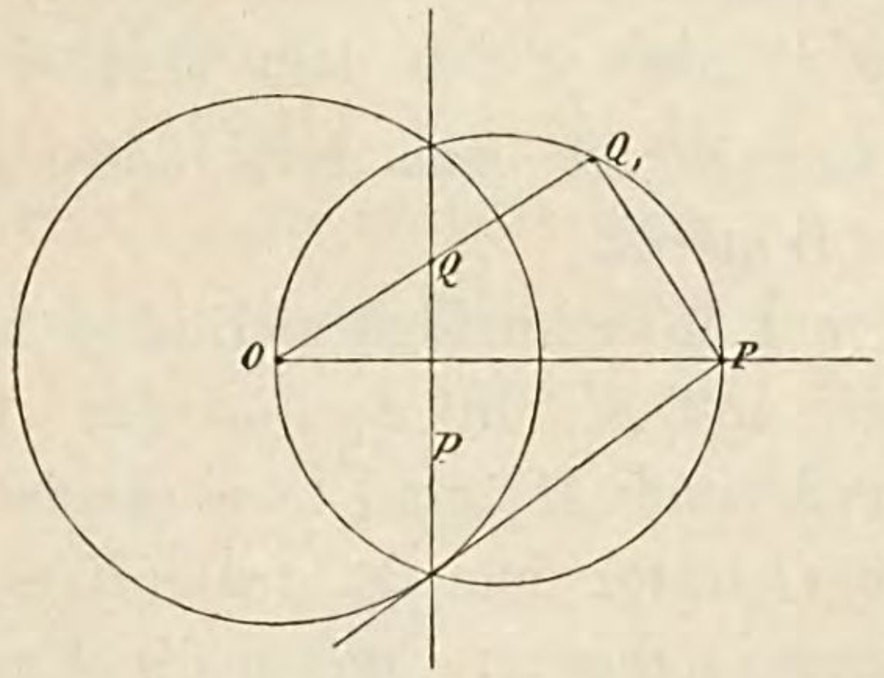


Fig. 23.

man $PQ_1 \perp OQ$ fällt. Also liegen alle Punkte Q_1 auf dem Kreise über OP.

69. *Bewegt sich ein Punkt auf einem Kreise, so bewegt sich der verwandte Punkt auch auf einem Kreise, dem verwandten Kreise.*

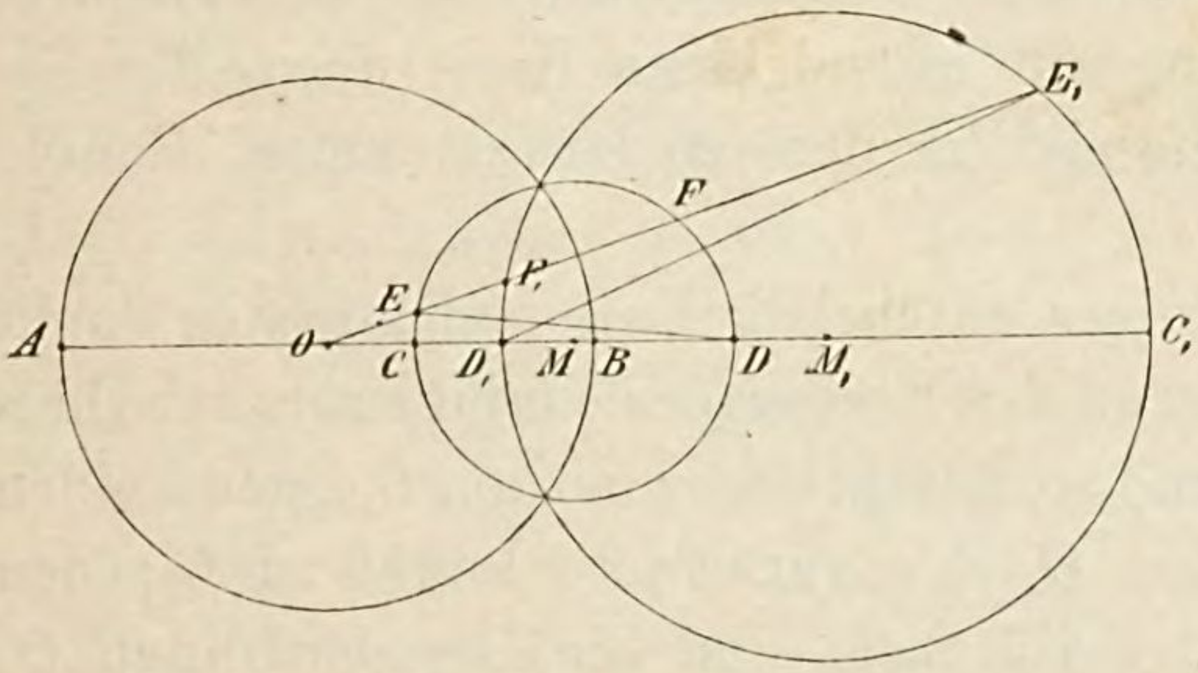


Fig. 24.

Es sei O die Kreisbasis, M ein beliebiger Kreis, welcher die Centrale OM in C und D trifft; es seien CC_1, DD_1, EE_1 verwandte Punkte. Daher ist (13) $OE \,.\, OE_1 = OC \,.\, OC_1$, also liegen CC_1 EE_1 auf einem Kreise und es ist $\sphericalangle OEC = OC_1E_1$. Aus gleichem Grunde liegen aber auch DD_1 EE_1 auf einem Kreise und es ist $\sphericalangle OED = OD_1E_1$, also auch

$$\sphericalangle OED - OEC = OD_1E_1 - OC_1E_1$$

oder

$$\sphericalangle CED = C_1E_1D_1 = 90^0,$$

d. h. die den Punkten des Kreises M verwandten Punkte liegen auf dem Kreise über $C_1 D_1$.

70. *Zwei Gerade und die ihnen verwandten Kreise schneiden sich unter gleichen Winkeln.*

Den Geraden p und p' sind zwei Kreise durch O verwandt, deren Tangenten in O parallel zu p und p' sind. Da die Radien auf den Tangenten senkrecht stehen, so bilden die Radien in O einen Winkel gleich dem Winkel (pp').

71. *Zwei Kreise und die ihnen verwandten Kreise schneiden sich unter gleichen Winkeln.*

Die Kreise M und M' schneiden sich in A und B, die verwandten Kreise M_1 und M_1' in A_1 und B_1. Den Tangenten a und a' in A an M und M' sind zwei Kreise α und α' verwandt, die sich in O unter dem $\measuredangle (aa')$ (70), und aufserdem in A_1 schneiden und in diesem Punkte die Kreise M_1 und M_1' berühren. Da α und α' in A_1 denselben Winkel wie in O bilden müssen und mit M_1 und M_1' gemeinsame Tangenten in A_1 haben, so schneiden sich auch diese Kreise unter dem Winkel (aa').

72. *Den Kreisen eines Büschels sind entweder Gerade durch einen Punkt oder die Kreise eines konzentrischen Büschels verwandt.*

Wenn die Kreise eines Büschels sich in O und O' schneiden, so sind ihnen in Bezug auf irgend einen Kreis um O die Geraden verwandt, welche sich in dem zu O' verwandten Punkte O_1' schneiden.

Haben die Kreise eines Büschels keinen gemeinsamen Punkt und wird ihre Centrale von den Kreisen des conjugierten Büschels in O und O' geschnitten, so beschreibe man um O irgend einen Kreis als Basis. Es sei O_1' der verwandte Punkt zu O'; den Kreisen des conjugierten Büschels sind die Geraden durch O_1' verwandt: daher müssen den Kreisen des ursprünglichen Büschels solche Kreise verwandt sein, welche alle Geraden durch O_1' rechtwinklig schneiden, d. h. Kreise mit dem Mittelpunkte O_1'.

73. *Alle Kreise, welche zwei andere O und O' unter den Winkeln α und α' schneiden, berühren zwei Kreise des Büschels (OO') und schneiden einen dritten Kreis desselben Büschels rechtwinklig oder unter dem Durchmesser.* Cf. 59.

Der Beweis dieses Satzes darf wegen 72. nur für die Fälle geführt werden, dafs das Büschel (OO') aus einem Büschel von Strahlen oder konzentrischen Kreisen besteht.

I. Fall. O und O' seien zwei Gerade mit dem Schnittpunkte S; dann liegen die Mittelpunkte $MM_1 \ldots$ aller Kreise, welche jene unter den Winkeln α und α' auf zwei Geraden g und g' durch S, welche O und O' harmonisch trennen und leicht zu construieren sind. Bezeichnet man die Mittelpunkte auf g mit $MM_1 \ldots$, auf g' mit $M'M_1' \ldots$, die Radien der Kreise $M \ldots$ mit $r \ldots$, so verhält sich

$$r : r_1 : \cdots = MS : M_1S : \cdots$$
$$r' : r_1' : \cdots = M'S : M_1'S : \cdots$$

d. h. die Kreise $MM_1 \ldots$ sowohl wie $M'M_1' \ldots$ berühren je zwei durch S gehende Gerade. Da sie überdies die Strahlen g und g' rechtwinklig schneiden, so ist der Satz für den ersten Fall bewiesen.

II. Fall. S sei der gemeinschaftliche Mittelpunkt der Kreise OO' und P ein beliebiger Punkt, so läfst sich zuerst nachweisen, dafs es vier Kreise durch P giebt, welche O und O' unter den Winkeln α und α' schneiden. Man beschreibe nämlich um P einen beliebigen Kreis, nehme diesen als Basis einer Kreisverwandtschaft, so sind den Kreisen O und O' zwei andere O_1 und O_1' verwandt. Alle Geraden, welche O_1 unter α und O_1' unter α' schneiden, sind Tangenten zweier mit O_1 und O_1' konzentrischen Kreise. Den vier gemeinschaftlichen Tangenten derselben sind diejenigen vier Kreise durch P verwandt, welche O und O' unter den Winkeln α und α' schneiden. Sie teilen sich in zwei Paare gleicher Kreise, welche zu SP symmetrisch liegen. Jedes Paar wird von einem Kreispaare um S berührt und zwar das eine gleichartig, das andere ungleichartig, und jeder Kreis, welcher eines dieser Kreispaare berührt, schneidet O und O' unter den Winkeln α und α' und schneidet, jenachdem die Berührung gleichartig oder ungleichartig ist, einen Kreis um S rechtwinklig oder unter dem Durchmesser. (73).

74. *In jedem Kreisbüschel giebt es zwei Kreise, welche irgend einen Kreis unter dem Winkel α schneiden.*

I. Fall. Das Büschel bestehe aus Strahlen durch einen Punkt S. Alle Geraden, welche einen Kreis O unter α schneiden, sind Tangenten eines anderen Kreises, an den sich von S zwei Tangenten ziehen lassen.

II. Fall. Das Büschel bestehe aus konzentrischen Kreisen mit dem gemeinsamen Mittelpunkte S. Man verbinde S mit dem Mittelpunkte O eines Kreises, beschreibe über SO nach beiden Seiten Kreisbogen mit dem Peripheriewinkel α; sie mögen den Kreis O in A und B schneiden, dann schneiden die mit SA und SB beschriebenen Kreise O unter α.

Wegen 72. lassen sich auf diese beiden Fälle alle übrigen zurückführen.

74. *Drei Kreise werden von acht anderen unter bestimmten Winkeln geschnitten.*

Die drei Kreise $OO'O''$ sollen von anderen Kreisen unter den Winkeln $\alpha\alpha'\alpha''$ geschnitten werden. Nach 73. berühren alle Kreise, welche O und O' unter α und α' schneiden, eines von zwei Kreispaaren O_1O_2 oder O_3O_4 und schneiden bei gleichartiger Berührung den äufseren Potenzkreis rechtwinklig, bei ungleichartiger den inneren unter dem Durchmesser. Es sei bei O_1O_2 gleichartige Berührung, der äufsere Potenzkreis A_{12}, bei O_3O_4 ungleichartige Berührung, der innere Potenzkreis J_{34}. Umgekehrt folgt, dafs jeder Kreis, welcher A_{12} rechtwinklig schneidet und O_1 berührt, auch O_2 berühren und O unter α, O' unter α' schneiden mufs. — In gleicher Weise findet man, dafs alle Kreise, welche $O'O''$ unter $\alpha'\alpha''$ schneiden, entweder einen Kreis A'_{12} rechtwinklig oder einen anderen J'_{34} unter dem Durchmesser schneiden. Jeder Kreis, welcher A_{12} und A'_{12} rechtwinklig und O' unter α' schneidet, mufs O und O'' unter α und α'' schneiden. Alle Kreise endlich, welche OO'' unter $\alpha\alpha''$ schneiden, schneiden einen Kreis A''_{12} rechtwinklig oder J''_{34} unter dem Durchmesser.

Alle diejenigen Kreise, welche

entweder A_{12} rechtwinklig und A'_{12} rechtwinklig
oder A_{12} rechtwinklig und J'_{34} unter dem Durchmesser
oder J_{34} unter dem Durchmesser und A'_{12} rechtwinklig
oder J_{34} unter dem Durchmesser u. J'_{34} unter d. Durchmesser

schneiden, bilden je ein Büschel. In jedem dieser vier Büschel

giebt es zwei Kreise, welche O' unter α' und daher OO'' unter $\alpha\alpha''$ und also auch entweder A''_{12} rechtwinklig oder J''_{34} unter dem Durchmesser schneiden. Die acht Kreise, welche $OO'O''$ unter den Winkeln $\alpha\alpha'\alpha''$ schneiden, findet man also, wenn man für jede der folgen acht Kreisgruppen

$$A_{12}A'_{12}A''_{12},\quad A_{12}A'_{12}J''_{34},\quad A_{12}J'_{34}A''_{12},\quad A_{12}J'_{34}J''_{34},$$
$$J_{34}A'_{12}A''_{12},\quad J_{34}A'_{12}J''_{34},\quad J_{34}J'_{34}A''_{12},\quad J_{34}J'_{34}J''_{34}$$

denjenigen Kreis konstruiert, welcher die Kreise A rechtwinklig, die Kreise J unter dem Durchmesser schneidet. (30, 47, 48).

75. *Die vier Berührungskreise eines Dreiecks berühren den Mittelkreis (Feuerbachschen Kreis) desselben.**)

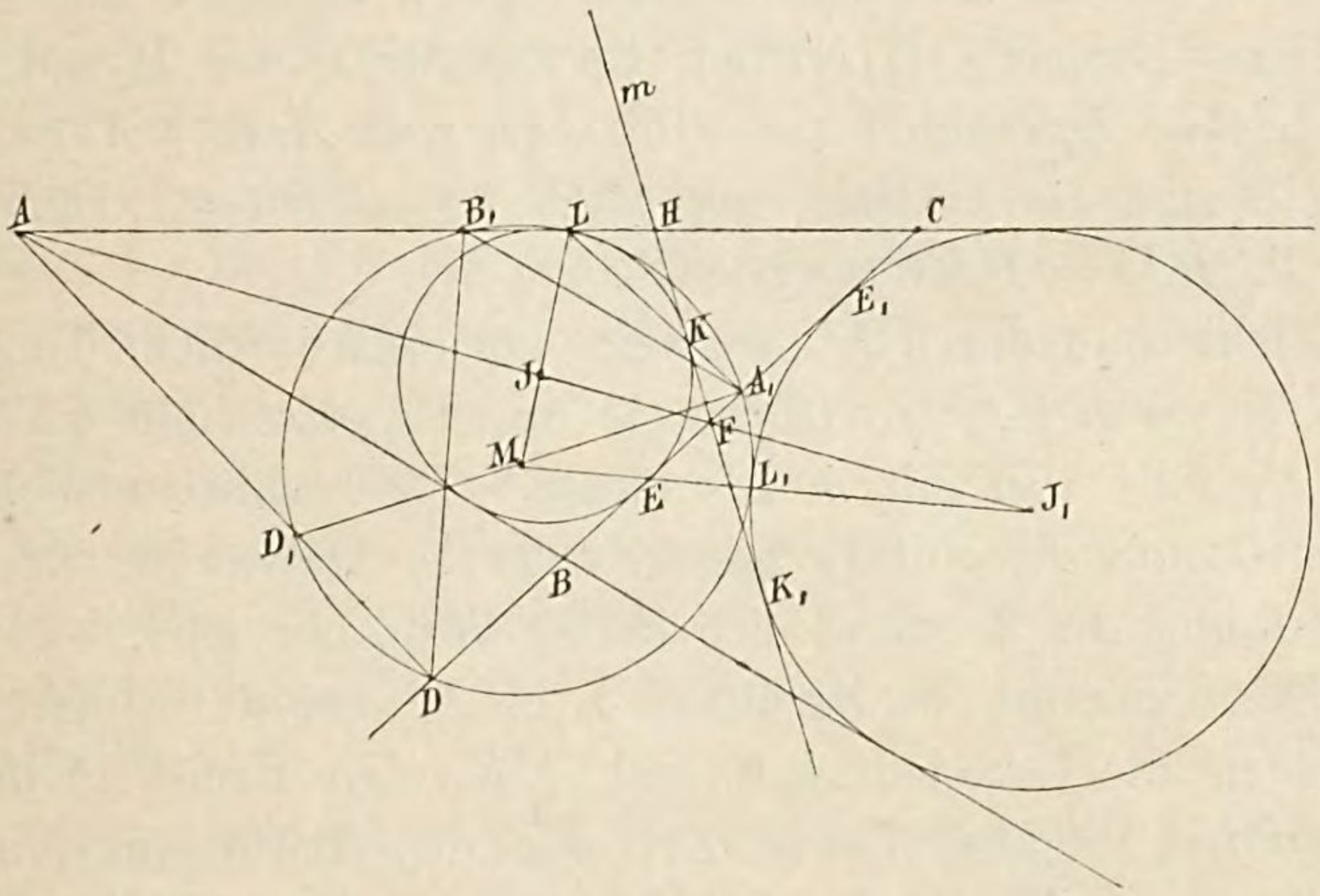


Fig. 25.

J und J_1 seien die Mittelpunkte des inneren und des im Winkel A liegenden äufseren Berührungskreises des Dreiecks ABC, E und E_1 die Berührungspunkte mit BC, A_1 und B_1 die Mitten von BC und AC; man ziehe $AD \perp BC$ und lege durch A_1B_1D einen Kreis M, welcher AD in D_1 schneiden mag. Dieser Kreis heifst der Mittelkreis (Neunpunktkreis, Feuerbachscher Kreis), des Dreiecks ABC. Er schneidet die Seiten desselben in ihren Mitten und den Fufspunkten der Höhen und trifft die letzteren in den Mitten der nach den

*) Siehe Taylor: Ancient and moderne Geometry of conics. Seite 355.

Ecken hin liegenden Abschnitte, in welche sie durch den Höhenpunkt zerlegt werden.*) Es liegt dann M auf A_1D_1. Um A_1 denke man sich mit A_1E einen Kreis beschrieben und wähle ihn als Basis einer Kreisverwandtschft. Da er die Kreise J und J_1 rechtwinklig schneidet, so sind diese sich selbst verwandt; dem Kreise M ist eine Gerade m verwandt, welche BC in einem solchen Punkte F trifft, dafs $A_1E^2 = A_1F \,.\, A_1D$. — Die Gerade JJ_1 wird durch A und BC in G harmonisch geteilt, also sind die im Punkte EE_1GD auch harmonisch und da $EA_1 = E_1A_1$ ist, $A_1E^2 = A_1G \,.\, A_1D$ (4c), daher fallen F und G zufammen. — m steht auf A_1D_1 senkrecht, bildet also mit BC einen Winkel, welcher gleich $\sphericalangle A_1D_1D$ ist, dieser ist als Peripheriewinkel gleich A_1B_1D. Im rechtwinkligen Dreiecke ACD ist B_1 die Mitte der Hypotenuse, also $B_1C = B_1D$ und $\sphericalangle B_1DC = C$; weil $A_1B_1 \parallel AB$ ist, so ist $\sphericalangle B_1A_1C = B$. Daher ist $\sphericalangle B_1A_1C = B = A_1B_1D + C$ oder $A_1B_1D = HFC = B - C$.

Zieht man durch F die zweite gemeinschaftliche Tangente der Kreise J und J_1, so bildet sie mit der ersten einen Winkel $B - C$, fällt also mit m zusammen. Es berührt also m die Kreise J und J_1, mithin berührt der m verwandte Kreis M auch J und J_1, da diese sich selbst verwandt sind.

Die Tangente m berühren J in K und J_1 in K_1, dann schneiden die Geraden A_1K und A_1K_1 den Kreis M in den verwandten Punkten L und L_1, also den Berührungspunkten desselben mit J und J_1.

76. *Gegeben ist ein Kreis M und vier Punkte* $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$; *man soll in den Kreis ein Viereck zeichnen, dessen Seiten der Reihe nach durch die gegebenen Punkte gehen.***)

Sei $ABCD$ das verlangte Viereck, dessen Seiten AB, BC, CD, DA der Reihe nach durch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ gehen. Man konstruiere durch diese Punkte die Tangenten oder halben kürzesten Sehnen und beschreibe mit ihnen um jene Kreise. Betrachtet man dieselben als Basen von Kreisverwandtschaften

---

*) Steiner: Die geometrischen Konstruktionen ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises. Seite 49.

**) Petersen: Methoden und Theorien zur Auflösung geometrischer Konstruktionsaufgaben.

($\mathfrak{A}$), ($\mathfrak{B}$), ($\mathfrak{C}$), ($\mathfrak{D}$) so verwandelt sich der Punkt A, indem man diese Verwandtschaften der Reihe nach anwendet, in sich selbst. Ein Punkt P wird durch successive Anwendung der Verwandtschaften ($\mathfrak{A}$), ($\mathfrak{B}$), ($\mathfrak{C}$), ($\mathfrak{D}$) in $\mathfrak{D}$ verwandelt; man erhält ihn, indem man rückwärts durch successive Anwendung der Verwandtschaften ($\mathfrak{C}$), ($\mathfrak{B}$), ($\mathfrak{A}$) den Punkt $\mathfrak{D}$ in P verwandelt. Die Gerade AP wird durch die Verwandtschaft ($\mathfrak{A}$) in einen Kreis durch $\mathfrak{A}BP_a$ verwandelt, dieser durch die Verwandtschaft ($\mathfrak{B}$) in einen anderen durch $\mathfrak{A}_bCP_{ab}$, dieser durch die Verwandtschaft ($\mathfrak{C}$) in einen Kreis durch $\mathfrak{A}_{bc}DP_{abc}$ oder $\mathfrak{A}_{bc}D\mathfrak{D}$ und dieser durch die Verwandtschaft ($\mathfrak{D}$) in eine Gerade, welche durch A und einen Punkt Q oder $\mathfrak{A}_{bcd}$ geht. Es ist also Q derjenige Punkt, in welchen sich $\mathfrak{A}$ durch successive Anwendung der Kreisverwandtschaften ($\mathfrak{B}$), ($\mathfrak{C}$), ($\mathfrak{D}$) verwandelt.

Der Winkel, den PA mit dem Kreise M bildet, bleibt bei den Verwandlungen ungeändert; mithin schneiden PA und QA den Kreis M unter demselben Winkel. Wie die Betrachtung der Verwandlungen erkennen läfst, bilden bei einer geraden Anzahl derselben, PA und QA eine Gerade.

Demnach lautet die Auflösung:

Man verwandle $\mathfrak{D}$ durch successive Anwendung der Verwandtschaften ($\mathfrak{C}$), ($\mathfrak{B}$), ($\mathfrak{A}$) in P; darauf $\mathfrak{A}$ durch successive Anwendung von ($\mathfrak{B}$), ($\mathfrak{C}$), ($\mathfrak{D}$) in Q, so schneidet PQ den Kreis in A.

Diese Auflösung bleibt bei einem beliebigen Polygon von gerader Seitenzahl im Wesentlichen ungeändert.

77. *In einen Kreis ein Dreieck ABC zu beschreiben, dessen Seiten bezüglich durch die Punkte $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}$ gehen.*

Wenn man wie in der vorigen Aufgabe verfährt, so erhält man wieder zwei Gerade PA und QA, die mit dem Kreise zwar gleiche Winkel, aber in entgegengesetztem Sinne bilden.

Deshalb verwandle man einen der Schnittpunkte von $P\mathfrak{A}$ mit dem Kreise M durch die Verwandtschaften ($\mathfrak{A}$), ($\mathfrak{B}$), ($\mathfrak{C}$) in einen Punkt R. Die Geraden $\mathfrak{A}P$ und AP sind dadurch verwandelt in RQ und AQ, so dafs also $\sphericalangle\, \mathfrak{A}PA = RQA$ wird; diese vier Geraden bilden ein Kreisviereck. Der um dasselbe beschriebene Kreis geht durch die Punkte PQ und den Schnittpunkt der Geraden $\mathfrak{A}P$ und QR und ist dadurch

bekannt; er geht auch durch A und bestimmt in seinem Durchschnitte mit dem Kreise M diesen Punkt.

Bei der Ausdehnung dieser Auflösung auf ein Polygon von beliebiger aber ungerader Seitenzahl ändert sich nur die Zahl der Verwandtschaften.

78. *Das Malfattische Problem.*

*In ein Dreieck drei Kreise zu zeichnen, von denen jeder die beiden anderen und zwei Seiten berührt.**)

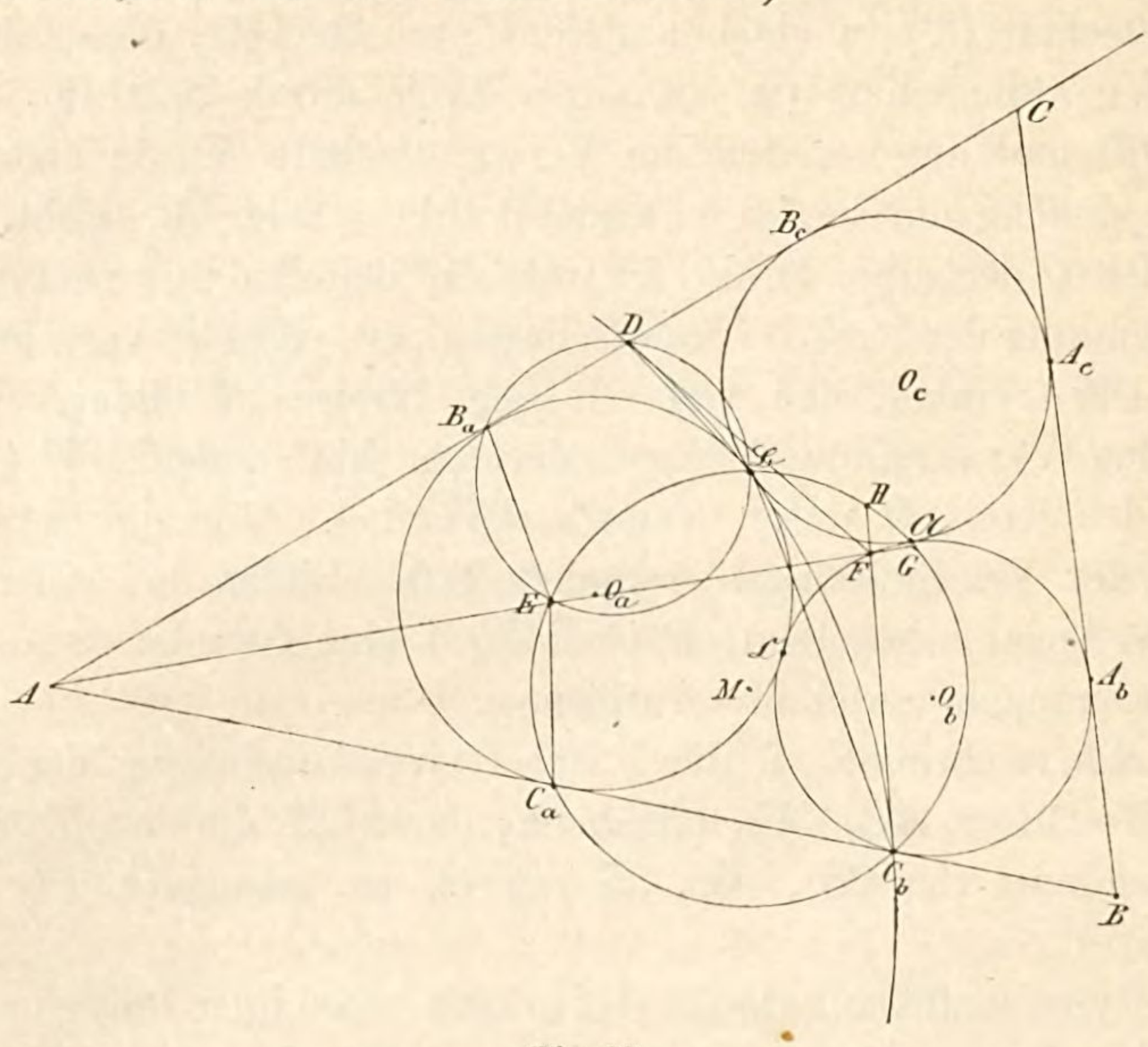


Fig. 26.

Die Mittelpunkte der gesuchten Kreise seien $O_a O_b O_c$, ihre Berührungspunkte $\mathfrak{C}\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, die Berührungspunkte auf den Seiten $C_a C_b A_b A_c B_c B_a$. — Durch C_b lege man einen Kreis O, welcher die Kreise O_a und O_c in $\mathfrak{B}$ berührt; er schneidet AC in D und bildet (59 b.) gleiche Winkel mit der Seite AC und dem Kreise O_b, also auch mit den Seiten AC und AB. Zieht man daher in C_b und D an den Kreis O die Tangenten $C_b F$ und DF, so ist $\sphericalangle AC_bF = CDF$, also $AC_bF + ADF = 2R$

---

*) Die mitgeteilte Auflösung ist von Steiner ohne Beweis gegeben, von Petersen: Methoden und Theorien, bewiesen. Einen anderen Beweis gab Schroeter, Crelle-Borchardts Journal. 1874.

und $DFC_b + A = 2R$, also wird der Bogen DC_b durch den Winkel A gemessen.

Die Punkte C_aC_b sowie $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ sind inverse Punkte der Kreise O_a und O_b und liegen daher auf einem Kreise M. Er schneide den durch $B_aD\mathfrak{B}$ bestimmten Kreis in E, dann ist

$$B_aE\mathfrak{B} + B_aD\mathfrak{B} = 180^0 \text{ und } C_aE\mathfrak{B} + C_aC_b\mathfrak{B} = 180^0,$$

also $\measuredangle B_aEC_a = 180^0 - \frac{1}{2}A$ und folglich mufs der durch B_aEC_a bestimmte Kreis seinen Mittelpunkt in A haben.

In den Punkten C_a und $\mathfrak{B}$ werden AB und O_c von O_a berührt, also sind C_a und $\mathfrak{B}$ inverse Punkte von AB und O_c und der durch sie gelegte Kreis M schneidet AB und O_c, also auch AB und die in $\mathfrak{B}$ an O_c und O oder die in C_b an O gelegte Tangente C_bF unter gleichen Winkeln und daher auch unter gleichen Sehnen und weil $AC_a = AE$, so ist $C_aC_b = EG = C_bH$. — Auf gleiche Art folgt, dafs der durch $B_aD\mathfrak{B}E$ bestimmte Kreis die Gerade AE und die Tangente DF unter gleichen Winkeln schneidet.

Es mögen die Tangenten C_bF und DF die Gerade AE in K und J schneiden, dann ist zunächst $C_bF = DF$, $C_bK = EK$ und $DJ = EJ$, weil der Kreis M auf C_bF und AE und der Kreis durch $B_aD\mathfrak{B}E$ auf DF und AE gleiche Sehnen abschneiden. Daraus folgt

$$C_bF - C_bK = DF - EK$$
$$KF = DJ - FJ - (EJ - KJ)$$
$$= -FJ + KJ$$

oder $$KF + FJ = KJ.$$

Es wäre also im Dreieck FKJ die Summe zweier Seiten gleich der dritten Seite, also müssen die Punkte FKJ zusammenfallen und AEF ist die Halbierungslinie des Winkels A.

Der Kreis M schneidet also die Geraden AB, AE und die Tangenten in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ unter gleichen Sehnen oder gleichen Winkeln; es läfst sich daher ein konzentrischer Kreis zeichnen, welcher diese vier Geraden berührt. In gleicher Weise ergiebt sich, dafs dieser Kreis auch die Halbierungslinie des Winkels B berührt. Dadurch aber ist dieser Kreis bestimmt.

Sind demnach $M'M''M'''$ die Kreise, welche den Dreiecken

eingeschrieben sind, in welche ABC durch die Halbierungslinien der Winkel zerlegt wird, so haben sie die Tangenten in $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ an die gesuchten Kreise zu gemeinschaftlichen Tangenten und die letzteren sind dadurch bestimmt.

§ 7.

Die harmonische Verwandtschaft.

79. Man wähle einen festen Punkt O und eine feste Gerade o als *Centrum* und *Axe*. Zwei Punkte, wie AA_1 oder BB_1, welche durch Centrum und Axe harmonisch getrennt sind, heifsen *verwandte Punkte*; zwei Gerade, wie aa_1 oder bb_1, welche durch Centrum und Axe harmonisch getrennt sind, heifsen *verwandte Gerade*. Die Beziehung, in welche dadurch die Punkte und Ceraden der Ebene gesetzt sind, heifst „*harmonische Verwandtschaft*“. Die Mittellinie von Centrum und Axe heifst die *Mittellinie* der Verwandtschaft.

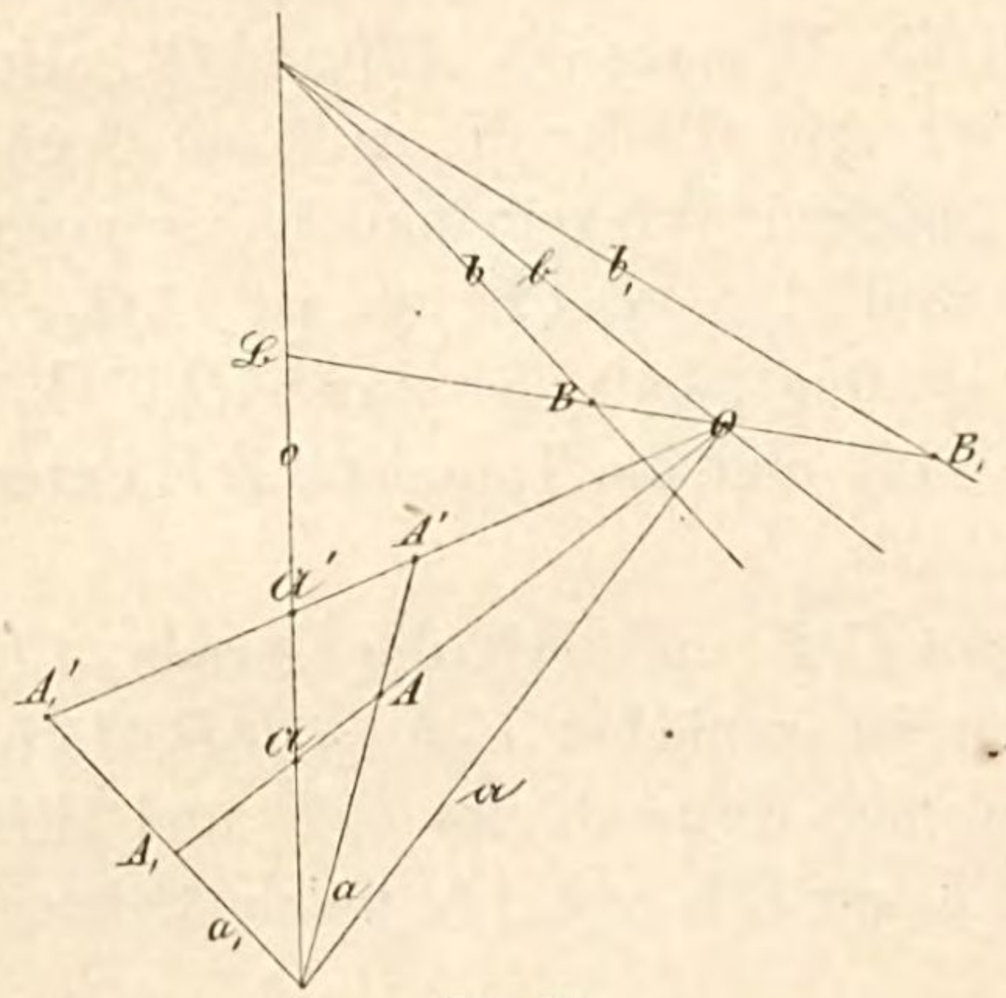


Fig. 27.

Es sind dann $AA_1O\mathfrak{A}$, $BB_1O\mathfrak{B}$, $aa_1o\mathfrak{a}$, $bb_1o\mathfrak{b}$ harmonisch.

Durchläuft der Punkt A die Gerade a, so mufs der verwandte Punkt A_1 die verwandte Gerade a_1 durchlaufen, denn $A'A_1'O\mathfrak{A}'$ sind harmonisch; wenn b sich um B dreht, mufs die verwandte Gerade b_1 sich um den verwandten Punkt B_1 drehen, denn jede durch O gelegte Transversale wird durch $Oobb_1$ harmonisch geteilt.

Sind $ABCD$ harmonische Punkte einer Geraden g, so liegen die verwandten Punkte $A_1B_1C_1D_1$ auf der verwandten Geraden g_1 und gleichzeitig auf den harmonischen Strahlen $O(ABCD)$, sind also selbst harmonisch.

Wenn $P(abcd)$ harmonische Strahlen sind, so schneiden sich die verwandten Strahlen $a_1b_1c_1d_1$ in dem zu P verwandten

Punkte P_1 und schneiden die Axe o in ihren Schnittpunkten mit $abcd$, sind also auch harmonisch.

Aus der Definition der Verwandtschaft haben sich also unmittelbar folgende Sätze ergeben:

a. *Zwei verwandte Punkte liegen mit dem Centrum in einer Geraden. Dieses, sowie jeder Punkt der Axe, ist sich selbst verwandt.*

b. *Zwei verwandte Gerade schneiden sich auf der Axe. Diese, sowie jede Gerade durchs Centrum, ist sich selbst verwandt.*

c. *Durchläuft ein Punkt eine Gerade, so durchläuft der verwandte Punkt die verwandte Gerade.*

d. *Dreht sich eine Gerade um einen Punkt, so dreht sich die verwandte Gerade um den verwandten Punkt.*

e. *Vier harmonischen Punkten oder Strahlen sind wieder harmonische Punkte oder Strahlen verwandt.*

f. *Einer Punkt- oder Strahleninvolution ist wieder eine Punkt- oder Strahleninvolution verwandt.*

Sind nämlich $AA'BB'CC'\ldots$ Punktpaare einer Involution auf der Geraden g, so schneiden die Strahlenpaare $O(AA'BB'CC'\ldots)$ die verwandte Gerade g_1 in der verwandten Involution $A_1A_1'B_1B_1'C_1C_1'\ldots$

Sind andererseits $aa'bb'cc'\ldots$ Strahlenpaare einer Involution im Punkte P, so treffen sich die verwandten Strahlenpaare $a_1a_1'b_1b_1'c_1c_1'\ldots$ im verwandten Punkte P_1 und da je zwei verwandte Strahlen sich auf der Axe schneiden, so bilden $a_1a_1'b_1b_1'c_1c_1'\ldots$ eine Involution.

g. *Der Mittellinie von Centrum und Axe ist g_∞ verwandt* (4 b).

h. *Wählt man Pol und Polare eines Kreises als Centrum und Axe, so ist der Kreis sich selbst verwandt* (14).

80. Soll man eine solche Verwandtschaft herstellen, daſs der Kreis sich selbst und der Geraden p die Gerade p_1 verwandt ist, so ziehe man vom Schnittpunkte Q die Tangenten QA und QA_1, schneide AA_1 mit p und p_1 in P und P_1 und konstruiere dasjenige Punktpaar OO', welches AA_1 und PP_1' harmonisch teilt, so sind O und QO' oder O' und QO Centrum und Axe der Verwandtschaft.

Wenn Q innerhalb des Kreises liegt, so schneide man den Kreis mit p und p_1 in BC und B_1C_1 und konstruiere die Schnittpunkte O von BC_1 und B_1C und O' von BB_1 und CC_1, so sind wieder O und QO' oder O' und QO Centrum und Axe.

Fällt p_1 mit g_∞ zusammen, so liegt Q im Unendlichen; AA_1 wird der auf p senkrechte Durchmesser. Man ziehe die Tangente PD an den Kreis und schneide sie auf AA_1 nach beiden Seiten bis O und O' ab, so sind O und QO' oder O' und QO Centrum und Axe. Die Axe ist in diesem Falle parallel mit p. (4c. 4b).

81. Auf gleiche Art läfst sich eine harmonische Verwandtschaft herstellen, in welcher ein Kreis sich selbst verwandt ist und zwei Punkte P und P_1 verwandte Punkte sind.

Wenn PP_1 den Kreis in AA_1 schneidet, und OO' dasjenige Punktpaar ist, welches die Strecken AA_1 und PP_1 harmonisch teilt, so sind O und seine Polare oder O' und seine Polare Centrum und Axe.

Schneidet PP_1 den Kreis nicht, so ziehe man von P die Tangenten b und c, von P_1 die Tangenten b_1 und c_1, und verbinde die Schnittpunkte bc_1 undb_1c, sowie bb_1 und cc_1 durch die Geraden o und o', dann sind o und der Schnittpunkt von PP_1 mit o' oder o' und der Schnittpunkt von PP_1 mit o Axe und Centrum.

82. Welches ist der Ort der Centra aller harmonischen Verwandtschaften, in denen ein Kreis M sich selbst und einem Punkte P ein Punkt auf g_∞ verwandt ist?

Der Punkt P mufs aufserhalb des Kreises M liegen. Um P beschreibe man denjenigen Kreis, welcher M rechtwinklig schneidet, so ist er der gesuchte Ort.

Denn ist OO' ein Durchmesser des Kreises P, so wird er durch M harmonisch geteilt (27c); die Polare o von O für M geht durch O'. Nimmt man also O und o als Centrum und Axe, so ist dem Punkte P ein solcher auf g_∞ (4b) und der Kreis sich selbst verwandt.

83. Welches ist der Ort der Centra aller harmonischen Verwandtschaften, in denen der Kreis M sich selbst und seinem Mittelpunkte ein Punkt einer bestimmten Geraden g verwandt ist?

Die Gerade mufs den Kreis M schneiden; der durch die

Schnittpunkte gelegte Kreis K, welcher M rechtwinklig schneidet, ist der gesuchte Ort.

Ein Durchmesser von M wird durch die Schnittpunkte O und O' mit K harmonisch geteilt (27c); g ist die Polare von M für K, also wird OO' durch M und g harmonisch geteilt. Nimmt man also O als Centrum und seine durch O' gehende Polare als Axe, so ist der Kreis sich selbst und dem Punkte M der Schnittpunkt von g mit OO' verwandt.

Aus 82. und 83. folgt: Es giebt im allgemeinen zwei harmonische Verwandtschaften, in denen ein Kreis sich selbst verwandt ist, so dafs der einem gegebenen Punkte verwandte Punkt auf g_∞ und der dem Mittelpunkte verwandte Punkt auf einer gegebenen Geraden liegt.

84. *Eine harmonische Verwandtschaft herzustellen, in welcher einem Vierecke ein Parallelogramm verwandt ist.*

Man verlängere die Gegenseiten, bis sie sich schneiden, ziehe die Verbindungslinie und wähle Centrum und Axe so, dafs jene die Mittellinie beider wird.

85. *Gegeben sei ein Viereck ABP_1P_2; die verwandte Figur $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$ soll ein Kreisviereck sein.*

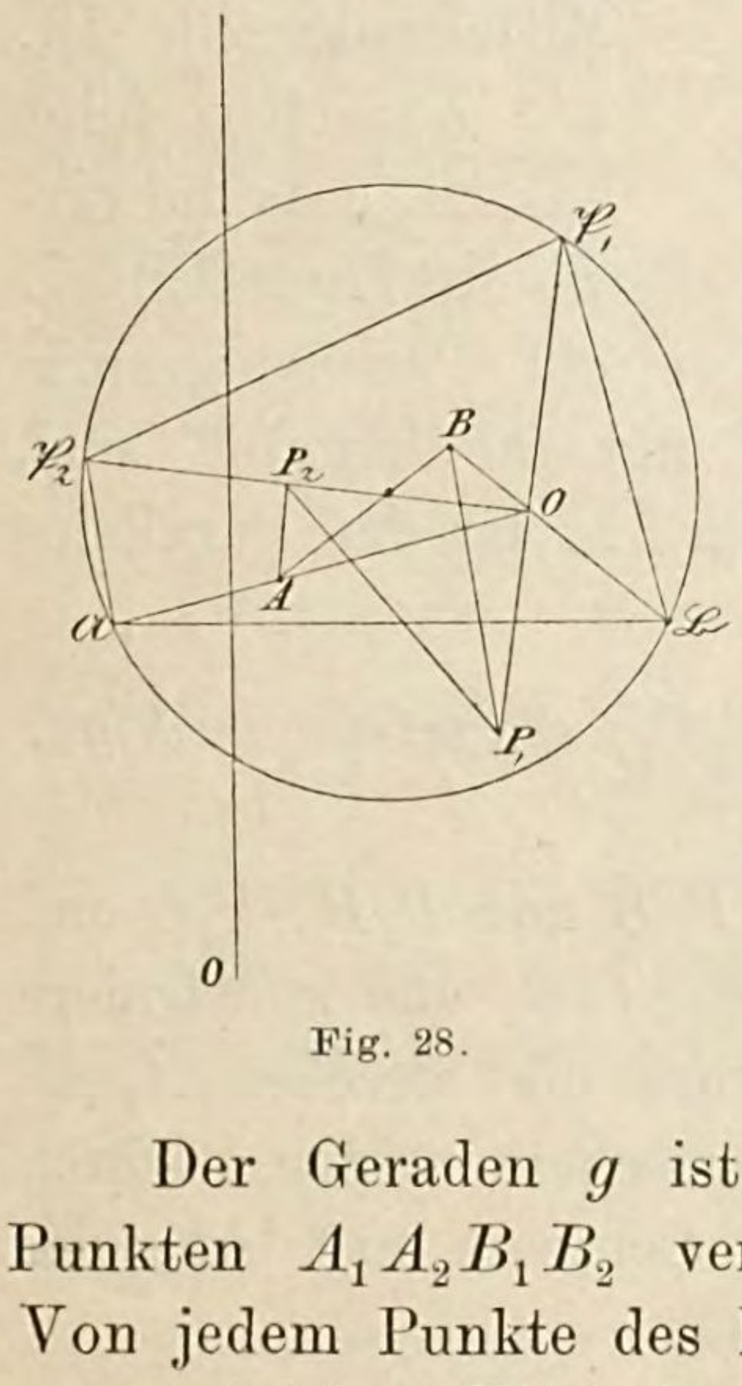


Fig. 28.

Man schneide die Seiten P_1A, P_2A, P_1B, P_2B in A_1, A_2, B_1, B_2 durch eine Gerade g und konstruiere (8b) denjenigen Kreis K, von dessen Punkten A_1A_2 und B_1B_2 unter gleichen Winkel erscheinen, so ist jeder Punkt O desselben Centrum einer harmonischen Verwandtschaft, in welcher dem Viereck ABP_1P_2 ein Kreisviereck verwandt ist. Um die Axe o zu erhalten, fälle man von O eine Senkrechte auf g, schneide mit ihr den Kreis noch in O' und ziehe $o \parallel g$ durch O'.

Der Geraden g ist g_∞ verwandt, also liegen die den Punkten $A_1A_2B_1B_2$ verwandten Punkte $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2$ auf g_∞. Von jedem Punkte des Kreises K sieht man A_1A_2 und B_1B_2 unter gleichen Winkeln, also ist

$$\sphericalangle A_1 O A_2 = B_1 O B_2$$

und daher auch $\sphericalangle \mathfrak{A}_1 O \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{B}_1 O \mathfrak{B}_2$ (79a).

Da $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2$ im Unendlichen liegen, so ist

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1 \parallel O\mathfrak{A}_1,\ \mathfrak{A}\mathfrak{A}_2 \parallel O\mathfrak{A}_2,\ \mathfrak{B}\mathfrak{B}_1 \parallel O\mathfrak{B}_1,\ \mathfrak{B}\mathfrak{B}_2 \parallel O\mathfrak{B}_2$$

also $\sphericalangle \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A} \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B} \mathfrak{B}_2$

oder $\sphericalangle \mathfrak{P}_1 \mathfrak{A} \mathfrak{P}_2 = \mathfrak{P}_1 \mathfrak{B} \mathfrak{P}_2$,

d. h. $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$ liegen auf einem Kreise.

86. *Gegeben ist ein Viereck $ABCD$; die verwandte Figur $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ soll ein Rechteck sein.*

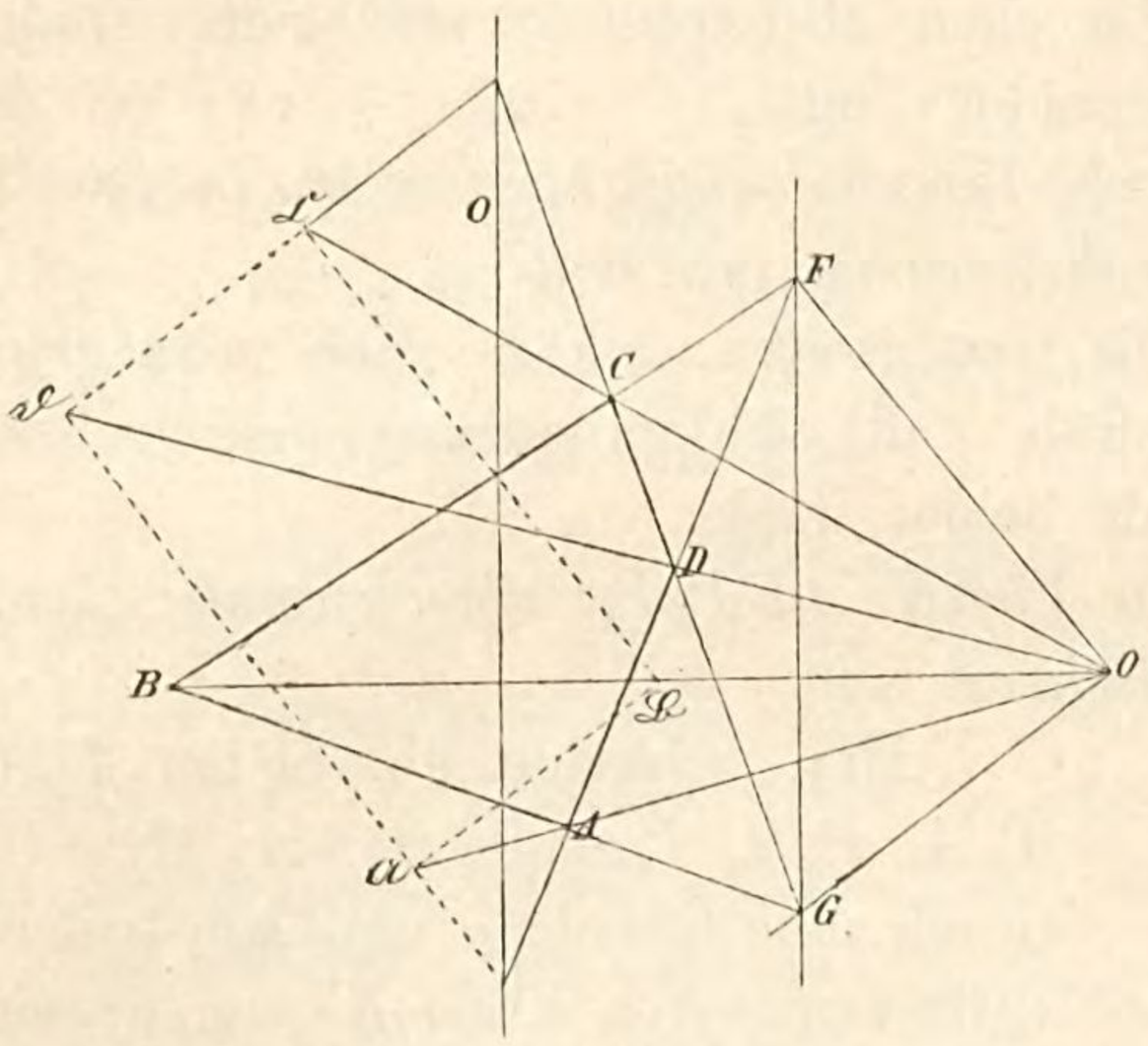


Fig. 29.

Die Gegenseiten AB und CD schneiden sich in G, BC und AD in F. Über GF beschreibe man einen Kreis, nehme auf ihm einen Punkt O als Centrum und die Axe o so, dafs GF von O und o die Mittelsenkrechte ist.

Zunächst folgt aus 84, dafs die verwandte Figur $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ ein Parallelogramm ist, dessen Seiten den Geraden OG und OF parallel sind. Da diese auf einander senkrecht stehen, so ist das Parallelogramm ein Rechteck.

87. *Gegeben sei ein Fünfeck $ABCP_1P_2$; die verwandte Figur soll ein Kreisfünfeck sein.*

I. Man schneide P_1A und P_2A, P_1B und P_2B, P_1C und P_2C mit einer Geraden g in A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 und konstruiere die beiden Punkte O und O', von denen die Strecken A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 unter gleichen Winkeln gesehen werden. Durch O' lege man $o \parallel g$, so sind O und o Centrum und Axe der gesuchten Verwandtschaft.

Beweis wie in 85.

II. Man teile durch die sechs Verbindungslinien der vier Punkte $ABCD$ die Ebene in die Gebiete α, β, γ; E liege in einem der Gebiete α. Die drei Diagonalpunkte des Vierecks $ABCD$ seien FGH. Man schneide FG mit EA und EC in J und K, beschreibe über FG und JK Kreise; diese müssen sich in zwei Punkten O und O' schneiden. Man wähle O oder O' als Centrum und FG als Mittellinie der Verwandtschaft.

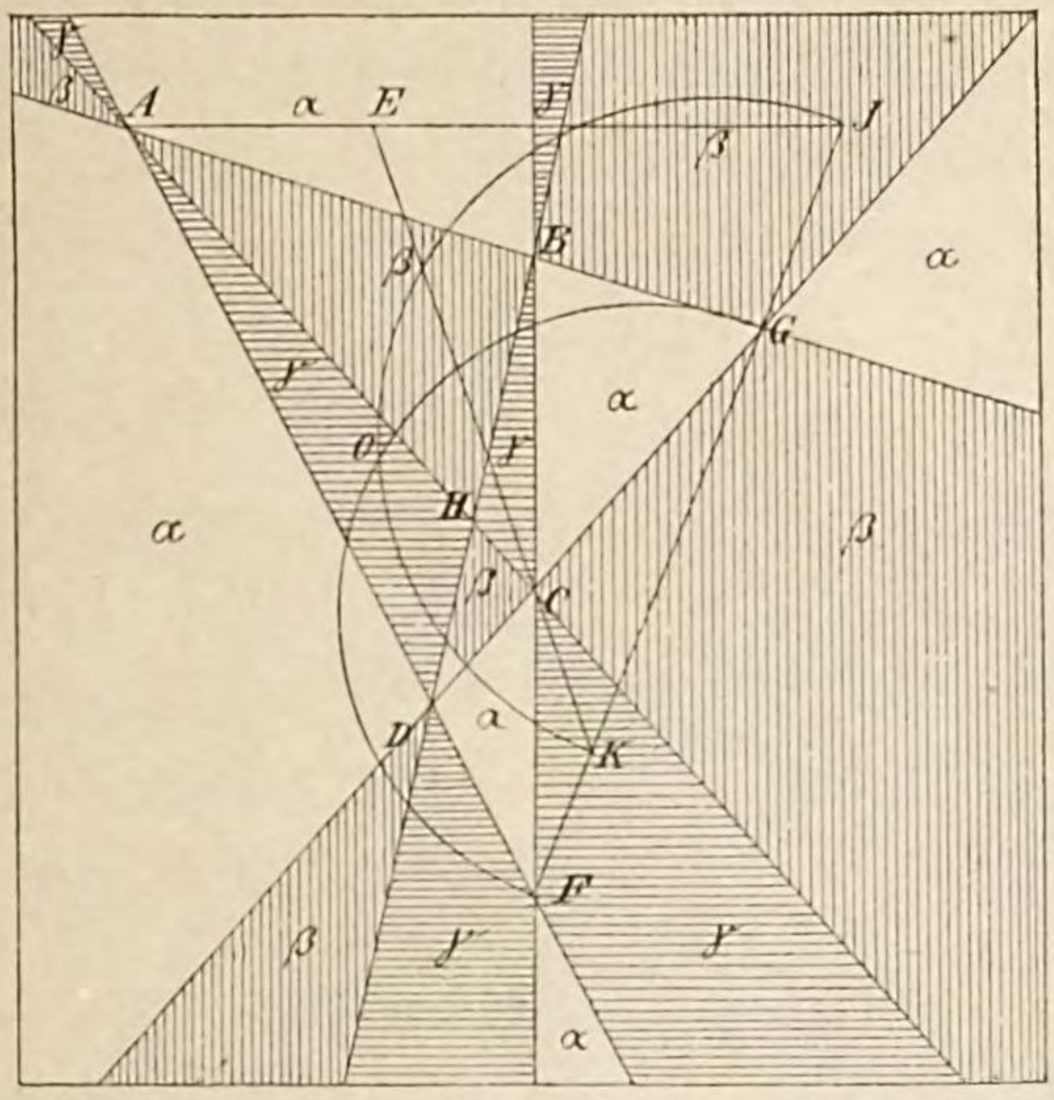


Fig. 29 a.

Aus 86. folgt zunächst, dafs das verwandte Viereck $\mathfrak{ABCD}$ ein Rechteck ist. K ist der Schnittpunkt von AE und OK; der ihm verwandte Punkt $\mathfrak{K}$ liegt deshalb auf der verwandten Geraden $\mathfrak{AE}$ und auch auf OK, aber im Unendlichen, also ist $\mathfrak{AE} \parallel OK$ und ebenso $\mathfrak{CE} \parallel OJ$, d. h. $\sphericalangle \mathfrak{AEC} = 90^0$ und $\mathfrak{E}$ liegt auf dem um das Rechteck $\mathfrak{ABCD}$ beschriebenen Kreise.

Liegt E in einem der Räume β, so schneide man GH mit EA und ED in K_1 und J_1, dann schneiden sich die Kreise über GH und K_1J_1 in zwei Punkten $O'O_1'$. Legt man $o_1 \parallel GH$ durch O_1', so sind O_1 und o_1 Centrum und Basis.

Liegt endlich E in einem der Räume γ, so schneide man HF mit EA und EB in K_2 und J_2; dann schneiden sich die Kreise über HF und K_2J_2 in O_2 und O_2'. Legt man $o_2 \parallel HF$ durch O_2', so siud O_2 und o_2 Centrum nnd Basis.

Die genannte Konstruktion liefert, wie die Anschauung ergiebt, die Punkte OO' bez. O_1O_1' oder O_2O_2' stets reell.

88. *Gegeben ist ein Viereck; die verwandte Figur soll ein Rhombus sein.*

Die Gegenseiten des Vierecks $ABCD$ schneiden sich in E und F; die Diagonalen AC und BD schneiden EF in H

und J. Ueber HJ als Durchmesser beschreibe man einen Kreis, nehme auf ihm O als Centrum und die Axe o so an, dafs der

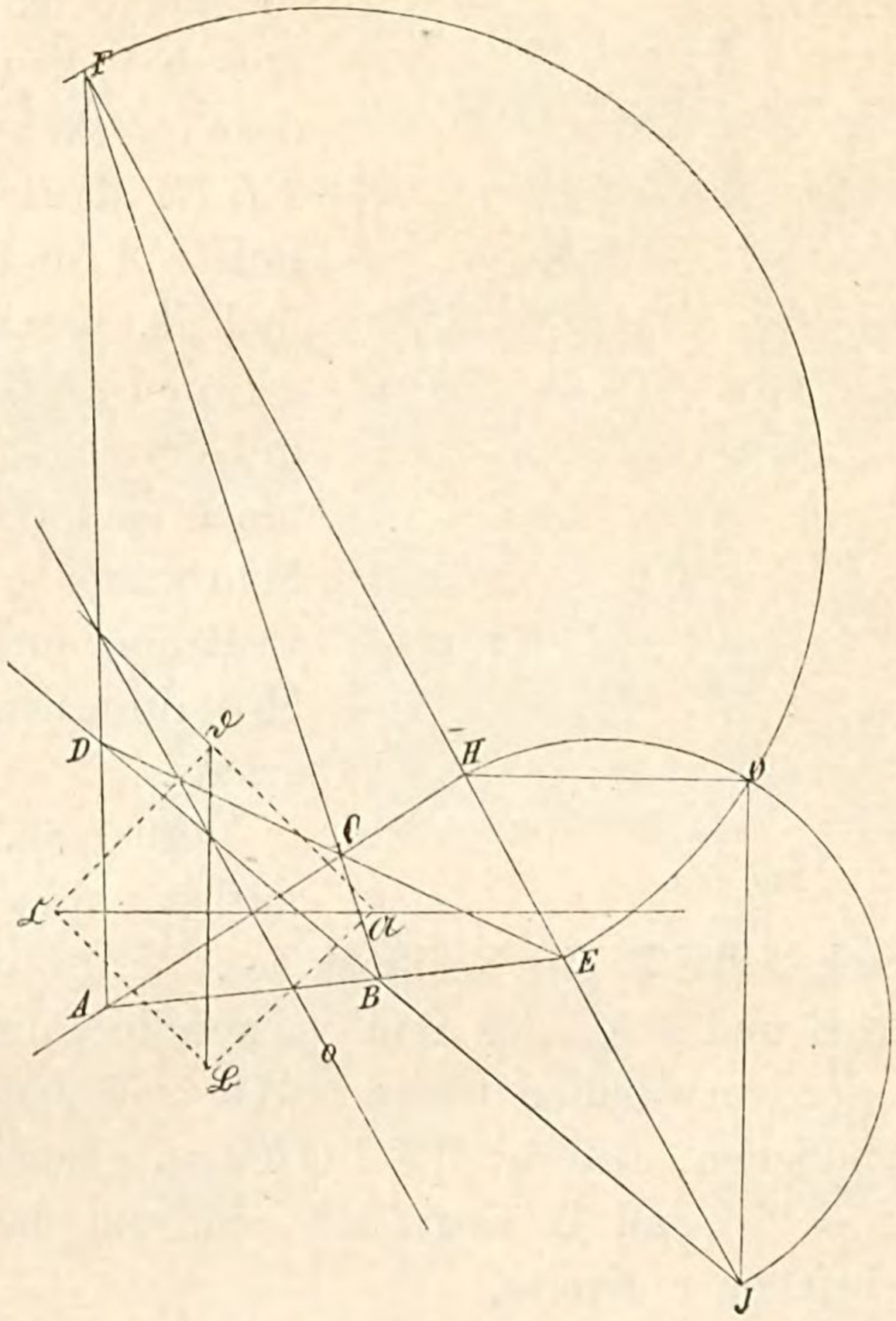


Fig. 30.

EF die g_∞ verwandt wird. Dem Vierecke $ABCD$ ist ein Parallelogramm verwandt, welches ein Rhombus sein mufs, da die Diagonalen auf einander senkrecht stehen.

89. Beschreibt man noch über EF einen Kreis, so mufs dieser denjenigen über HJ in zwei Punkten schneiden. Wählt man einen dieser Punkte als Centrum, so wird der Rhombus ein Quadrat. Es ist also die Aufgabe gelöst.

Gegeben ist ein Viereck, die verwandte Figur soll ein Quadrat sein. (Fig. 30).

Man findet das Centrum O als Durchschnitt der Kreise über EF und AJ.

90. *Gegeben ist ein Fünfeck $ABCKL$; in das verwandte Fünfeck soll sich ein Kreis zeichnen lassen.*

Es schneiden sich AK und CL in D, ferner die Gegenseiten von $ABCD$ in E und F; man ziehe die Diagonalen AC und BD, die sich in G und EF in H und J schneiden, schneide AB mit KL in M, EF mit GK und GM in N und

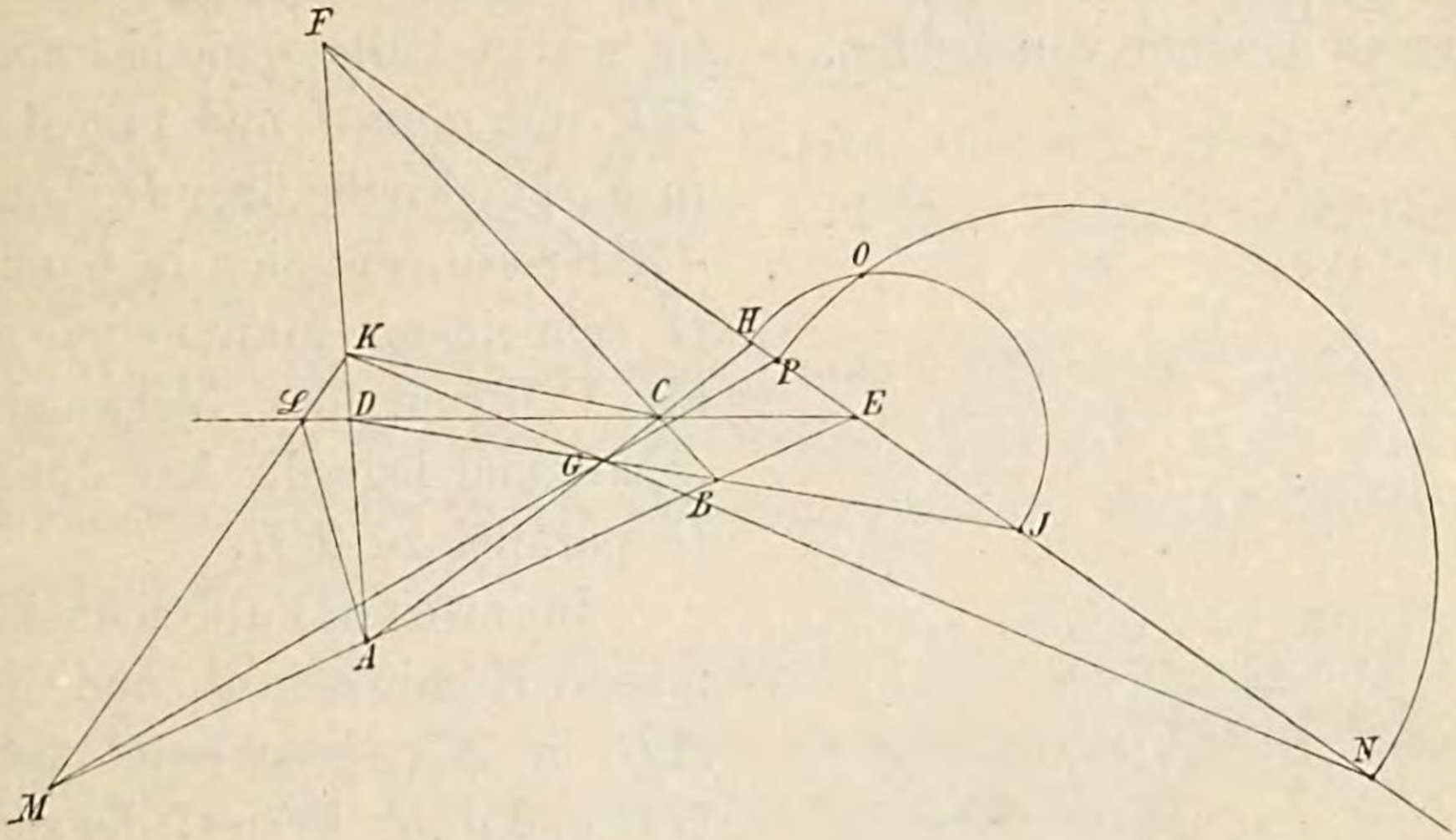


Fig. 30a.

P und beschreibe über HJ und NP zwei Kreise. Diese mögen sich in O und O' treffen. Wählt man O als Centrum und o durch O' parallel zu EF als Axe, so läfst sich in das verwandte Fünfeck $\mathfrak{ABCKL}$ ein Kreis zeichnen.

Nach 88. wird $\mathfrak{ABCD}$ ein Rhombus, also läfst sich an vier Seiten des Fünfecks ein Berührungskreis legen, dessen Mittelpunkt $\mathfrak{G}$ ist. Da aber $\sphericalangle \mathfrak{KGM}$ ein Rechter ist, so mufs dieser Kreis auch $\mathfrak{KM}$ berühren, denn jede Tangente dieses Kreises zwischen den parallelen Tangenten $\mathfrak{AB}$ und $\mathfrak{CD}$ spannt am Mittelpunkte einen rechten Winkel.

Damit die Schnittpunkte O und O' reell sind, mufs von den Punkten N und P der eine auf der Strecke HJ, der andere auf der Verlängerung liegen. Dies ist aber der Fall, wenn die fünfte Seite KL eine der Seiten des Vierecks $ABCD$ selbst, die Gegenseite aber in der Verlängerung schneidet. Man hat daher unter den fünf Geraden vier so zu wählen, dafs sie ein Viereck bilden, in welchem die fünfte Gerade die eine Seite selbst, die Gegenseite in der Verlängerung schneidet. Dies aber ist stets möglich.

91. *Gegeben sind vier Punkte $ABCD$ und durch A die Gerade a; die verwandte Figur soll so beschaffen sein, daſs das verwandte Viereck $\mathfrak{ABCD}$ ein Rechteck wird und der um dasselbe beschriebene Kreis die verwandte Gerade $\mathfrak{a}$ berührt.*

Die Gerade a liegt entweder im Winkel BAC oder CAD oder in keinem von beiden. — Im ersten Falle schneide man HF mit a in J und mit AD in K, beschreibe über HF und JK Kreise, die sich in O und O' schneiden. Man nehme O als Centrum der Verwandtschaft und lege die Axe durch O' parallel zu FH.

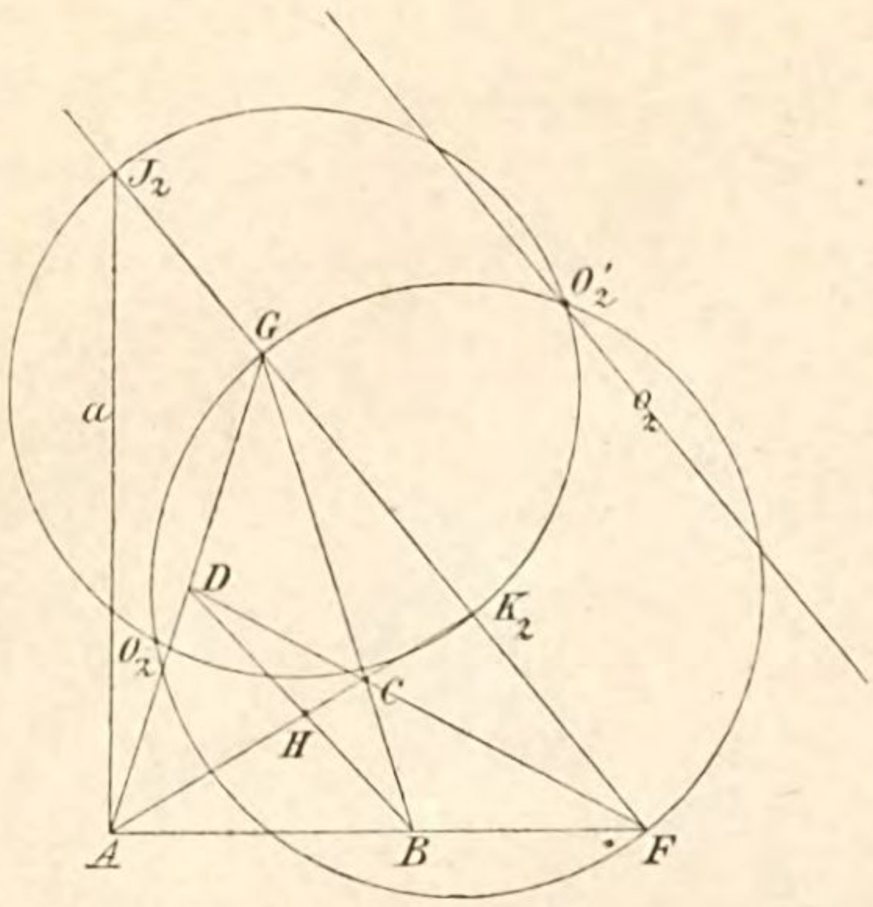


Fig. 31.

Im zweiten Falle schneide man GH mit a in J_1 und mit AB in K_1, beschreibe über GH und J_1K_1 Kreise, die sich in O_1 und O_1' schneiden, nehme O_1 als Centrum und lege die Axe durch O_1' parallel zu GH.

Im dritten Falle schneide man FG mit a in J_2 und mit AC in K_2, beschreibe über FG und J_2K_2 Kreise, die sich in O_2 und O_2' schneiden, nehme O_2 als Centrum und lege die Axe o_2 durch O_2' parallel zu FG.

92. *Gegeben sind vier Gerade $abcd$ und auf a der Punkt P; die verwandten Geraden $\mathfrak{abcd}$ sollen einen Rhombus bilden, dessen eingeschriebener Kreis durch den verwandten Punkt $\mathfrak{P}$ geht.*

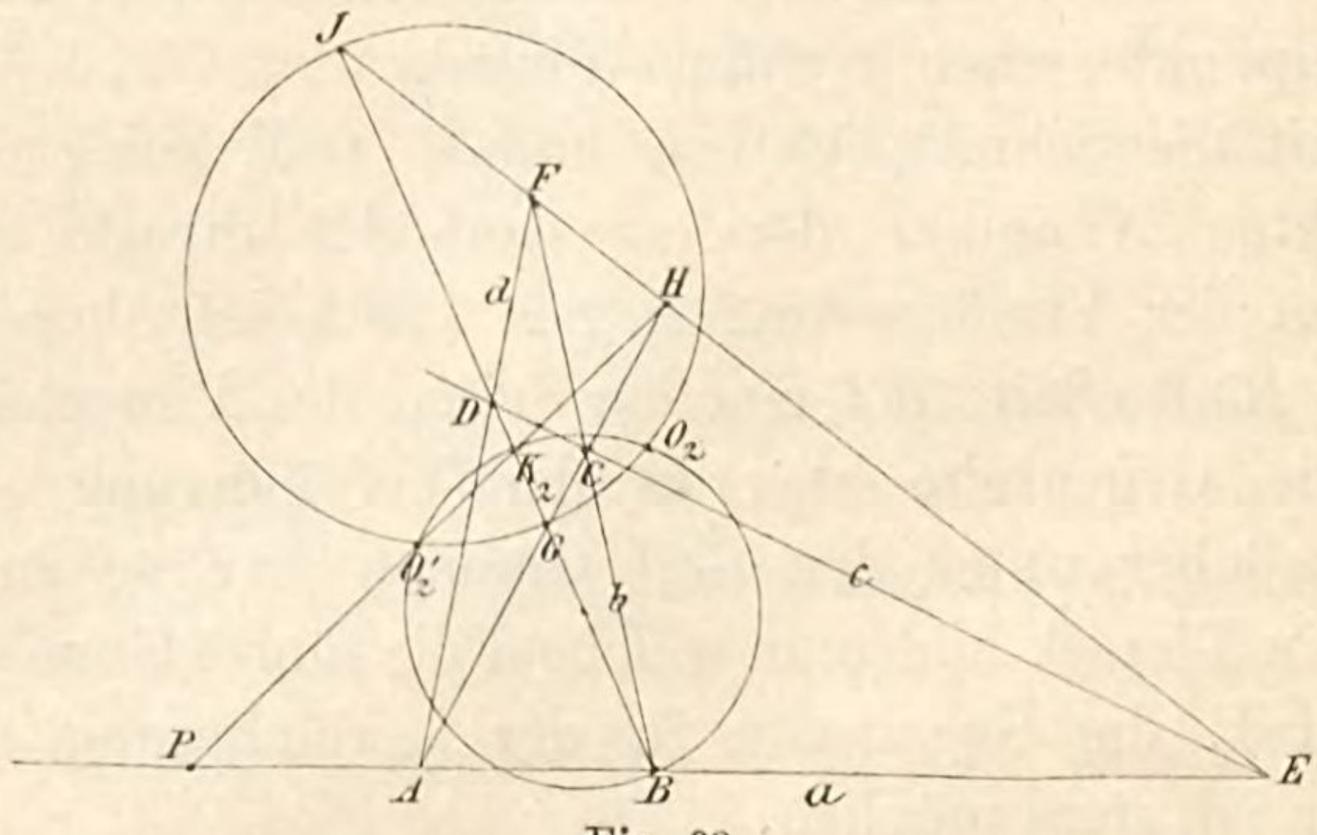


Fig. 32.

Der Punkt P liegt entweder auf der Strecke AB oder BE oder auf keiner von beiden.

Im ersten Falle schneide man EF mit GP in K, beschreibe über HJ und EK Kreise, die sich in O und O' treffen, nehme O als Centrum und lege die Axe o durch O' parallel zu EF.

Im zweiten Falle schneide man AC mit JP in K_1, beschreibe über GH und AK_1 Kreise, die sich in O_1 und O_1' treffen, nehme O_1 als Centrum und lege die Axe o_1 durch O_1' parallel zu AC.

Im dritten Falle schneide man GJ mit HP in K_2, beschreibe über GJ und BK_2 Kreise, die sich in O_2 und O_2' schneiden, nehme O_2 als Centrum und lege die Axe durch O_2' parallel zu GJ.

93. *Gegeben sind drei Punkte ABC und durch A und B die Geraden a und b; der durch die verwandten Punkte beschriebene Kreis soll die verwandten Geraden berühren.*

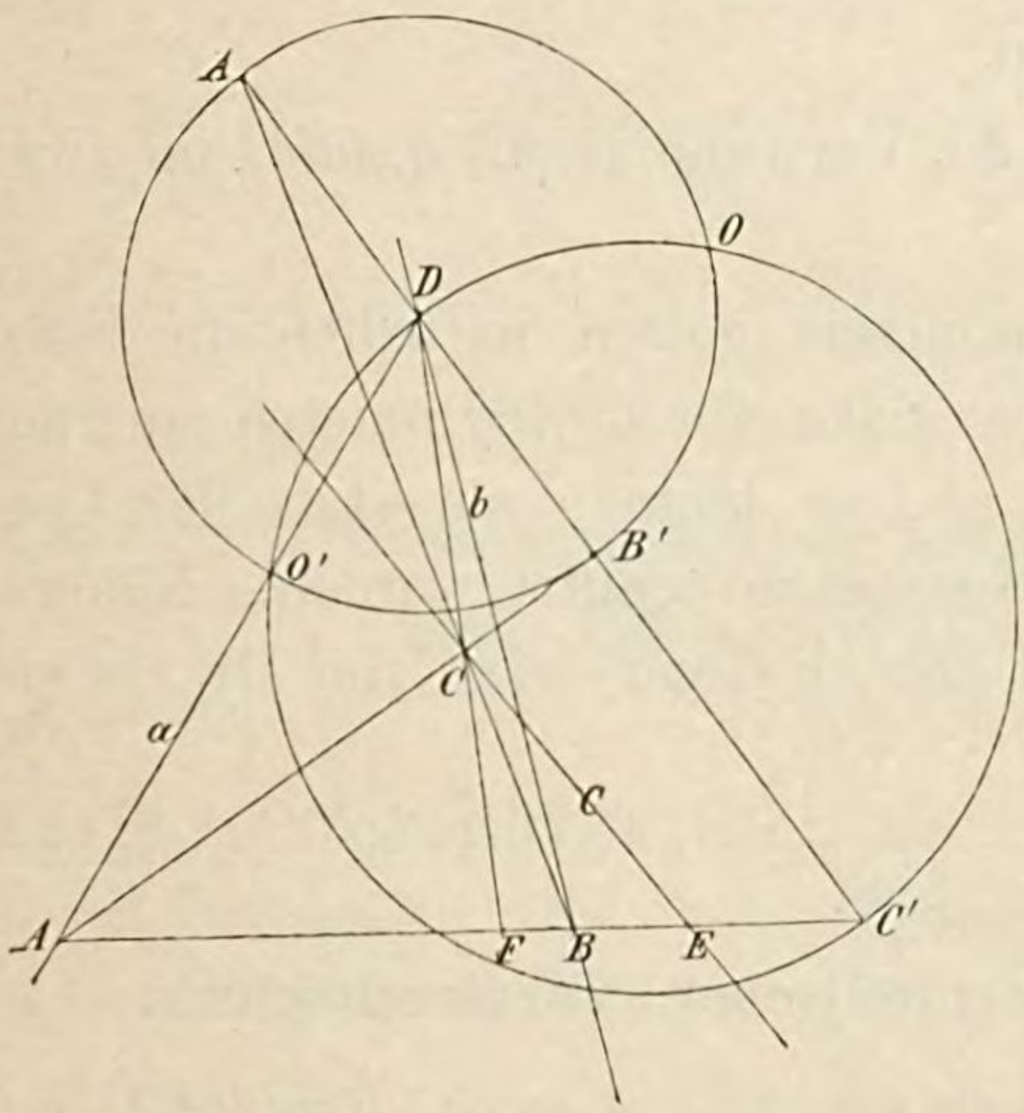


Fig. 33.

Die Geraden a und b schneiden sich in D; ziehe AC und BC lege durch D eine Gerade, welche AB, AC, BC in den Punkten C', B', A' so schneidet, dafs C' und D durch A' und B' getrennt sind, beschreibe über $C'D$ und $A'B'$ Kreise, die sich in O und O' schneiden, nehme O als Centrum und lege die Axe durch O' parallel zu $C'D$.

Sind $\mathfrak{ABCDab}$ die verwandten Elemente, so sind die Winkel $\mathfrak{DAB}$, $\mathfrak{DBA}$, $\mathfrak{ACB}$ rechte und daher berührt der durch $\mathfrak{ABC}$ gehende Kreis die Geraden $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$.

94. *Gegeben sind drei Gerade abc und auf a und b die Punkte A und B; die verwandten Geraden sollen einen Kreis in den verwandten Punkten berühren.* Fig. 33.

AB werde von c in E geschnitten, $ABEF$ seien harmonisch, DF treffe c in C, man ziehe AC und BC, schneide diese und AB mit einer Geraden durch D in B'; A', C', beschreibe über $A'B'$ und $C'D$ Kreise, die sich O und O' treffen, nehme O als Centrum und lege die Axe durch O' parallel zu $A'B'$.

95. *Die Symmetrie.*

Wenn bei einer harmonischen Verwandtschaft das Centrum im Unendlichen, aber auf einer zur Axe senkrechten Richtung liegt, so liegen zwei verwandte Figuren symmetrisch zur Axe, d. h. wenn man die eine Halbebene um die Axe dreht und mit der anderen Halbebene zur Deckung bringt, so fallen die verwandten Figuren aufeinander.

Nimmt man die unendlich entfernte Gerade g_∞ zur Axe einer harmonischen Verwandtschaft, so liegen zwei verwandte Punkte gleichweit entfernt vom Centrum. Jede Figur kann man durch Verschiebung in der Ebene mit der verwandten Figur zur Deckung bringen.

Im ersten Falle heifst die Verwandtschaft *axiale*, im zweiten *centrale Symmetrie.*

Für jede Art von Symmetrie gelten natürlich die Sätze 79a bis d. Leitet man diese Sätze für die Symmetrie aus den geometrischen Grundsätzen ab, so können sie statt der Congruenz als Fundament der Geometrie benutzt werden. Näheres hierüber im „Leitfaden der ebenen Geometrie“ von Dr. Hubert Müller.

§ 8.

Anwendungen der harmonischen Verwandtschaft.

96. *Die Verbindungslinien ab, cd, ef eines Punktes O mit den Paaren AB, CD, EF von Gegenecken eines vollständigen Vierseits sind drei Strahlenpaare einer Involution.*

Man wähle O als Centrum einer harmonischen Verwandtschaft und die Axe o so, dafs der EF die g_∞ verwandt ist, dann ist dem Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ verwandt, dessen Seiten zu OE und OF parallel sind. (84). Aus den Proportionen

$$O\mathfrak{F} : O\mathfrak{G} = \mathfrak{H}\mathfrak{F} : \mathfrak{A}\mathfrak{F} = \mathfrak{I}\mathfrak{F} : \mathfrak{B}\mathfrak{G} = \mathfrak{I}\mathfrak{F} : \mathfrak{C}\mathfrak{F}$$

folgt:
$$\mathfrak{A}\mathfrak{F} \,.\, \mathfrak{I}\mathfrak{F} = \mathfrak{C}\mathfrak{F} \,.\, \mathfrak{H}\mathfrak{F}.$$

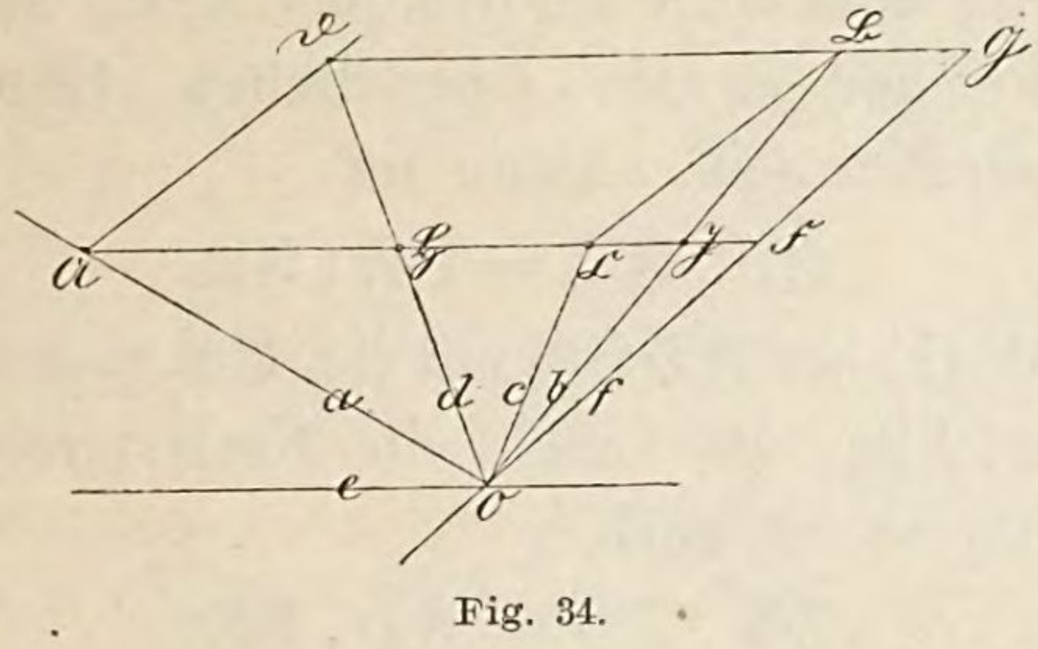


Fig. 34.

Die Schnittpunkte der mit e parallelen Geraden $\mathfrak{A}\mathfrak{F}$ der Strahlen $abcdef$ sind drei Punktpaare einer Involution, deren Centralpunkt $\mathfrak{F}$ ist, also bilden $abcdef$ drei Strahlenpaare einer Involution.

97. *Die Schnittpunkte AB, CD, EF einer Geraden g mit den Paaren von Gegenseiten eines vollständigen Vierecks $MNPQ$ sind drei Punktpaare einer Involution.*

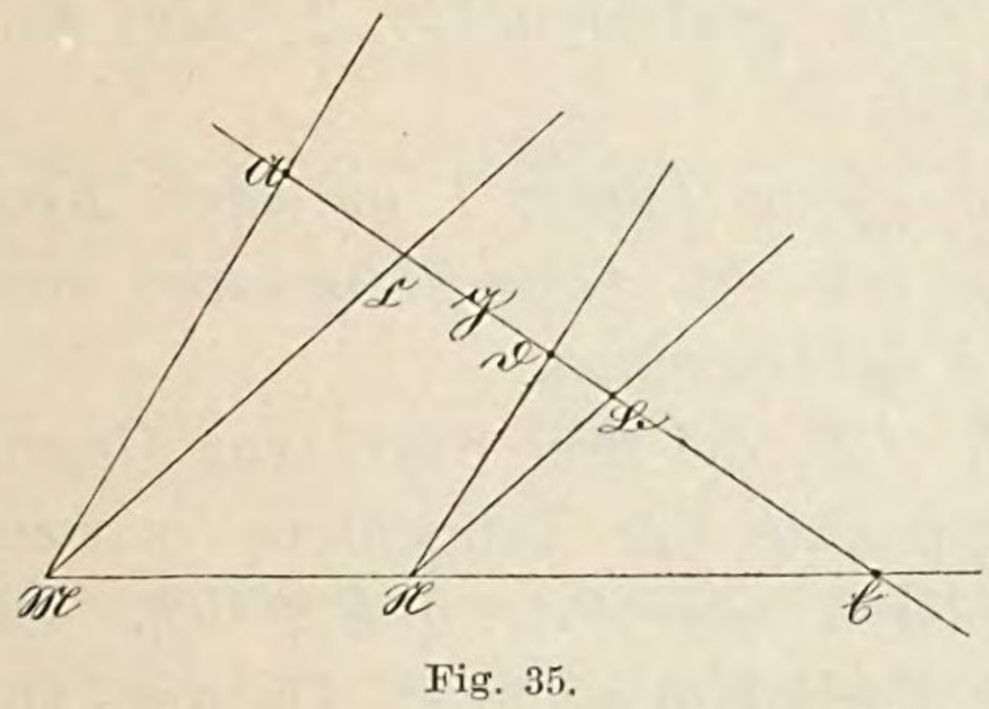


Fig. 35.

Man stelle eine solche harmonische Verwandtschaft her, dafs der Geraden PQ die g_∞ verwandt ist, dann ist, wenn man mit

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{E}\mathfrak{F}\mathfrak{M}\mathfrak{N}$$

die zu

$$ABCDEFMN$$

verwandten Punkte und mit $\mathfrak{g}$ die zu g verwandte Gerade bezeichnet,

$$\mathfrak{M}\mathfrak{E} : \mathfrak{N}\mathfrak{E} = \mathfrak{A}\mathfrak{E} : \mathfrak{D}\mathfrak{E} = \mathfrak{C}\mathfrak{E} : \mathfrak{B}\mathfrak{E},$$

also
$$\mathfrak{A}\mathfrak{E} \,.\, \mathfrak{B}\mathfrak{E} = \mathfrak{C}\mathfrak{E} \,.\, \mathfrak{D}\mathfrak{E}.$$

Da $\mathfrak{F}$ im Unendlichen liegt, so sind $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{E}\mathfrak{F}$ Punktpaare einer Involution mit dem Centralpunkte $\mathfrak{E}$; also sind auch $ABCDEF$ in Involution. (79f).

98. *Jede Gerade g wird von einem Kreise M und den Gegenseiten eines eingeschriebenen Vierecks $ABCD$ in den Punktpaaren einer Involution geschnitten.*

Die Schnittpunkte von g mit M und den Seitenpaaren AB und CD, AD und BC seien EF, GH, JK. Man stelle eine solche harmonische Verwandtschaft her, dafs der Kreis sich selbst und dem Punkte K ein Punkt auf g_∞ verwandt ist (82). Die den Punkten $ABCDEFGHJK$ und der Geraden

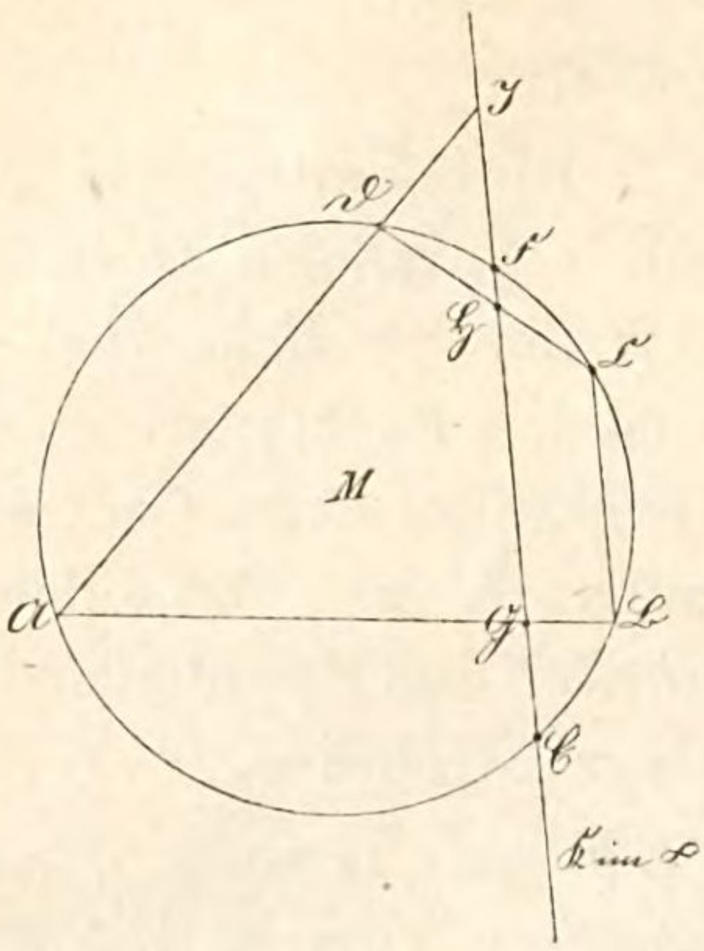


Fig. 36.

g verwandten Elemente seien

$$\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}\,\mathfrak{E}\,\mathfrak{F}\,\mathfrak{G}\,\mathfrak{H}\,\mathfrak{J}\,\mathfrak{K} \text{ und } \mathfrak{g}.$$

Letztere wird der Geraden $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, auf welcher $\mathfrak{K}$ im Unendlichen liegt, parallel sein. Dann ist

$$\mathfrak{J}\mathfrak{A} \,.\, \mathfrak{J}\mathfrak{D} = \mathfrak{J}\mathfrak{F} \,.\, \mathfrak{J}\mathfrak{E}.$$

Weil aber $\mathfrak{A}\mathfrak{D}\mathfrak{H}\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{A}\mathfrak{D}\mathfrak{C}\mathfrak{B}$ gleichwinklig, also auch ein Kreisviereck ist, so ist auch

$$\mathfrak{J}\mathfrak{A} \,.\, \mathfrak{J}\mathfrak{D} = \mathfrak{J}\mathfrak{H} \,.\, \mathfrak{J}\mathfrak{G},$$

also

$$\mathfrak{J}\mathfrak{F} \,.\, \mathfrak{J}\mathfrak{E} = \mathfrak{J}\mathfrak{H} \,.\, \mathfrak{J}\mathfrak{G},$$

d. h. $\mathfrak{E}\mathfrak{F}\mathfrak{G}\mathfrak{H}\mathfrak{J}\mathfrak{K}$ sind drei Punktpaare einer Involution mit dem Centralpunkte $\mathfrak{J}$, also sind auch $EFGHJK$ in Involution.

98a. *Die Tangenten von einem Punkte P an einen Kreis M und die Verbindungslinien mit den Gegeneckenpaaren eines umgeschriebenen Vierseits sind in Involution.*

I. Es seien AA_1, BB_1, CC_1 die drei Paare von Gegenecken, DD_1 die Berührungspunkte der Tangenten; es seien ferner aa_1, bb_1, cc_1 die Polaren von AA_1, BB_1, CC_1. Die Verbindungsgerade DD_1 ist die Polare p von P. Da aa_1, bb_1, cc_1 die drei Paare von Gegenseiten eines vollständigen dem Kreise M eingeschriebenen Vierecks sind, so werden sie von p in einer Involution geschnitten, zu welcher auch das Punktpaar DD_1 gehört. Die Polaren der Punktpaare einer Involution bilden aber die Strahlenpaare einer Strahleninvolution; denn die Strahlenpaare, welche den Mittelpunkt M mit den Punktpaaren der Punktinvolution verbinden, bilden eine Strahleninvolution; auf diesen Verbindungslinien stehen aber die Polaren jener Punkte senkrecht, bilden also dieselben Winkel und das Büschel von Polaren ist der Strahleninvolution im Mittelpunkte kongruent, also selbst eine Involution.

II. Der Beweis dieses Satzes läfst sich auch durch Benutzung der harmonischen Verwandtschaft ohne Polarisation führen.

Dazu braucht man folgenden Hilfssatz:

Zieht man von einem Punkt P an einen Kreis zwei Tangenten und schneidet sie durch zwei parallele Tangenten a und b in den Punkten EG und FH, so ist für jede Lage von a und b das Produkt PE . PH = PF . PG konstant.

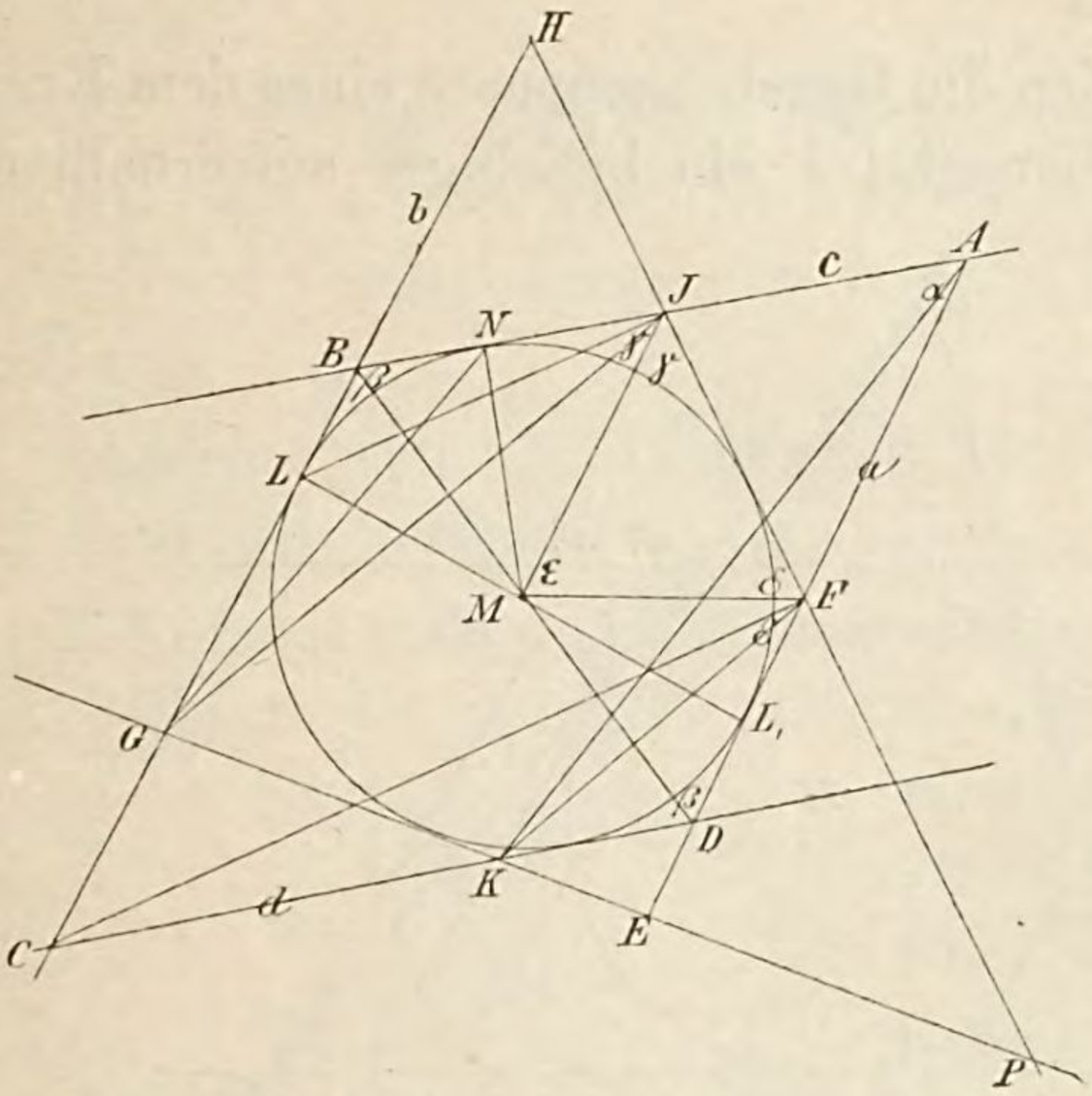


Fig. 36 a.

Sind c und d zwei andere parallele Tangenten, welche a und b in den Punkten AB und CD schneiden und ist J der Schnittpunkt von c mit PF, K derjenige von d mit PE, so ist, wenn N und L_1 Berührungspunkte sind:

$$\sphericalangle \varepsilon = \tfrac{1}{2}\, NML_1$$
$$= \tfrac{1}{2}\,(180^0 - \alpha)$$
$$= 90^0 - \frac{\alpha}{2}$$
$$= \sphericalangle \beta.$$

Daher haben die Dreiecke BMJ, JMF und FMD gleiche Winkel und sind ähnlich, folglich gelten die Proportionen

$$BJ : BM = DM : DF$$

oder, weil $DM = BM$, $BM^2 = BJ \,.\, DF$.

Da auch $$BM^2 = BN \,.\, BA$$

wegen des rechtwinkligen Dreiecks ABM und $BN = BL$, $AB = CD$ ist, so folgt

$$BJ : BL = CD : DF$$

und daraus $$LJ \parallel CF;$$

ebenso $$KA \parallel GN.$$

Aus den Proportionen

$$BL : BJ = DF : CD$$

und $$BN : BG = DK : AD$$

folgt $$BJ : BG = DK : DF$$

und $$GJ \parallel FK.$$

Folglich aus ähnlichen Dreiecken

$$PF : PK = PJ : PG$$

oder

$$PF \,.\, PG = PK \,.\, PJ.$$

Mittelst des bewiesenen Hilfssatzes ergiebt sich der Hauptsatz auf folgende Art:

AC, BD, EF seien die Gegeneckenpaare eines dem Kreise M umgeschriebenen Vierseits, P ein beliebiger aufserhalb des

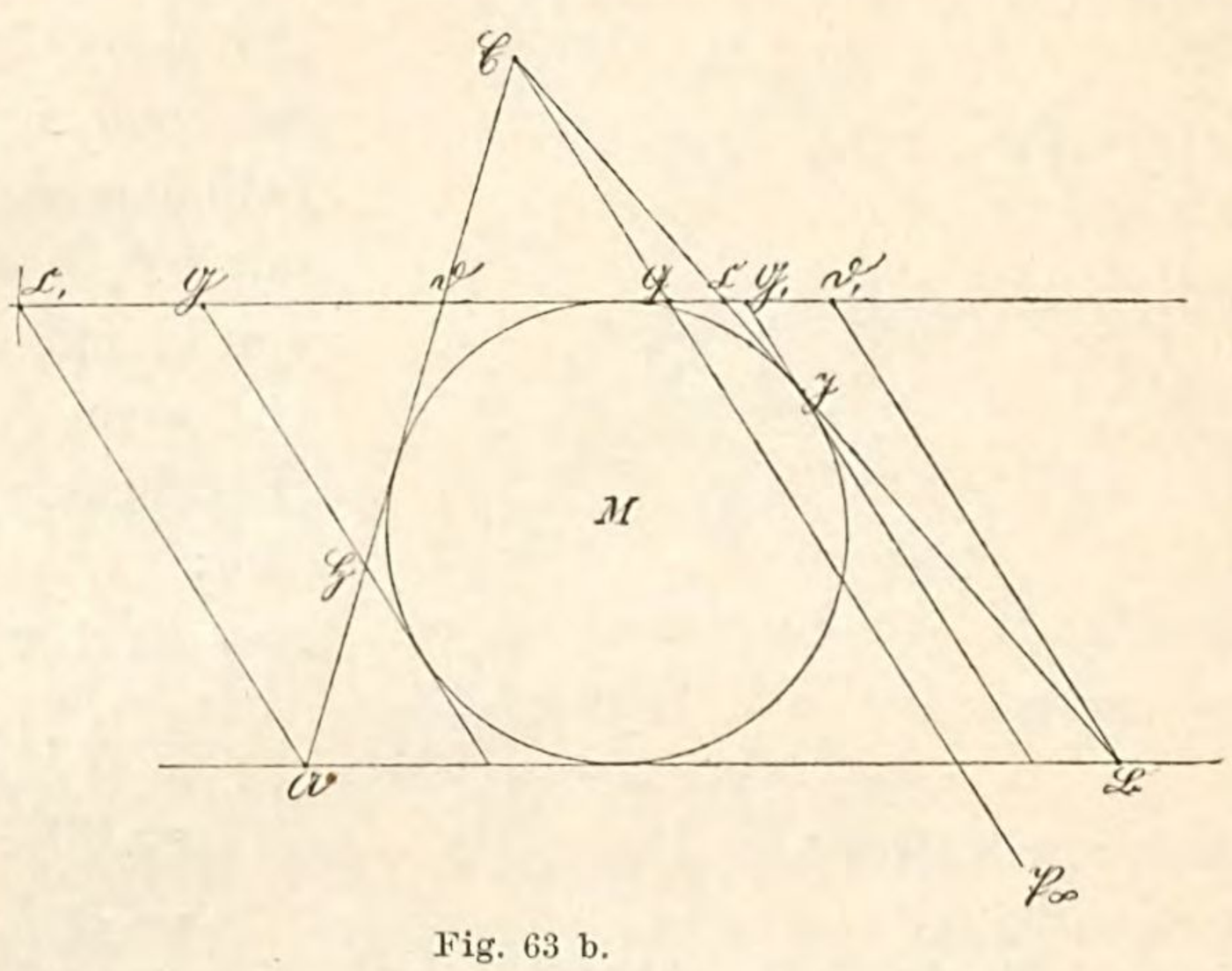


Fig. 63 b.

Kreises liegender Punkt. Man verwandle durch harmonische Verwandtschaft den Kreis in sich selbst und die Gerade PF in die unendlich ferne Gerade g_∞, $ABCDE$ in $\mathfrak{ABCDE}$. Durch den zu P verwandten Punkt $\mathfrak{P}_\infty$ gehen die zu $\mathfrak{EP}_\infty$ parallelen Geraden $\mathfrak{AC}_1$, $\mathfrak{BD}_1$ und die gleichfalls zu $\mathfrak{EP}_\infty$ parallelen Tangenten $\mathfrak{GH}$ und $\mathfrak{G}_1\mathfrak{J}$. Wenn $\mathfrak{Q}$ der Schnittpunkt von $\mathfrak{CD}$ und $\mathfrak{EP}_\infty$ ist, so hat man die Proportionen

$$\mathfrak{QD} : \mathfrak{QG} = \mathfrak{ED} : \mathfrak{EH}$$

$$\mathfrak{QD}_1 : \mathfrak{QG}_1 = \mathfrak{EB} : \mathfrak{EJ}$$

Da aber nach dem Hilfssatze

$$\mathfrak{EB} \,.\, \mathfrak{ED} = \mathfrak{EJ} \,.\, \mathfrak{EH},$$

so ist auch

$$\mathfrak{QD} \,.\, \mathfrak{QD}_1 = \mathfrak{QG} \,.\, \mathfrak{QG}_1$$

und ebenso

$$\mathfrak{QC} \,.\, \mathfrak{QC}_1 = \mathfrak{QG} \,.\, \mathfrak{QG}_1,$$

also sind $\mathfrak{CC}_1$, $\mathfrak{DD}_1$, $\mathfrak{GG}_1$ Punktpaare einer Involution, deren

Centralpunkt $\mathfrak{Q}$ ist. Nach den Gesetzen der harmonischen Verwandtschaft sind daher die Strahlen

$$P\,(AC,\ BD,\ GG_1,\ EF)$$

auch in Involution. Die Geraden PG und PG_1 sind Tangenten des Kreises.

99. *Diejenigen Geraden, welche einen Punkt P von den Punkten eines Kreises und den Gegenseitenpaaren eines ihm eingeschriebenen Vierecks harmonisch trennen, schneiden sich in einem Punkte Q.*

Zunächst soll die Richtigkeit für einen ganz speziellen Fall bewiesen werden.

EFG seien die drei Diagonalpunkte des Vierecks $ABCD$. Man halbiere die in EFG entstehenden Winkel. Als Peripheriewinkel ist $ADG = BCG$; ferner $\sphericalangle DGH = CGJ$, also $\sphericalangle DHG = CJG$, und ebenso $\sphericalangle DKL = CLK$, also sind die Dreiecke FHJ und FKL gleichschenklig, $HJ \parallel KL$, und es schneiden sich die Halbierungslinien der Winkel in EFG zweimal zu je drei in zwei im Unendlichen liegenden Punkten P_∞ und Q_∞. Ist M der Kreismittelpunkt, so ist $MP_\infty \perp MQ_\infty$, also sind P_∞ und Q_∞ konjugierte Punkte. Da aber EP_∞ und EQ_∞, FP_∞ und FQ_∞, GP_∞ und GQ_∞ die drei Seitenpaare harmonisch trennen, so ist der Satz für den speziellen Fall bewiesen.

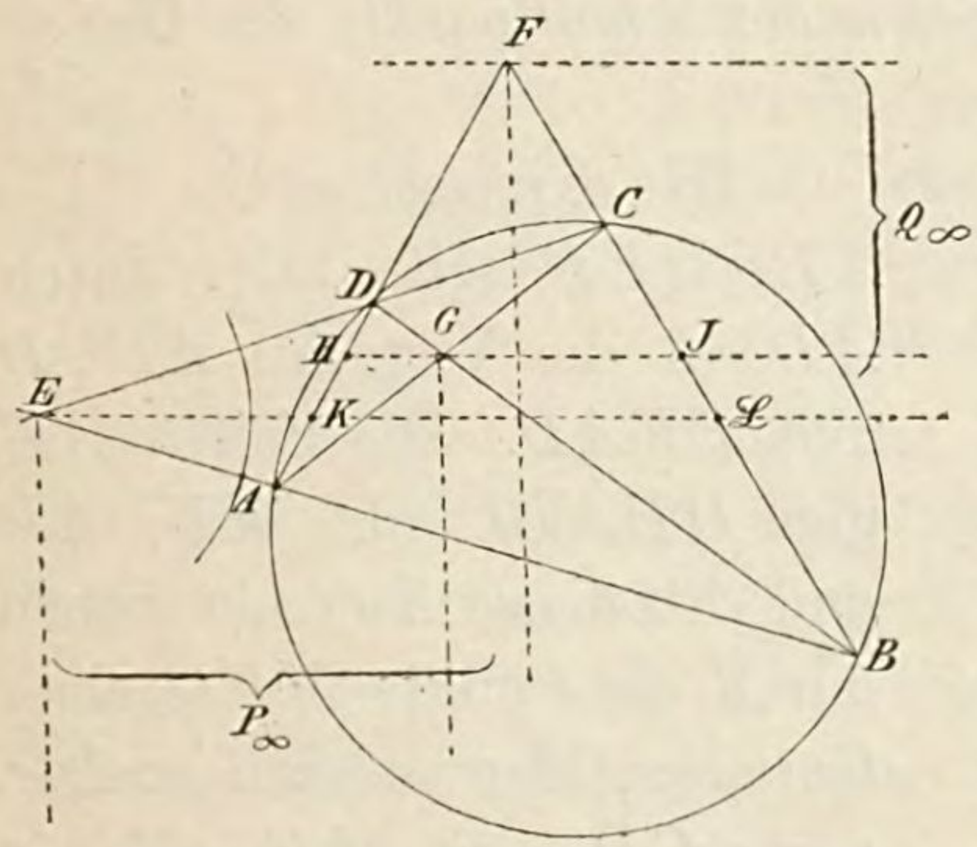


Fig. 37.

Auf ihn läfst sich der allgemeine Fall zurückführen. Die Geraden, welche den beliebigen Punkt P von den Seitenpaaren $(AB,\ CD)$ und dem Kreise M harmonisch trennen, seien e und p und mögen sich in Q treffen. Wenn die Gerade PQ den Kreis trifft, so folgt der Satz unmittelbar aus 98; wenn aber PQ den Kreis nicht trifft, so stelle man eine solche harmonische Verwandtschaft her, daſs der Kreis sich selbst und der Geraden PQ die g_∞ verwandt ist. Den Punkten P

und Q sind die bezüglich des Kreises konjugierten Punkte $\mathfrak{P}_\infty$ und $\mathfrak{Q}_\infty$ und den Punkten $ABCDEFG$ sind $\mathfrak{ABCDEFG}$ verwandt. Da nun $\mathfrak{EA}$ und $\mathfrak{EC}$ durch $\mathfrak{EP}_\infty$ und $\mathfrak{EQ}_\infty$ harmonisch getrennt sind, $\mathfrak{EP}_\infty \perp \mathfrak{EQ}_\infty$ ist, so treffen sich nach dem speziellen Falle die Geraden, welche $\mathfrak{Q}_\infty$ von den anderen Seitenpaaren des Vierecks $\mathfrak{ABCD}$ harmonisch trennen, in $\mathfrak{Q}_\infty$, also die verwandten Geraden in Q, womit der Satz bewiesen ist.

100. *Drehen sich drei Seiten eines Vierecks um drei feste Punkte einer Geraden und bewegen sich seine Ecken auf einem Kreise, so dreht sich auch die vierte Seite um einen festen Punkt derselben Geraden.*

Folgt unmittelbar aus 98 und 99.

101. *Der Pascal'sche Satz.*

In jedem Kreissechsecke liegen die Schnittpunkte der Gegenseiten in einer Geraden.

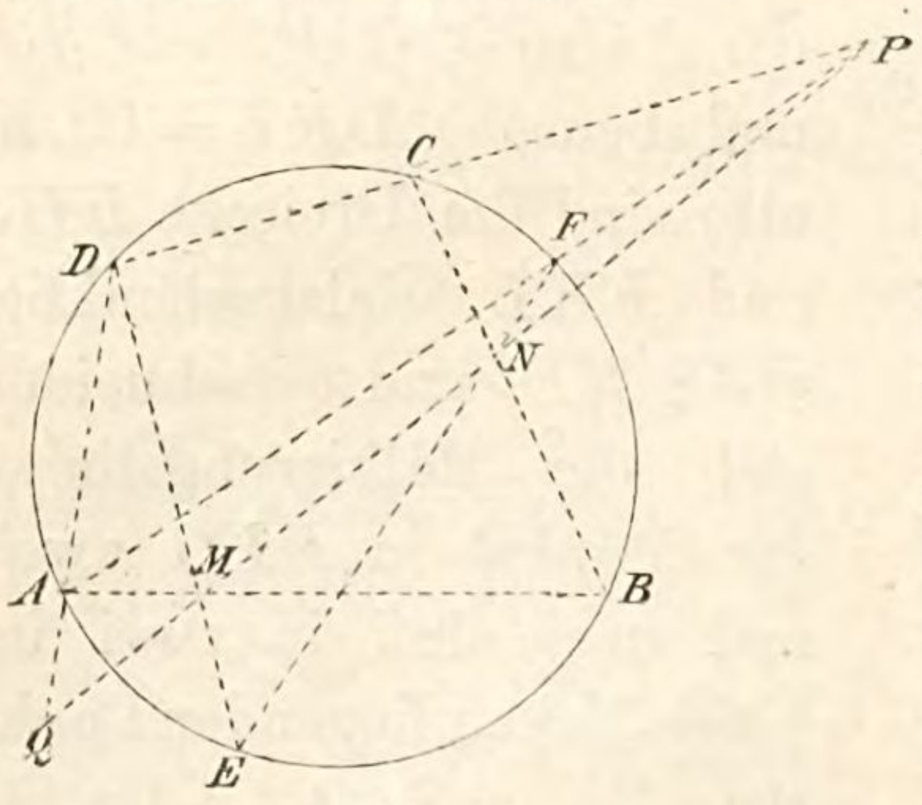


Fig. 38.

Das Kreissechseck $ABCDEF$ teile man durch AD in die Vierecke $ABCD$ und $EFAD$. Die Seiten AB und DE, BC und EF, AD und AD dieser Vierecke gehen durch die Punkte MNQ einer Geraden, also müssen nach *c.* auch CD und AF sich in einem Punkte dieser Geraden treffen.

102. *Diejenigen drei Geraden, welche einen Punkt P von den drei Gegenseitenpaaren eines vollständigen Vierecks harmonisch trennen, treffen sich wieder in einem Punkte Q.* Cf. 357.

Die Paare von Gegenseiten, welche die vier Punkte $ABCD$ verbinden, seien ab, cd, ef. Man stelle eine solche harmonische Verwandtschaft her, dafs dem Vierecke $ABCD$ ein Kreisviereck $\mathfrak{ABCD}$ verwandt ist (85). Den Elementen $abcdefP$ seien verwandt $\mathfrak{abcdef}\mathfrak{P}$. Da nun die Geraden, welche $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{ab}$, $\mathfrak{cd}$, $\mathfrak{ef}$ harmonisch trennen, sich nach 99. in einem Punkte $\mathfrak{Q}$ treffen, so müssen sich auch die verwandten Geraden in einem Punkte Q treffen. (79c und e).

103. *Diejenigen Punkte, welche eine Gerade g von den drei Gegeneckpaaren eines vollständigen Vierseits harmonisch trennen, liegen in einer Geraden.*

Man stelle eine harmonische Verwandtschaft her, in welcher der g die g_∞ verwandt ist. Da nach 58a der Satz für g_∞ im verwandten Vierecke gilt, so mufs er auch fürs ursprüngliche gelten. (79c und e).

104. *Andere Ableitung des Pascal'schen Satzes.*

Es sei $ABCDEF$ ein Kreissechseck; es seien M, N, Q die Schnittpunkte von AB und DE, BC und EF, CD und FA.

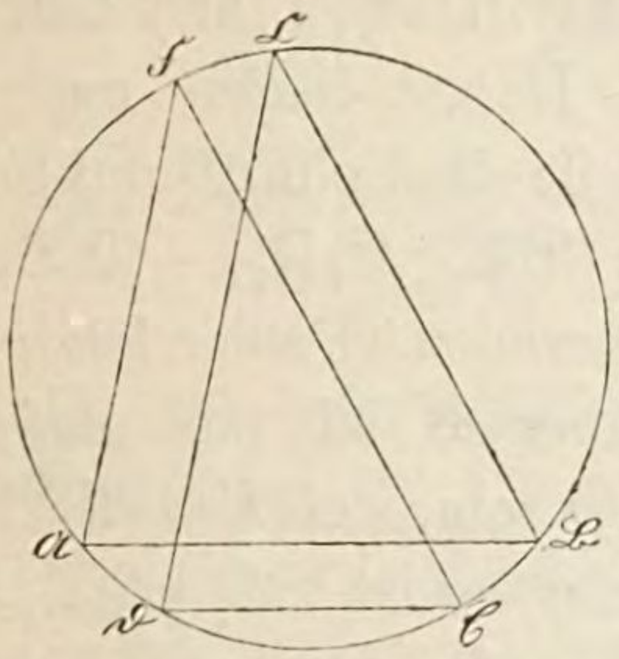


Fig. 39.

a. Die Gerade MN schneide den Kreis K nicht. Man stelle in diesem Falle eine harmonische Verwandtschaft her, in welcher K sich selbst, der MN aber g_∞ verwandt ist. Da die den Punkten M und N verwandten Punkte $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ im Unendlichen liegen, so müssen von den Seiten des verwandten Sechsecks $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{D}\mathfrak{E}$, $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{E}\mathfrak{F}$ parallel sein. Weil aber Bog. $\mathfrak{A}\mathfrak{D} = \mathfrak{B}\mathfrak{E} = \mathfrak{C}\mathfrak{F}$ ist, so ist auch $\mathfrak{C}\mathfrak{D} \parallel \mathfrak{F}\mathfrak{A}$. Daher liegt der dem Punkte Q verwandte Punkt auch auf g_∞ und Q somit auf MN.

b. Wenn MN den Kreis schneidet, so hat man noch die Fälle zu unterscheiden, ob einer der Punkte MNQ aufserhalb des Kreises liegt oder nicht.

I. M liege aufserhalb des Kreises K.

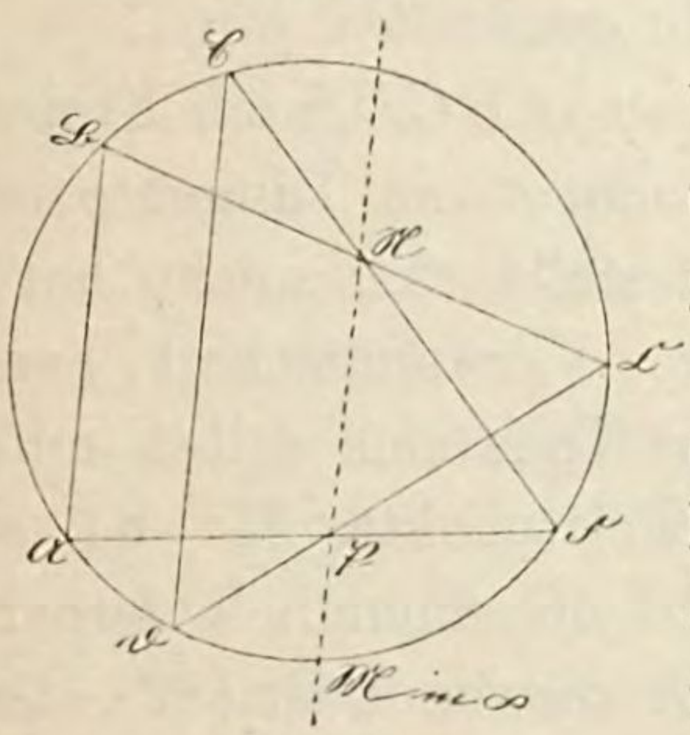


Fig. 40.

Man stelle eine solche harmonische Verwandtschaft her, dafs K sich selbst und dem Punkte M ein Punkt $\mathfrak{M}$ auf g_∞ verwandt ist (82). In dem verwandten Kreissechsecke $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{E}\mathfrak{F}$ sind also $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{D}\mathfrak{E}$ parallel. Daher ist Bog. $\mathfrak{A}\mathfrak{E} = \mathfrak{B}\mathfrak{D}$ und $\sphericalangle \mathfrak{A}\mathfrak{F}\mathfrak{E} = \mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$, also $\mathfrak{C}\mathfrak{N}\mathfrak{P}\mathfrak{F}$ ein Kreisviereck, folglich $\sphericalangle \mathfrak{C}\mathfrak{N}\mathfrak{P} + \mathfrak{C}\mathfrak{F}\mathfrak{P} = 2R$. Da auch $\mathfrak{C}\mathfrak{B}\mathfrak{A} + \mathfrak{C}\mathfrak{F}\mathfrak{A} = 2R$ ist, so mufs $\mathfrak{C}\mathfrak{N}\mathfrak{P} = \mathfrak{C}\mathfrak{B}\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}\mathfrak{B} \parallel \mathfrak{N}\mathfrak{P}$ sein, d. h. $\mathfrak{N}\mathfrak{P}$ geht durch $\mathfrak{M}$, also müssen die verwandten Punkte MNP auch auf einer Geraden liegen.

II. Keiner der drei Punkte MNP liegt aufserhalb des Kreises.

Man stelle eine solche harmonische Verwandtschaft her, dafs der Kreis sich selbst und dem Punkte M der Mittelpunkt K verwandt ist (81. 83). In dem verwandten Kreissechsecke $\mathfrak{ABCDEF}$ schneiden sich die Gegenseiten $\mathfrak{AB}$ und $\mathfrak{DE}$ in K; $K\mathfrak{P}$ treffe den Kreis in $\mathfrak{G}$. Man mache $\mathfrak{GF}_1 = \mathfrak{GF}$, ziehe $\mathfrak{F}_1\mathfrak{P}$ bis $\mathfrak{A}_1$, dann ist $\mathfrak{AA}_1 \perp K\mathfrak{P}$; ziehe ferner $\mathfrak{DE}_1 \parallel \mathfrak{BA}_1$, dann ist $\mathfrak{A}_1\mathfrak{BCDE}_1\mathfrak{F}_1$ ein Sechseck, in welchem die Gegenseiten $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{DE}_1$ parallel sind. Daher liegen nach dem vorigen Falle die Schnittpunkte $(\mathfrak{A}_1\mathfrak{B},\ \mathfrak{E}_1\mathfrak{D})$, $(\mathfrak{BC},\ \mathfrak{E}_1\mathfrak{F}_1)$, $(\mathfrak{CD},\ \mathfrak{F}_1\mathfrak{A}_1)$ in einer Geraden. Da der letzte Schnittpunkt aber $\mathfrak{P}$ ist, so mufs diese Gerade $\mathfrak{KG}$ sein, weil $K\mathfrak{G} \parallel \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}$ ist. Weil ferner Bog. $\mathfrak{AE} = \mathfrak{BD} = \mathfrak{A}_1\mathfrak{E}_1$ ist, so ist $\mathfrak{EE}_1 \parallel \mathfrak{AA}_1$, also müssen sich $\mathfrak{E}_1\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{EF}$ in einem Punkte von $K\mathfrak{G}$ treffen. Da aber auf $K\mathfrak{G}$ sich auch $\mathfrak{BC}$ und $\mathfrak{E}_1\mathfrak{F}_1$ schneiden, so mufs auch der Schnittpunkt $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{EF}$ und $\mathfrak{BC}$ auf $K\mathfrak{G}$ liegen. Auf dieser Geraden liegen also die Punkte $\mathfrak{MNP}$, auf der verwandten Geraden also MNP.

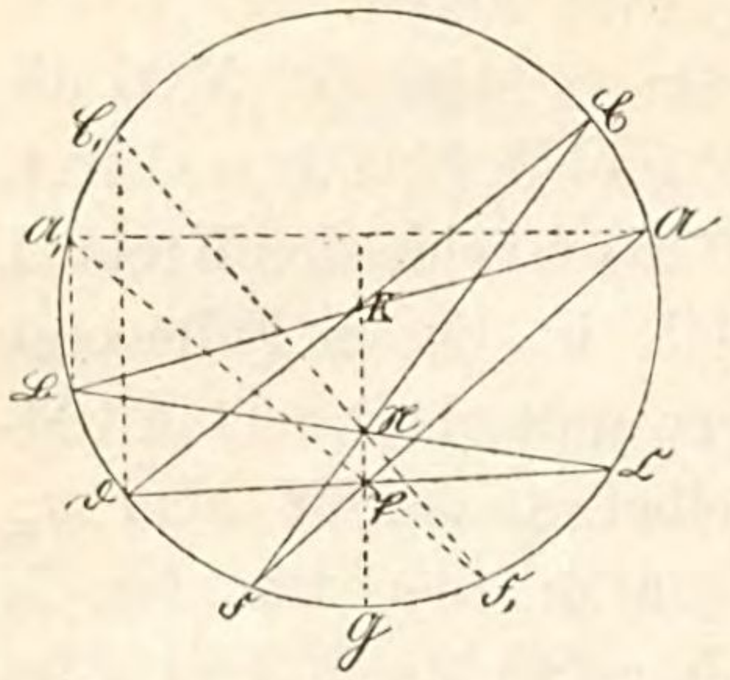


Fig. 41.

105. *In jedem Kreisfünfecke liegen die Schnittpunkte von zwei Paaren nicht aufeinanderfolgender Seiten mit demjenigen dritten Punkte in einer Geraden, in welchem die fünfte Seite von der Tangente der gegenüberliegenden Ecke geschnitten wird.*

Es sei $ABCDE$ ein Kreisfünfeck und a die Tangente in A; man stelle eine solche harmonische Verwandtschaft her, dafs der Kreis sich selbst und dem Schnittpunkte M von a und CD ein unendlich ferner Punkt $\mathfrak{M}$ verwandt ist (82). In dem verwandten Fünfecke $\mathfrak{ABCDE}$ ist $\sphericalangle \mathfrak{ABC} = \mathfrak{DEP}$, also ist $\mathfrak{BNEP}$ ein Kreisviereck und $\sphericalangle \mathfrak{EPN} = \mathfrak{EBN} = \mathfrak{EAM}$

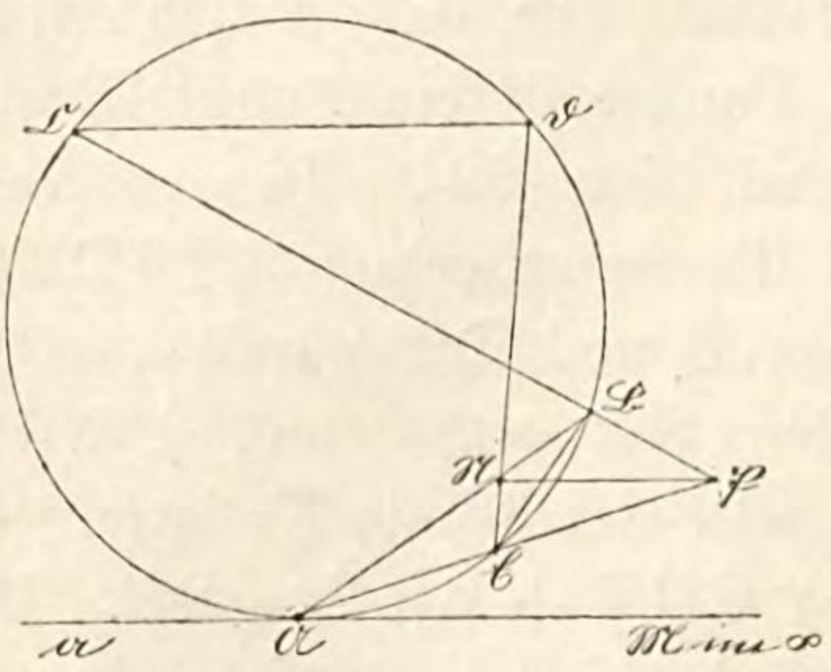


Fig. 42.

und $\mathfrak{N}\mathfrak{P} \parallel \mathfrak{a}$. Da also $\mathfrak{M}\mathfrak{N}\mathfrak{P}$ in einer Geraden liegen, so ist dies auch mit MNP der Fall.

106. *In jedem Kreisvierecke sind die Schnittpunkte der Gegenseiten und der Tangenten in den Gegenecken vier harmonische Punkte.*

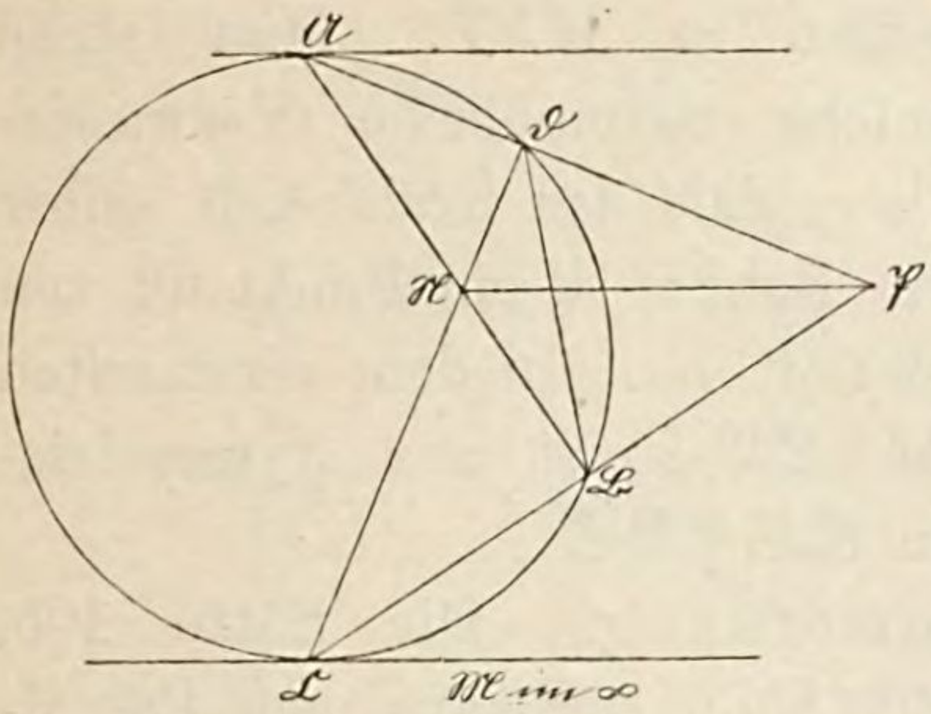


Fig. 43.

Man stelle eine solche harmonische Verwandtschaft her, dafs der Kreis sich selbst und dem Schnittpunkte M zweier Tangenten a und c in den Gegenecken A und C ein Punkt $\mathfrak{M}$ auf g_∞ verwandt ist. In dem verwandten Kreisvierecke $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ ist $\mathfrak{B}\mathfrak{N}\mathfrak{D}\mathfrak{P}$ ein Kreisviereck, weil $\sphericalangle\, \mathfrak{N}\mathfrak{D}\mathfrak{P} = \mathfrak{N}\mathfrak{B}\mathfrak{P} = 90^0$, also $\sphericalangle\, \mathfrak{N}\mathfrak{P}\mathfrak{D} = \mathfrak{N}\mathfrak{B}\mathfrak{D} = \mathfrak{M}\mathfrak{A}\mathfrak{D}$ und folglich $\mathfrak{A}\mathfrak{M} \parallel \mathfrak{N}\mathfrak{P}$.

Anderer Beweis.

Die drei Diagonalpunkte des Vierecks $ABCD$ seien NPR; NP ist die Polare von R, also müssen sich die Tangenten a und c in A und C in einem Punkte M von NP und ebenso diejenigen b und d in B und D in einem Punkte Q von NP schneiden (15, 19). Da aber $R(ABNP)$ harmonische Strahlen sind (10), so müssen auch

$$NPMQ$$

harmonische Punkte sein (20).

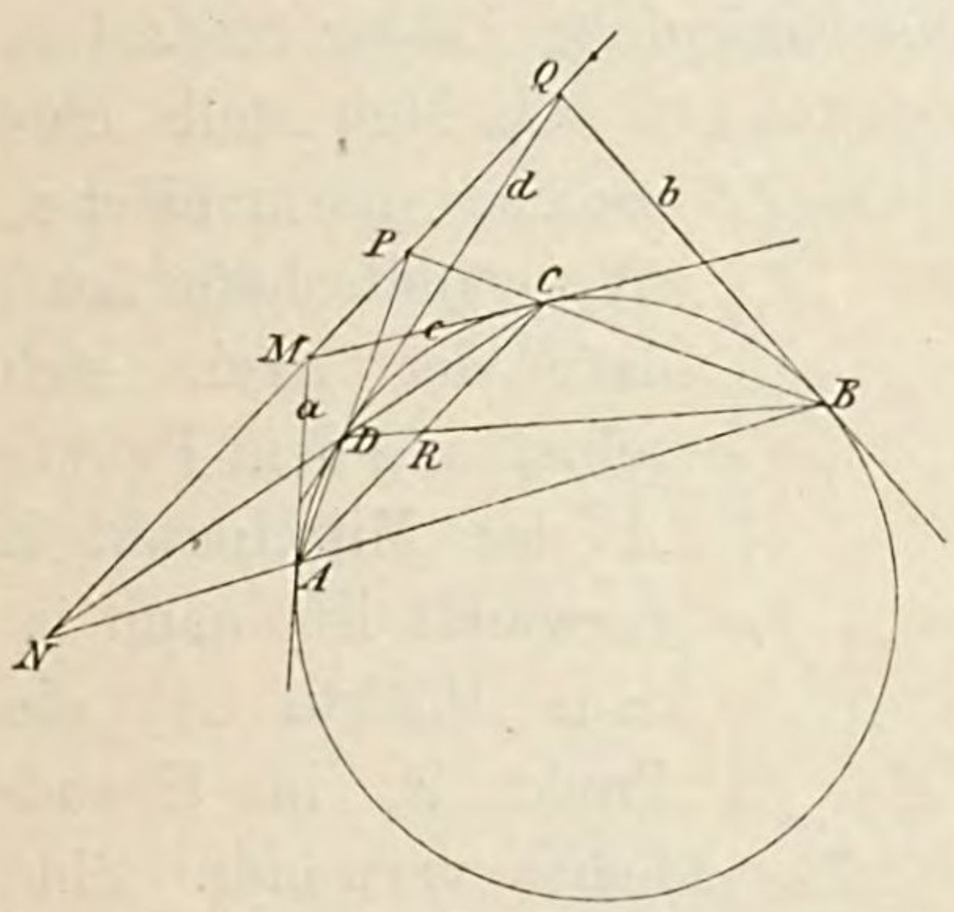


Fig. 44.

107. (Fig. 44.) Die Tangenten $abcd$ bilden ein dem Kreise umgeschriebenes Vierseit. Da die Tangenten a und b sowohl, wie c und d sich auf PR, a und d aber, sowie b und c sich auf QR schneiden müssen (16, 19), so erhält man den Satz:

In jedem Tangentenvierseite sind die Verbindungslinien der Gegenecken und der Berührungspunkte auf den Gegenseiten harmonische Strahlen.

108. *In jedem einem Kreise eingeschriebenen Dreiecke werden die Seiten von den Tangenten durch die Gegenecken in drei Punkten einer Geraden geschnitten.*

Es sei ABC ein eingeschriebenes Dreieck; die Tangenten abc in den Ecken ABC schneiden die Gegenseiten in MNP. Man stelle eine solche harmonische Verwandtschaft her, dafs der Kreis sich selbst und dem Punkte M ein Punkt $\mathfrak{M}$ von g_∞ verwandt ist. In dem verwandten Dreiecke $\mathfrak{ABC}$ ist aus Symmetriegründen $\mathfrak{NP} \parallel \mathfrak{BC}$.

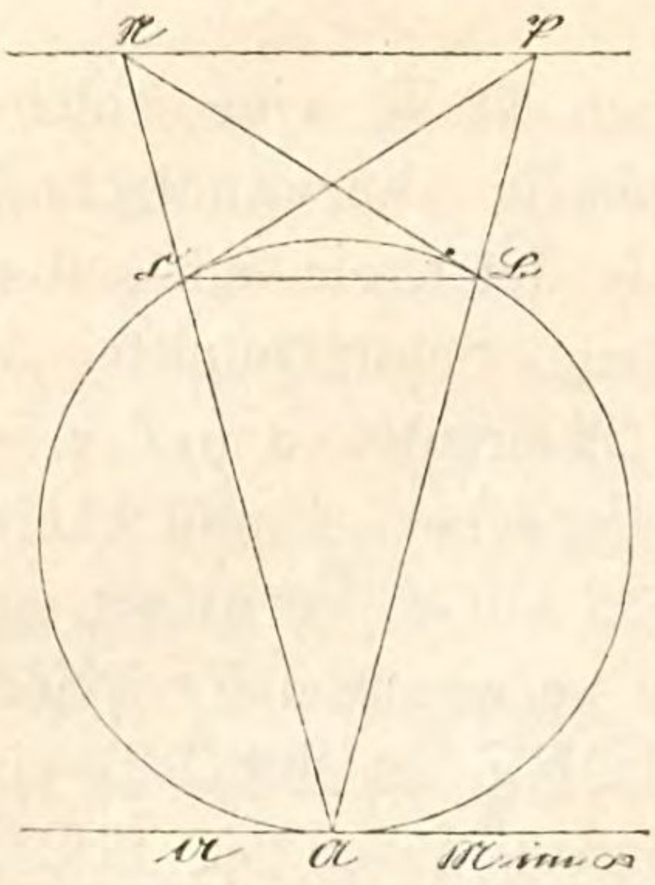


Fig. 45.

Anmerkung. Die Sätze 105, 106, 108 kann man aus dem Pascalschen Satze auch dadurch ableiten, dafs man eine oder zwei oder drei Seiten eines Kreissechsecks unendlich klein werden läfst.

109. *Gegeben sind zwei konjugierte Punktpaare AA_1 und BB_1, man soll zeigen, dafs die Schnittpunkte CC_1 von AB und A_1B_1 sowie AB_1 und BA_1 auch konjugierte Punkte sind.*

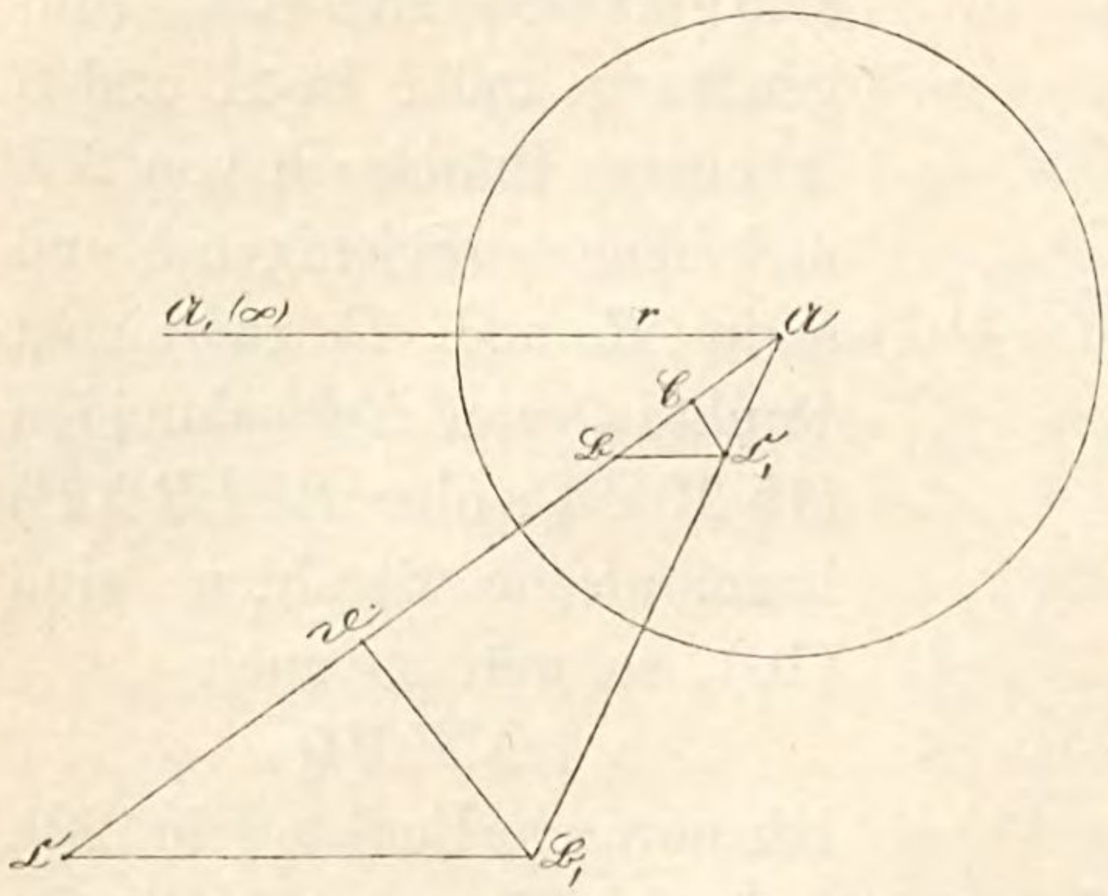


Fig. 46.

I. Man stelle eine solche harmonische Verwandtschaft her, dafs der Kreis sich selbst und dem Punkte A der Mittelpunkt $\mathfrak{A}$ verwandt ist, dann ist dem Punkte A_1 ein Punkt $\mathfrak{A}_1$ im Unendlichen verwandt. Sind $\mathfrak{BB}_1\,\mathfrak{CC}_1$ die den Punkten BB_1CC_1 verwandten Punkte, so ist $\mathfrak{CB}_1 \parallel \mathfrak{C}_1\mathfrak{B} \parallel \mathfrak{AA}_1$, also wenn $\mathfrak{B}_1\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{C}_1\mathfrak{E}$ senkrecht auf $\mathfrak{AC}$ sind,

$$\mathfrak{CD} : \mathfrak{BE} = \mathfrak{DB}_1 : \mathfrak{EC}_1 = \mathfrak{AC} : \mathfrak{AB}$$

und

$$\mathfrak{AC} - \mathfrak{CD} : \mathfrak{AB} - \mathfrak{BE} = \mathfrak{AC} : \mathfrak{AB}$$

$$\mathfrak{AD} : \mathfrak{AE} =$$

also

$$\mathfrak{AD} \,.\, \mathfrak{AB} = \mathfrak{AE} \,.\, \mathfrak{AC}.$$

Weil aber $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$ konjugierte Punkte sind, so sind $\mathfrak{B}\mathfrak{D}$ harmonische Pole, also $\mathfrak{A}\mathfrak{D} \,.\, \mathfrak{A}\mathfrak{B} = r^2$ und folglich sind auch $\mathfrak{E}\mathfrak{C}$ harmonische Pole und $\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$ konjugierte Punkte, mithin auch CC_1.

II. Man stelle eine solche harmonische Verwandtschaft her, dafs der Geraden $A_1 B_1$, falls sie den Kreis nicht schneidet, die unendlich ferne Gerade und der Kreis O sich selbst verwandt ist. Sind wieder $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$ die verwandten Punkte, so ist $\mathfrak{A}M \perp \mathfrak{A}_1 M$, $\mathfrak{B}M \perp \mathfrak{B}_1 M$, $\mathfrak{C}$ im Unendlichen, M der Höhenpunkt des Dreiecks $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}_1$, weil $\mathfrak{A}M \perp \mathfrak{B}\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{B}M \perp \mathfrak{A}\mathfrak{C}_1$, also $\mathfrak{C}_1 M \perp \mathfrak{A}\mathfrak{B}$, daher $\mathfrak{C}_1 M$ die Polare von $\mathfrak{C}_\infty$ und $\mathfrak{C}_\infty\,\mathfrak{C}_1$ sind konjugierte Punkte, mithin auch CC_1.

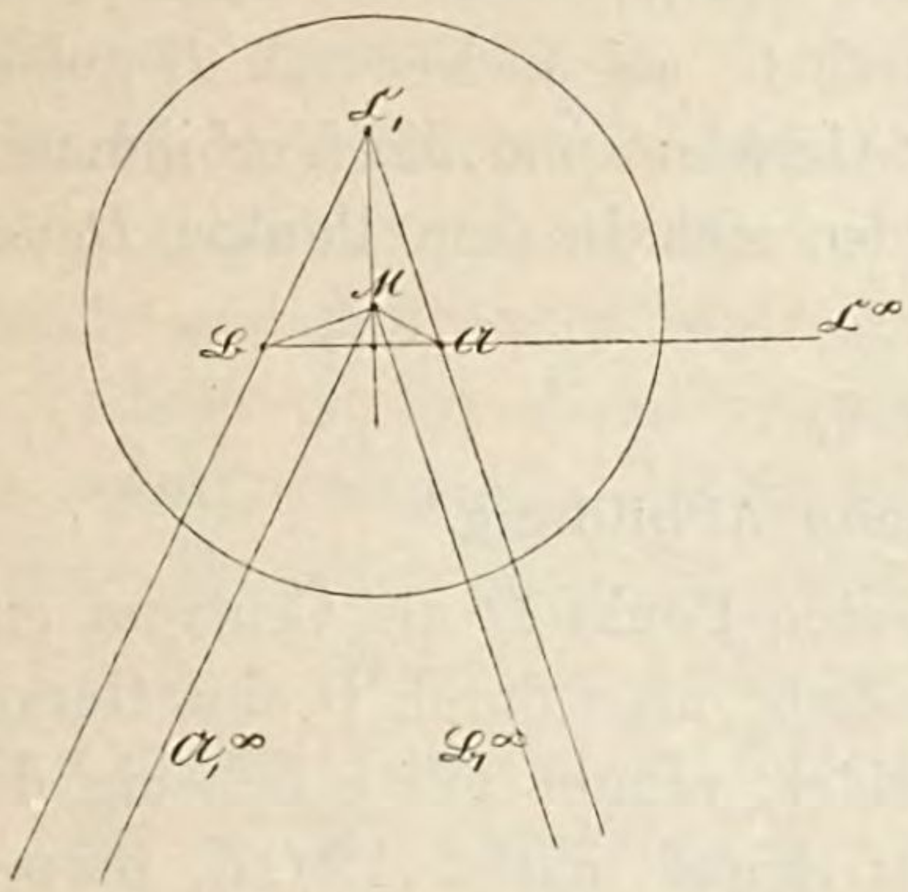


Fig. 47.

110. *Wenn aa_1 und bb_1 konjugierte Strahlenpaare sind, so sind die Verbindungslinien der Schnittpunkte (ab) und $(a_1 b_1)$, sowie (ab_1) und $(a_1 b)$ auch konjugierte Strahlen.*

Durch harmonische Verwandtschaft wie in 109. oder durch Polarisation. Cf. § 10.

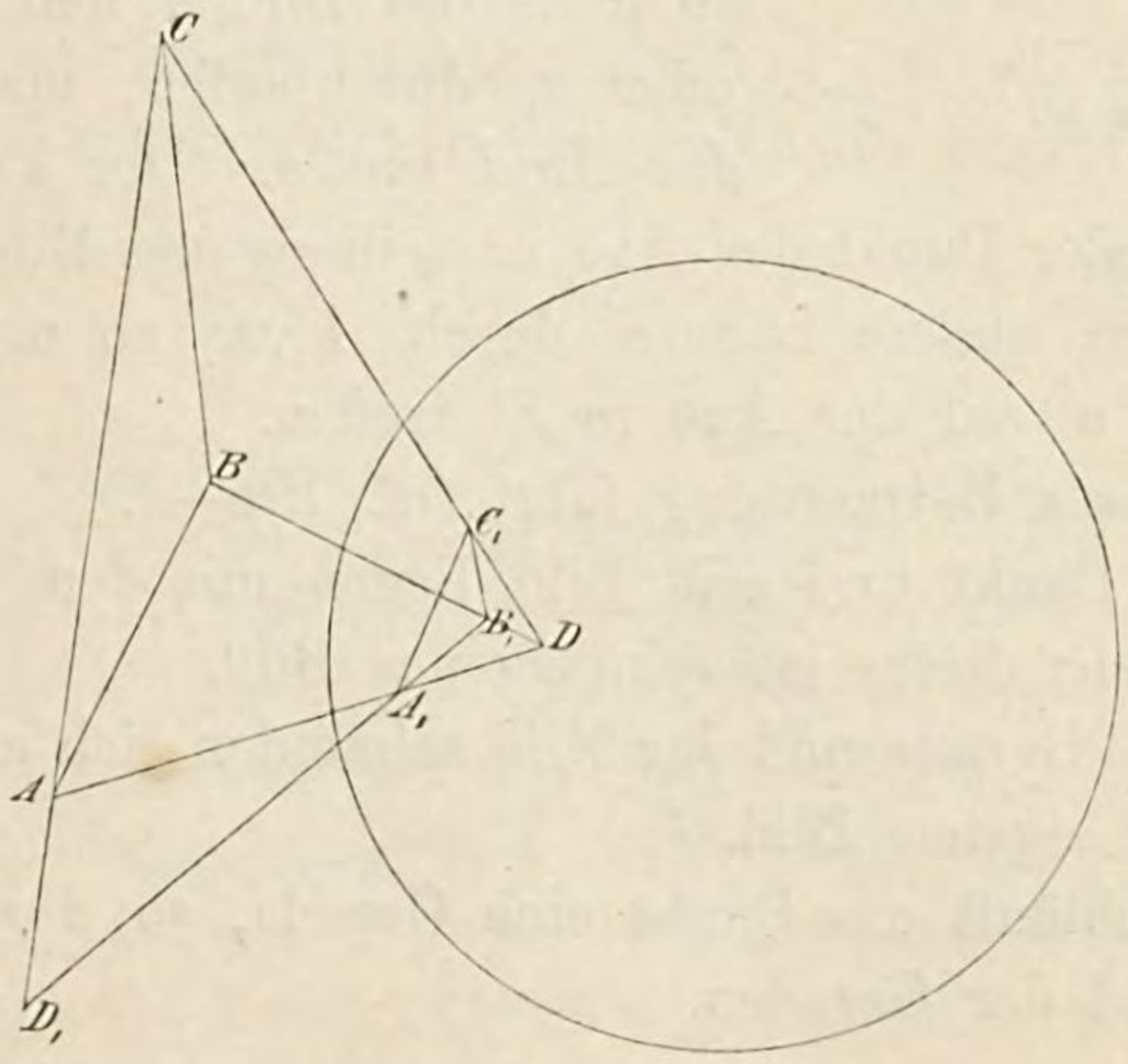


Fig. 47a.

111. *Verbindet man die Ecken ABC eines Dreiecks mit*

den Polen ihrer Gegenseiten, so treffen sich die Verbindungslinien in einem Punkte. (Fig. 47a.)

Sind $A_1 B_1 C_1$ die Pole von BC, AC, AB, so sind AA_1 und BB_1 konjugierte Punkte, also auch die Schnittpunkte D und D_1*), von AA_1 und BB_1, AB und $A_1 B_1$. Die Polare von D_1 mufs daher sowohl durch C_1 als durch C, als auch durch D gehen, mithin liegen $CC_1 D$ in einer Geraden und die Verbindungslinien AA_1, BB_1, CC_1 schneiden sich in dem Punkte D.

§ 9.

Die harmonische Abbildung.

112. Man wähle einen festen Punkt O als Centrum und eine feste Gerade o als Axe. Zieht man durch O eine Gerade g, welche die Axe in $\mathfrak{A}$ schneidet, nimmt auf g beliebig den Punkt A und macht $A\mathfrak{A}O\mathfrak{A}_1$ harmonisch, so dafs O und A_1 zugeordnete Punkte sind, so nennt man A_1 *das Bild von* A. Verbindet man die Punkte AOA_1 mit einem Punkte S von o, so sind $S(A\mathfrak{A}OA_1)$ harmonische Strahlen. Wenn demnach der Punkt A den Strahl SA oder a durchläuft, so mufs das Bild A_1 den Strahl SA_1 oder a_1 durchlaufen; man nennt a_1 *das Bild von* a. Der Punkt S und überhaupt jeder Punkt der Axe ist sein eigenes Bild. — Nimmt a irgend eine andere Lage a' durch A an, so mufs ihr Bild a_1' sich mit a' auf der Axe in S' treffen.

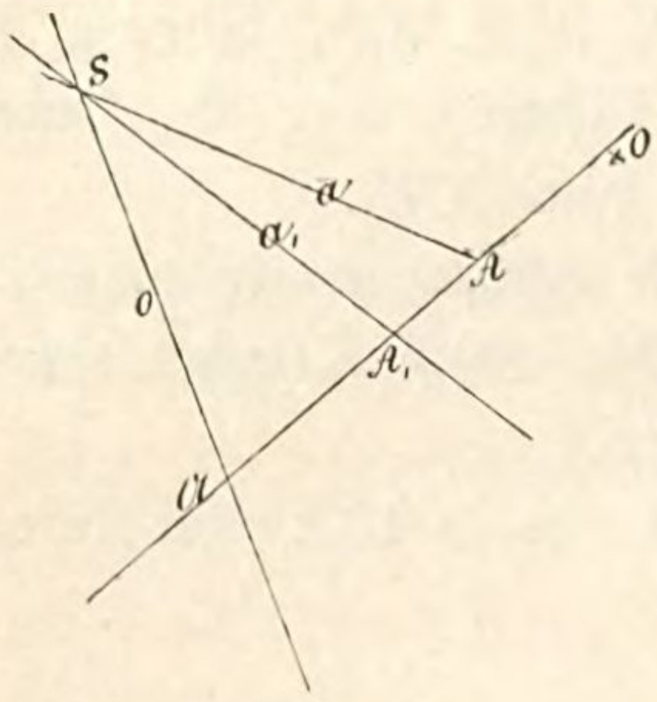


Fig. 48.

Aus dieser Betrachtung folgt (cf. 79a—f.):

a. Ein Punkt und sein Bild liegen mit dem Centrum in einer Geraden; dieses ist sein eigenes Bild.

b. Eine Gerade und ihr Bild schneiden sich auf der Axe; diese ist ihr eigenes Bild.

c. Durchläuft ein Punkt eine Gerade, so durchläuft sein Bild das Bild der Geraden.

---

*) D_1 ist in der Figur an unrichtiger Stelle; er ist der Schnittpunkt $(AB, A_1 B_1)$.

d. Dreht sich eine Gerade um einen Punkt, so dreht sich ihr Bild um das Bild des Punktes.

e. Die Bilder von harmonischen Punkten und Strahlen sind auch harmonisch.

f. Die Bilder von involutorischen Punkten und Strahlen sind auch involutorisch.

113. Man kann einen Punkt A auch harmonisch abbilden, indem man A_1' so konstruiert, dafs $AO\mathfrak{A}A_1'$ harmonische Punkte und $\mathfrak{A}A_1'$ zugeordnet sind.

Diese Art der Abbildung kann man die *axiale*, die erste die *centrale* nennen. Die für die letztere abgeleiteten Sätze (112 a—f) gelten auch für die andere.

114. a. Wenn bei einer centralen Abbildung g_∞ das Bild von g ist, so liegt O in der Mitte zwischen g und o; das Bild von g_∞ liegt so, dafs o zwischen ihm und O die Mittelsenkrechte ist.

a′. Bei der axialen Abbildung mufs o die Mittelsenkrechte von O und g sein, damit g_∞ das Bild von g ist; das Bild von g_∞ liegt in Bezug auf O symmetrisch zu o.

b. Wählt man bei der centralen Abbildung den Mittelpunkt M eines Kreises als Centrum der Abbildung und g_∞ als Axe, so ist das Bild von M ein konzentrischer Kreis mit doppelt so grofsem Radius.

b′. Wählt man bei der axialen Abbildung den Kreismittelpunkt M als Centrum und g_∞ als Axe, so ist das Bild des Kreises M ein konzentrischer Kreis mit halb so grofsem Radius.

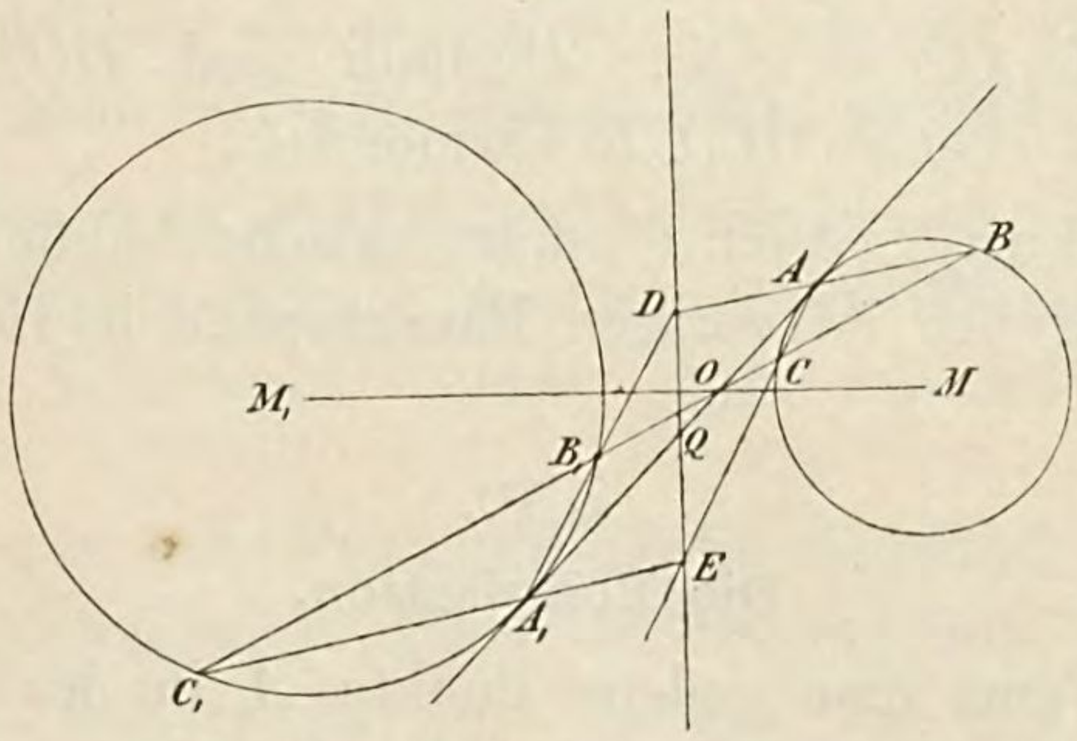


Fig. 49.

115. *Wenn die Radien zweier Kreise im Verhältnisse 1 : 2* Fig. 49. *stehen, so ist jeder Kreis das harmonische Bild des anderen und*

zwar der gröfsere das central-harmonische des kleineren und dieser das axial-harmonische des gröfseren. Centrum und Axe sind der innere Ähnlichkeitspunkt und die Potenzlinie.

Wenn die Radien der Kreise M und M_1 sich wie $1:2$ verhalten und O der innere Ähnlichkeitspunkt ist, so ist auch auf der gemeinschaftlichen Tangente $OA : OA_1 = 1:2$. Die Potenzlinie o halbiert diese Tangente AA_1 in Q, also ist $QO = \frac{1}{6} AA_1$ und $AO : OQ = AA_1 : A_1Q = 2:1$.

Zieht man durch O eine beliebige Gerade, welche die Kreise in BC und B_1C_1 trifft, dann müssen AB und A_1B_1 sowohl, wie AC und A_1C_1 sich auf der Potenzlinie o in D und E treffen. Da nun $AQOA_1$ harmonische Punkte sind, so sind $D(AQOA_1)$ harmonische Strahlen und deshalb $BROB_1$*) und $CROC_1$ harmonische Punkte.

Wenn die Kreise M_1 und M sich schneiden, so trifft die Senkrechte in O auf MM_1 die Kreise in solchen Punkten A

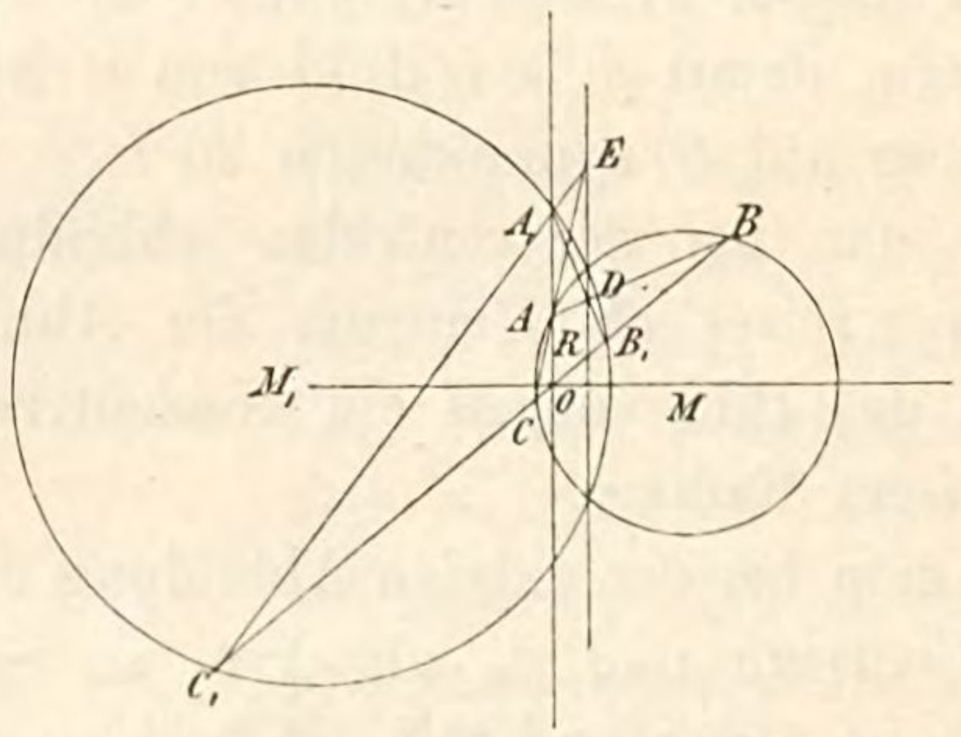


Fig. 50.

und A_1, dafs $OA = AA_1$. Deshalb sind $D(OA_1AE)$ und OB_1BR und ebenso OC_1CR harmonisch.

Anmerkung. Auch die harmonische Abbildung gestattet die Ableitung der im vorigen Paragraphen bewiesenen Sätze.

§ 10.

Die Polarisation.

116. Wenn man jedem Punkte A in der Ebene eines Kreises K seine Polare a und jeder Geraden a ihren Pol A zuordnet, so sind dadurch die Punkte der Ebene zu den Ge-

*) R ist der Schnittpunkt von BC mit DE.

raden in eine verwandtschaftliche Beziehung gebracht. Diese Verwandtschaft heifst *Reciprocität*. Allen Punkten einer Geraden sind alle Strahlen durch ihren Pol reciprok verwandt und umgekehrt. Eine Figur *polarisieren* heifst die ihr reciprok verwandte Figur, d. h. zu jedem Punkte oder jeder Geraden der ersteren die Polare oder den Pol konstruieren. Durch diese Verwandtschaft wird ein allgemeines Prinzip der Geometrie, das *Prinzip der Dualität* begründet. Betrachtet man irgend ein geometrisches Gebilde als Punktgebilde, also entstanden durch Bewegung eines Punktes, so steht ihm *dual* gegenüber das reciproke, entstanden durch die Bewegung einer Geraden. Mittelst des vorher abgeleiteten Prinzips der Dualität folgen aus den Eigenschaften einer Figur sofort diejenigen der dualen Figur.

117. *Die Polaren einer involutorischen Punktreihe bilden ein involutorisches Strahlenbüschel.*

Ist $AA_1BB_1\ldots$ eine involutorische Reihe, M der Kreismittelpunkt, so ist $M(AA_1BB_1\ldots)$ ein involutorisches Büschel. Diesem kongruent, also auch involutorisch ist das Büschel der Polaren von $AA_1BB_1\ldots$

118. *Zieht man durch einen Punkt P die Tangenten an einen Kreis und die Geraden nach den Ecken eines umgeschriebenen Vierseits, so sind diese sechs Geraden in Involution.*

Es seien $ABCD$ die Ecken des Tangentenvierseits, PE und PF zwei Tangenten, $pabcdef$ die Polaren von $PABCDEF$. Die Schnittpunkte $p(abcdef)$ sind die Pole von $P(ABCDEF)$ und da jene nach 98 in Involution sind, so sind es auch diese.

119. *Diejenigen Punkte, welche eine Gerade p von den Tangenten eines Kreises und von den Gegenecken eines umgeschriebenen Kreisvierseits harmonisch trennen, liegen auf einer konjugierten Geraden.*

Es seien A und B, C und D die Gegenecken des umgeschriebenen Vierseits, E und F die Schnittpunkte von AC und BD mit p, $Pabcdef$ Pol und Polaren von $pABCDEF$, so treffen sich nach 99. die Geraden, welche P von den Gegenseitenpaaren ac und bd harmonisch trennen, in einem zu P konjugierten Punkte, also müssen die Punkte, welche p von

AC und BD harmonisch trennen, auf einer zu p konjugierten Geraden liegen.

120. *Durchlaufen drei Ecken eines Vierecks drei feste Gerade, die durch einen Punkt gehen, und bewegen sich seine Seiten als Tangenten eines Kreises, so durchläuft die vierte Ecke eine vierte Gerade, die durch denselben Punkt geht.*

Folgt aus 118 und 119.

121. *Der Satz von Brianchon.*

In jedem einem Kreise umgeschriebenen Sechsseite schneiden sich die Verbindungslinien der Gegenecken in einem Punkte.

I. Beweis. Das Sechsseit sei $abcdef$; man zerlege es in die Vierseite $abcd$ und $efad$. Die Ecken (ab) und (de), (bc) und (ef), (ad) und (ad) liegen auf drei Geraden mnq, die sich in einem Punkte schneiden, also müssen nach 120. die die Ecken (cd) und (af) auch auf einer Geraden liegen, die durch denselben Punkt geht.

II. Beweis. Das Sechsseit sei $abcdef$; die sechs Berührungspunkte seien $ABCDEF$. In dem von letzteren gebildeten Sechsecke liegen die Schnittpunkte

$$(AB,\ DE),\ (BC,\ EF),\ (CD,\ FA)$$

nach dem Pascalschen Satze auf einer Geraden, also müssen ihre Polaren

$$(ab,\ de),\ (bc,\ ef),\ (cd,\ fa)$$

sich in einem Punkte treffen.

Zweiter Abschnitt.

Die Kegelschnitte.

§ 11.

Der Kegelschnitt als harmonische Kurve des Kreises.

122. *In jeder harmonischen Verwandtschaft, deren Centrum der Mittelpunkt eines Kreises ist, ist diesem Kreise eine krumme Linie verwandt, deren sämtliche Punkte vom Centrum und von*

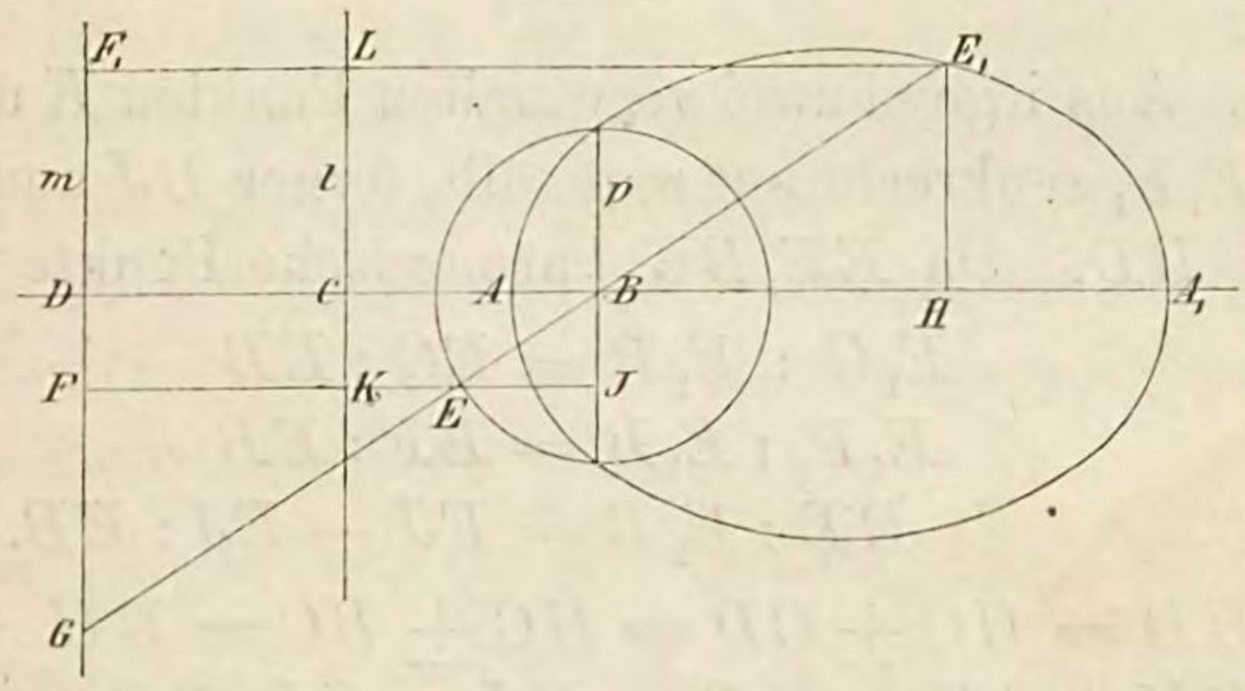


Fig. 51.

der Mittellinie der Verwandtschaft ein konstantes Abstandsverhältnis haben.

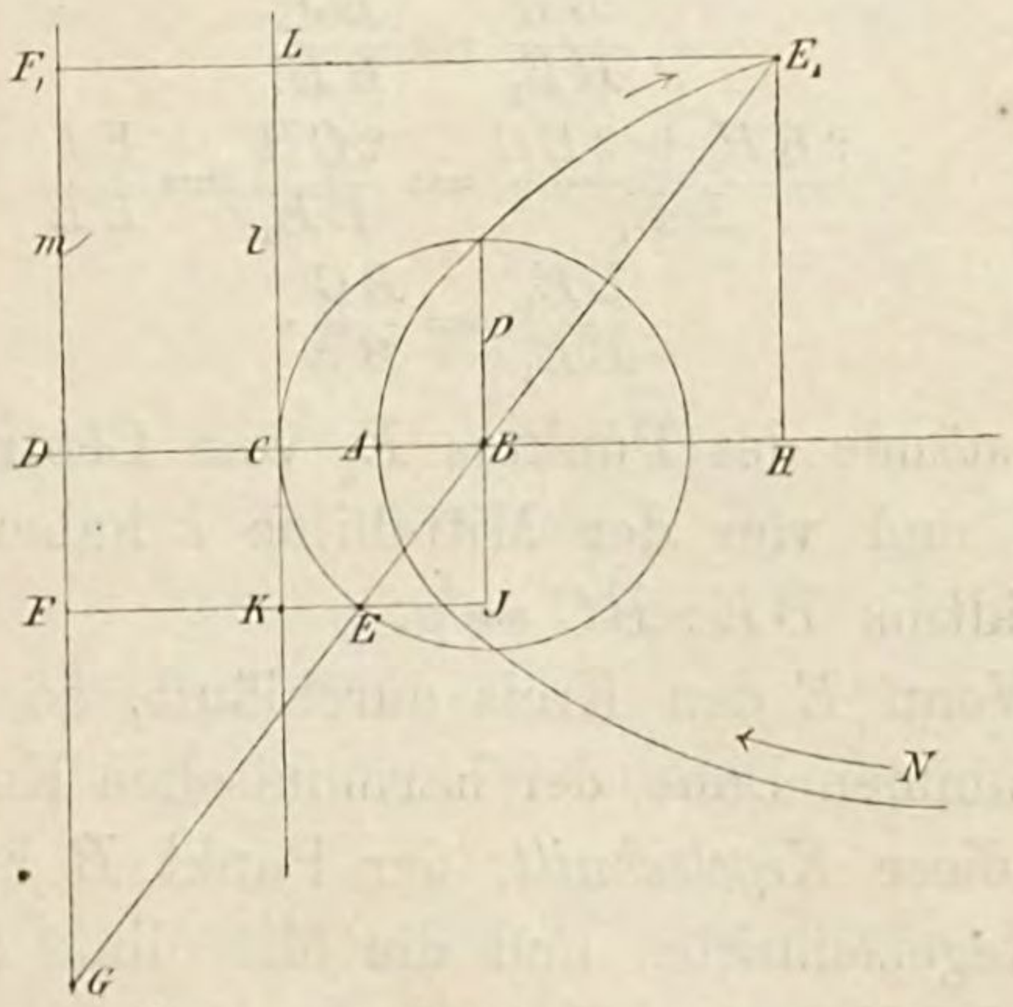


Fig. 52.

Diese krumme Linie heifst ein *Kegelschnitt.*

Es sei der Mittelpunkt B eines Kreises das Centrum und eine beliebige Gerade m die Axe, l die Mittellinie der Verwandtschaft;

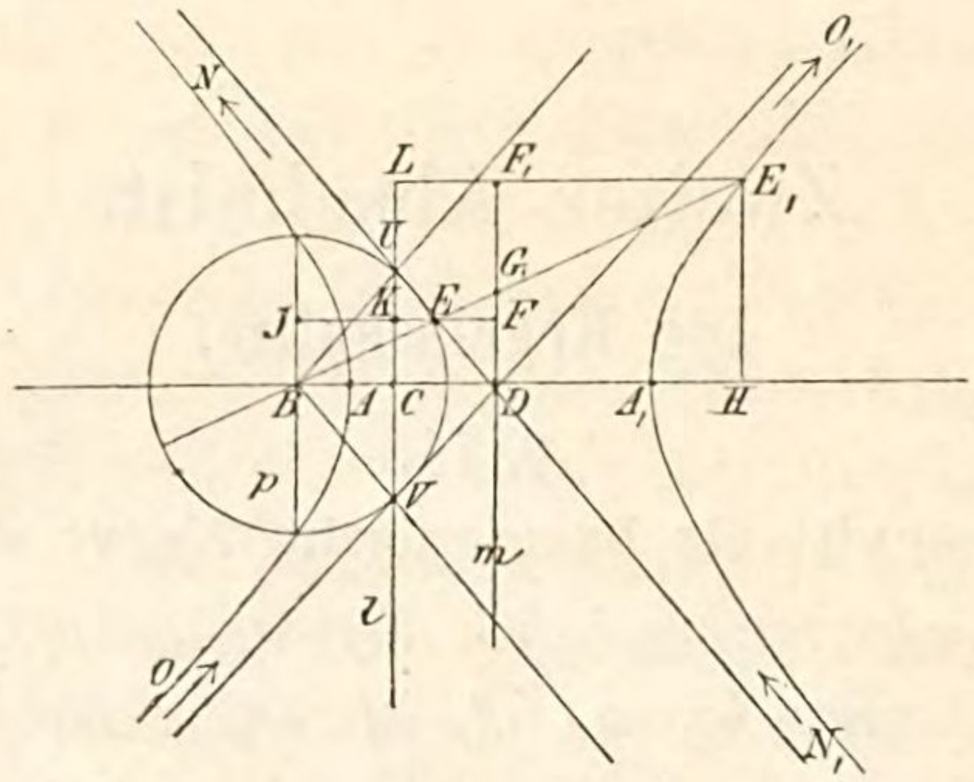


Fig. 53.

$BD \perp m$. Aus irgend zwei verwandten Punkten E und E_1 seien EF und E_1F_1 senkrecht auf m gefällt, ferner BJ und E_1H senkrecht auf BD. Da EE_1BG harmonische Punkte sind, so ist

$$E_1G : E_1B = EG : EB$$

oder

$$E_1F_1 : E_1B = EF : EB$$

$$HD : E_1B = FJ - EJ : EB.$$

Aber $HD = HC \pm CD = HC \pm BC = BH \pm 2BC$,

also $BH \pm 2BC : E_1B = FJ - EJ : EB$

und $$\frac{BH}{BE_1} \pm \frac{2BC}{BE_1} = \frac{FJ}{BE} - \frac{EJ}{BE}.$$

Weil $$\frac{BH}{BE_1} = \frac{EJ}{BE},$$

so wird $$\frac{2BH \pm 2BC}{BE_1} = \frac{2CH}{BE_1} = \frac{FJ}{BE}$$

und $$\frac{LE_1}{BE_1} = \frac{BC}{BE}.$$

Die Abstände des Punktes E_1 vom Centrum B der Verwandtschaft und von der Mittellinie l haben also das konstante Verhältnis $BE : BC = \mu$.

123. Wenn E den Kreis durchläuft, so bewegt sich E_1 auf einer krummen Linie, der harmonischen Kurve des Kreises. Man nennt diese *Kegelschnitt;* der Punkt B heifst ein *Brennpunkt* des Kegelschnittes und die Mittellinie l der Verwandtschaft eine *Leitlinie* desselben.

Auf der Senkrechten BC giebt es zwei Punkte des Kegelschnittes, nämlich diejenigen Punkte A und A_1, welche BC im Verhältnisse μ harmonisch teilen. Die Gerade AA_1 heifst die *Hauptaxe* des Kegelschnittes, man bezeichnet sie mit $2a$. Ihre Endpunkte heifsen die *Scheitel* des Kegelschnittes. Die zur Hauptaxe senkrechte Brennpunktssehne heifst der *Parameter* $(2p)$ des Kegelschnittes und der über ihm als Durchmesser beschriebene Kreis der *Parameterkreis*. Also gilt:

Der Kegelschnitt und sein Parameterkreis sind harmonische Kurven.

124. *Die drei Arten der Kegelschnitte.*

Der Leitlinie l ist die unendlich ferne Gerade verwandt; erstere kann mit dem Parameterkreise keinen oder einen oder zwei Punkte gemein haben. Deshalb hat auch ein Kegelschnitt mit der unendlich fernen Geraden keinen oder einen oder zwei Punkte gemein. Im ersten Ealle verläuft der Kegelschnitt ganz im Endlichen und heifst *Ellipse* (Fig. 51); im zweiten hat er die unendlich ferne Gerade als Tangente und heifst *Parabel* (Fig. 52); im dritten hat er zwei unendlich ferne Punkte und heifst *Hyperbel* (Fig. 53).

Bei der Ellipse ist das Abstandsverhältnis $\mu = \frac{p}{BC} < 1$, bei der Parabel ist $p = BC$, also $\mu = 1$, bei der Hyperbel ist $p > BC$, also $\mu > 1$. Demnach folgt:

Der Kegelschnitt ist Ellipse, Parabel, Hyperbel, je nachdem das Abstandsverhältnis kleiner, gleich oder gröfser als die Einheit ist.

125. Weil die Punkte des Kreises stetig auf einanderfolgen, so ist dies auch mit den verwandten Punkten des Kegelschnittes der Fall. Der Zusammenhang findet allerdings bei Parabel und Hyperbel im Unendlichen statt.

Der Punkt A bewege sich (Fig. 53) in dem durch die Pfeile angedeuteten Sinne nach N hin; er durchläuft dann die Hyperbel und gelangt durchs Unendliche hindurch über N_1, A_1, O_1 und nochmals durchs Unendliche hindurch über O zurück nach A.

Wenn bei der Parabel (Fig. 52) der Punkt A sich in dem durch die Pfeile angedeuteten Sinne nach E_1 hin bewegt,

so gelangt er durchs Unendliche hindurch über N nach A zurück.

Bei allen drei Arten von Kegelschnitten gelangt also ein Punkt, der stets in demselben Sinne sich bewegt, wieder zum Ausgangspunkte zurück und umschliefst durch seinen Weg einen Teil der Ebene. Man nennt denselben das *innere Gebiet* des Kegelschnittes, den anderen das *äufsere Gebiet*, ganz wie beim Kreise.

Eine Gerade hat mit einem Kreise zwei Punkte oder einen Punkt (eigentlich zwei zusammenfallende Punkte) gemein oder sie trifft ihn gar nicht. Die verwandte Gerade hat also mit dem Kegelschnitte auch entweder zwei Punkte gemein oder einen Punkt oder sie schneidet ihn nicht. Daraus folgt:

a. *Ein Kegelschnitt wird von einer Geraden höchstens in zwei Punkten getroffen.*

Wegen dieser Eigenschaft erhält derselbe den Namen „*Kurve II. Ordnung*“.

Jede Gerade, die den Kreis in einem Punkte (oder zwei zusammenfallenden Punkten) trifft, heifst eine Tangente desselben; die verwandte Gerade trifft den Kegelschnitt auch in einem Punkte (oder zwei zusammenfallenden Punkten) und heifst gleichfalls eine *Tangente des Kegelschnittes.*

Der Unterschied zwischen dem inneren und äufseren Gebiete des Kegelschnittes besteht also darin, dafs sich von keinem Punkte des ersteren eine Tangente an denselben ziehen läfst, dafs sich ferner in jedem Punkte des äufseren Gebietes zwei Kegelschnittstangenten schneiden und dafs endlich durch jeden Punkt des Kegelschnittes nur eine Tangente (eigentlich zwei zusammenfallende Tangenten) geht. Als zweite Haupteigenschaft folgt:

b. *An einen Kegelschnitt lassen sich von einem Punkte höchstens zwei Tangenten ziehen.*

c. *Die unendlich ferne Gerade ist eine Tangente der Parabel.*

Denn die verwandte Leitlinie berührt den Parameterkreis.

Im Hyperbelfalle trifft die Leitlinie den Parameterkreis in zwei Punkten U und V, denen die unendlich fernen Punkte der Hyperbel U_∞ und V_∞ verwandt sind. Die Tangenten in den ersteren schneiden sich in einem Punkte P des Durch-

messers, welcher durch P und die Gerade UV harmonisch getheilt wird. Dem Durchmesser ist die Hauptaxe AA_1 verwandt, den Tangenten in U und V sind die Tangenten in U_∞ und V_∞, welche man die *Asymptoten* der Hyperbel nennt, und dem Punkte P ist ein Punkt M verwandt. Da M und die unendlich ferne Gerade $U_\infty V_\infty$ die Axe AA_1 auch harmonisch teilen müssen, so ist $AM = A_1M$:

d. *Die Asymptoten der Hyperbel schneiden sich in der Mitte der Hauptaxe.*

Sie sind den Geraden BU und BV parallel.

c. Die Hyperbel heifst *gleichseitig*, wenn die Asymptoten einen rechten Winkel bilden.

126. *Der geometrische Ort eines Punktes, dessen Abstände von einem festen Punkte B und einer festen Geraden l ein konstantes Verhältnis μ haben, ist ein Kegelschnitt mit dem Brennpunkte B und der Leitlinie l.* (Fig. 51, 52, 53).

Ist E_1 ein Punkt des Ortes, also $BE_1 : LE_1 = \mu$ konstant, so mache man $BC \perp l$, $CD = CB$, $m \perp BD$, BGE_1E harmonisch, dann ist

$$E_1G : E_1B = EG : EB$$

$$E_1F_1 : E_1B = EF : EB$$

$$HB \pm 2BC : E_1B = FJ \mp EJ : EB$$

$$\frac{HB}{E_1B} \pm \frac{2BC}{E_1B} = \frac{FJ}{EB} - \frac{EJ}{EB}.$$

Es ist

$$\frac{BH}{BE_1} = \frac{EJ}{EB},$$

also $\dfrac{2BH \pm 2BC}{BE_1} = \dfrac{2CH}{BE_1} = \dfrac{FJ}{BE}$ und da $FJ = 2BC$ ist,

$$\frac{LE_1}{BE_1} = \frac{BC}{BE}.$$

Das Verhältnis $\dfrac{LE_1}{BE_1}$ ist konstant gleich $\dfrac{1}{\mu}$, ebenso BC, also auch BE. Daraus folgt, dafs der Ort von E_1 die harmonische Kurve eines Kreises mit dem Radius

$$BE = \mu \cdot BC$$

um den Punkt B, also ein Kegelschnitt ist.

§ 12.

Pol und Polare beim Kegelschnitte.

128. *Alle Punkte, welche einen festen Punkt von einem Kegelschnitte harmonisch trennen, liegen auf einer Geraden.* (14, 79e, 122.)

Diese heifst die *Polare* des Punktes und der Punkt heifst ihr *Pol*.

Folgerungen. a. *Die Polare eines aufserhalb des Kegelschnittes gelegenen Punktes ist seine Berührungssehne.* (14a, 122, 125.)

b. *Die Polare eines Kegelschnittpunktes ist seine Tangente.* 14b.

129. Der Pol der unendlich fernen Geraden heifst der „*Mittelpunkt*“ des Kegelschnittes, denn er halbiert jede durch ihn gelegte Sehne (4b); jede Sehne durch den Mittelpunkt heifst ein *Durchmesser*. Der Mittelpunkt mufs auf der Hauptaxe liegen, weil diese eine Symmetrieaxe ist. Daraus aber folgt, dafs die im Mittelpunkte zur Hauptaxe errichtete Senkrechte auch eine Symmetrieaxe ist; sie heifst die *Nebenaxe*. Weiter folgt wegen der symmetrischen Lage des Kegelschnittes zu den beiden Axen, dafs derselbe einen *zweiten Brennpunkt* und eine *zweite Leitlinie* haben mufs, welche in Bezug auf den Mittelpunkt symmetrisch zu B und l liegen und deren Abstände von einem Punkte des Kegelschnittes dasselbe konstante Verhältnis haben, wie seine Abstände von B und l.

Da die Parabel die unendlich ferne Gerade g_∞ berührt, so hat sie keinen eigentlichen Mittelpunkt; als solchen hat man den Berührungspunkt auf g_∞ anzusehen, da er der Pol von g_∞ ist. *Deshalb sind alle Parabeldurchmesser einander und der Hauptaxe parallel; die Nebenaxe der Parabel ist* g_∞.

130. *Brennpunkt und Leitlinie sind Pol und Polare,* denn g_∞ ist die Polare des Kreismittelpunktes B und Leitlinie und g_∞ in d verwandte Gerade.

131. *Die Gerade, welche zwei Diagonalpunkte eines dem Kegelschnitte eingeschriebenen Vierecks verbindet, ist die Polare des dritten.* (15.)

132. *Wenn ein Punkt eine Gerade durchläuft, so dreht sich seine Polare um den Pol der Geraden.* (16.)

133. *Irgend zwei Tangenten eines Kegelschnittes werden durch einen Strahl ihres Schnittpunktes und dessen Pol harmonisch getrennt.* (17.)

134. *Der Schnittpunkt zweier Diagonalen eines umgeschriebenen Vierseits ist der Pol der dritten.* (18.)

135. *Dreht sich eine Gerade um einen Punkt, so durchläuft ihr Pol die Polare des Punktes.* (19.)

136. *Die Polaren von vier harmonischen Punkten sind harmonische Strahlen und die Pole von vier harmonischen Strahlen sind harmonische Punkte.* (20.)

137. *Die Polaren der Punkte einer involutorischen Reihe bilden ein involutorisches Büschel und die Pole der Strahlen eines involutorischen Büschels bilden eine involutorische Reihe.* Beweis wie in 20.

138. *In jedem einem Kegelschnitte eingeschriebenen Vierecke schneiden sich die Gegenseiten und die Tangenten in den Gegenecken in vier harmonischen Punkten.* (21.)

139. *In jedem einem Kegelschnitte umgeschriebenen Vierseite sind die Verbindungslinien der Gegenecken und der Berührungspunkte auf den Gegenseiten vier harmonische Strahlen.* (22.)

§ 13.

Konjugierte Punkte und Strahlen.

140. Zwei Punkte, von denen jeder auf der Polare des anderen liegt (16), heifsen *konjugierte Punkte* in Bezug auf den Kegelschnitt, zwei Strahlen, von denen jeder durch den Pol des anderen geht (19), heifsen *konjugierte Strahlen.*

Einem Punkte sind daher alle Punkte seiner Polare und dem Mittelpunkte alle unendlich fernen Punkte konjugiert; einer Geraden sind alle Strahlen durch ihren Pol und der unendlich fernen Geraden alle Durchmesser konjugiert.

Ist p die Polare eines Punktes P, Q einer ihrer Punkte, so mufs dessen Polare q durch P gehen und p in einem zu Q konjugierten Punkte R treffen. Da Q und R auch zu P konjugiert sind, so bilden PQR ein *Tripel konjugierter Punkte* oder ein *Poldreieck.*

Eine Seite des Poldreiecks ist die Polare der gegenüber-

liegenden Ecke und deshalb ist jede Seite des Poldreiecks jeder anderen Seite konjugiert.

Zu einem Punkte P einer Geraden g giebt es auf derselben nur einen konjugierten Punkt P_1, nämlich den Schnittpunkt von g mit der Polare von P; zu einem Strahle p durch einen Punkt Q giebt es durch denselben nur einen konjugierten Strahl p_1, nämlich die Gerade, welche den Pol von p mit Q verbindet; zu jedem Durchmesser giebt es einen konjugierten Durchmesser; Haupt- und Nebenaxe bilden ein Paar konjugierter Durchmesser.

141. *Alle Paare von konjugierten Punkten einer Geraden oder von konjugierten Strahlen eines Punktes, insbesondere alle Paare konjugierter Durchmesser, bilden eine Involution.* (36 a, 137, 79). *Das senkrechte Strahlenpaar der letzteren wird von den beiden Axen gebildet. Die Involution konjugierter Durchmesser hat nur bei der Hyperbel reelle Doppelstrahlen, die beiden Asymptoten.*

142. *Die Involution konjugierter Strahlen in einem Brennpunkte besteht aus Paaren zu einander rechtwinkliger Strahlen.*

Denn bei einem Kreise stehen je zwei konjugierte Durchmesser auf einander senkrecht und jeder Strahl durch das Centrum einer harmonischen Verwandtschaft ist sich selbst verwandt.

143. *Die Involution konjugierter Strahlen in einem Punkte schneidet die Polare desselben in der Involution konjugierter Punkte.*

144. *Die Polare eines Punktes P einer Leitlinie steht in ihrem Brennpunkte auf seiner Verbindungslinie mit dem Punkte P senkrecht.*

Denn der Brennpunkt ist der Pol der Leitlinie und in ihm stehen je zwei konjugierte Strahlen auf einander senkrecht.

145. *Der Pol einer Sehne durch einen Brennpunkt liegt auf seiner Leitlinie senkrecht über dem Brennpunkte.* (144)

146. *Von zwei konjugierten Strahlen schneidet mindestens der eine den Kegelschnitt.*

Denn liegt der eine ganz aufserhalb des Kegelschnittes, so liegt sein Pol innerhalb desselben, der konjugierte Strahl mufs ihn also schneiden.

147. *Von einem Poldreiecke liegen stets zwei Ecken aufserhalb, die dritte innerhalb des Kegelschnittes.*

Denn ist PQR ein Poldreieck und liegt P aufserhalb,

so sind PQ und PR konjugierte Strahlen, von denen der eine aufserhalb des Kegelschnittes liegt und der andere ihn schneidet.

148. *Von zwei konjugierten Durchmessern einer Hyperbel schneidet nur der eine dieselbe in reellen Punkten.*

Denn die Polare g_∞ des Mittelpunktes M schneidet die konjugierten Durchmesser in zwei Punkten P und Q, welche mit M ein Poldreieck bilden. Von diesen Punkten kann nach 147. nur der eine innerhalb der Hyperbel liegen.

148a. *Jeder Durchmesser halbiert die dem konjugierten Durchmesser parallelen Sehnen; die Tangenten in den Endpunkten eines Durchmessers sind dem konjugierten Durchmesser parallel.* (122.)

149. Sind SS_1 irgend zwei konjugierte Punkte eines Durchmessers, so ist das Produkt $MS \,.\, MS_1$ konstant; setzt man dasselbe gleich ϱ^2, so ist ϱ die Länge des halben Durchmessers.

Wählt man S und S_1 auf der Hauptaxe, so giebt die Gleichung $MS \cdot MS_1 = a^2$ die Gröfse $2a$ der Hauptaxe; liegen dagegen S und S_1 auf der Nebenaxe, so findet man aus der Gleichung $MS \cdot MS_1 = b^2$ die Gröfse $2b$ der letzteren.

Liegen S und S_1 auf derselben Seite von M, so schneidet die Nebenaxe den Kegelschnitt, liegen diese Punkte aber auf verschiedenen Seiten, so ist dies nicht der Fall. Ersteres findet bei der Ellipse, letzteres bei der Hyperbel statt.

150. *Zwei konzentrische Kegelschnitte, welche dieselbe Involution konjugierter Durchmesser haben, heifsen „ähnlich“. Die Axen des einen verhalten sich wie diejenigen des anderen.*

Man ziehe die Halbaxen MA und MB des einen Kegelschnittes, welche den anderen in A_1 und B_1 treffen mögen. Halbiert man AB in C, so sind MC und der durch M zu AB parallel gezogene Durchmesser d konjugiert. Die Parallele p durch A_1 zu AB und MC sind also auch konjugierte Richtungen; schneiden sich MC und p in C_1, so mufs C_1 der Halbierungspunkt der durch A_1 gehenden Sehne und der zwischen den Axen liegenden Strecke von p sein; letztere Gerade geht also durch B_1 und es ist $AB \parallel A_1B_1$. Daher

$$MA : MB = MA_1 : MB_1.$$

151. *Jede Gerade wird von einem Kegelschnitte und den*

Gegenseitenpaaren eines eingeschriebenen Vierecks in den Punktpaaren einer Involution geschnitten. (98.)

152. *Zieht man durch einen Punkt die Tangenten an einen Kegelschnitt und die Verbindungslinien nach den Gegeneckenpaaren eines umgeschriebenen Vierseits, so bilden diese Strahlenpaare eine Involution.* (98 a.)

153. *Diejenigen Geraden, welche einen Punkt P von den Punkten eines Kegelschnittes und den Gegenseitenpaaren eines ihm eingeschriebenen Vierecks harmonisch trennen, schneiden sich in einem zu P konjugierten Punkte.* (99.)

154. *Diejenigen Punkte, welche eine Gerade p von den Tangenten eines Kegelschnittes und den Gegenecken eines umgeschriebenen Vierseits harmonisch trennen, liegen auf einer konjugierten Geraden.* (119.)

155. *Ist ein Dreieck ABC einem Kegelschnitte K eingeschrieben, so schneidet jede Gerade g, welche der einen Seite AB konjugiert ist, die beiden anderen in konjugierten Punkten. Und wenn umgekehrt eine Gerade von zwei Seiten eines eingeschriebenen Dreiecks in konjugierten Punkten geschnitten wird, so ist sie der dritten konjugiert.*

Man stelle eine harmonische Verwandtschaft her, in welcher dem Kegelschnitte K ein Kreis $\mathfrak{K}$ und der g die g_∞ verwandt ist; dann mufs die verwandte Gerade $\mathfrak{AB}$ von AB ein Durchmesser von $\mathfrak{K}$ sein; $\mathfrak{AC}$ und $\mathfrak{BC}$ stehen aufeinander senkrecht und treffen g_∞ daher in zwei konjugierten Punkten.

156. *Ist ein Dreieck UVW einem Kegelschnitte umgeschrieben, so wird jeder Punkt, welcher der Ecke W konjugiert ist, aus U und V durch konjugierte Strahlen projiciert. Und wenn umgekehrt ein Punkt aus U und V durch konjugierte Strahlen projiciert wird, so ist er der Ecke W konjugiert.*

I. Der konjugierte Punkt W_1 zu W liege innerhalb des Kegelschnittes K. Man stelle eine harmonische Verwandtschaft her, in welcher dem K ein Kreis $\mathfrak{K}$ und dem Punkte W_1 der Mittelpunkt $\mathfrak{W}_1$ desselben verwandt ist. Von den verwandten Ecken $\mathfrak{UVW}$ liegt $\mathfrak{W}$ im Unendlichen, $\mathfrak{UW}$ und $\mathfrak{VW}$ sind parallel und daher ist $\sphericalangle\, \mathfrak{UW}_1\mathfrak{V} = 90^0$; $\mathfrak{UW}_1$ und $\mathfrak{VW}_1$ sind also konjugiert.

II. Der konjugierte Punkt W_1 liege aufserhalb. Man

stelle die harmonische Verwandtschaft so her, dafs der Geraden UW_1 die g_∞ verwandt ist. Da also die Tangenten durch $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{W}$ parallel sind, so sind die Polaren senkrecht zu einander, $\mathfrak{R}\mathfrak{W}_1$ geht durch den Mittelpunkt des Kreises und ist zu g_∞ konjugiert.

157. *Die Sätze von Pascal und Brianchon.*

a. *In jedem einem Kegelschnitte eingeschriebenen Sechsecke liegen die Schnittpunkte der Gegenseiten in einer Geraden.* (101. 104.)

b. *In jedem einem Kegelschnitte umgeschriebenen Sechsseite schneiden sich die Verbindungslinien der Gegenecken in einem Punkte.* (121.)

c. Die in 105 bis 111 vom Kreise aufgestellten Sätze behalten ihre Giltigkeit auch für den Kegelschnitt.

§ 14.

Bestimmung der Kegelschnitte durch Punkte und Tangenten.

158. *Fünf Punkte eines Kegelschnittes bestimmen alle übrigen.*

I. Es seien $ABCDE$ fünf Punkte eines Kegelschnittes K; man konstruiert die Polare p des Schnittpunktes P von AB und CD, indem man die Durchschnitte R von AC und BD und Q von AD und BC mit einander verbindet (128, 131). Zieht man PE und bestimmt darauf den Punkt F, welcher P und p von E harmonisch trennt, so ist auch F ein Punkt von K (128). In S und T auf p schneiden sich die Verbindungslinien von $CDEF$. Die Punkte MN, welche QR und ST harmonisch teilen, sind auch Punkte von K. Ist nun XY ein Punktpaar, welches MN harmonisch teilt, so müssen sich (128) AX und BY, BX und AY in zwei Punkten U und V von K treffen und wenn X und Y die Polare p durchlaufen, so durchlaufen U und V den Kegelschnitt K.

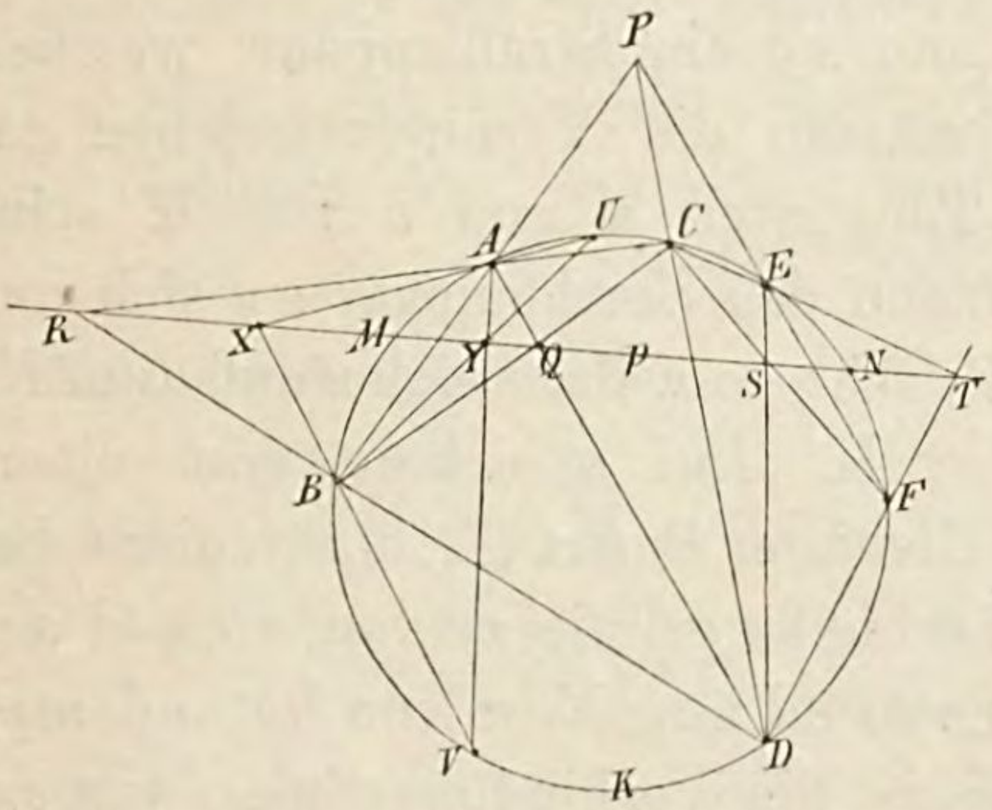


Fig. 54.

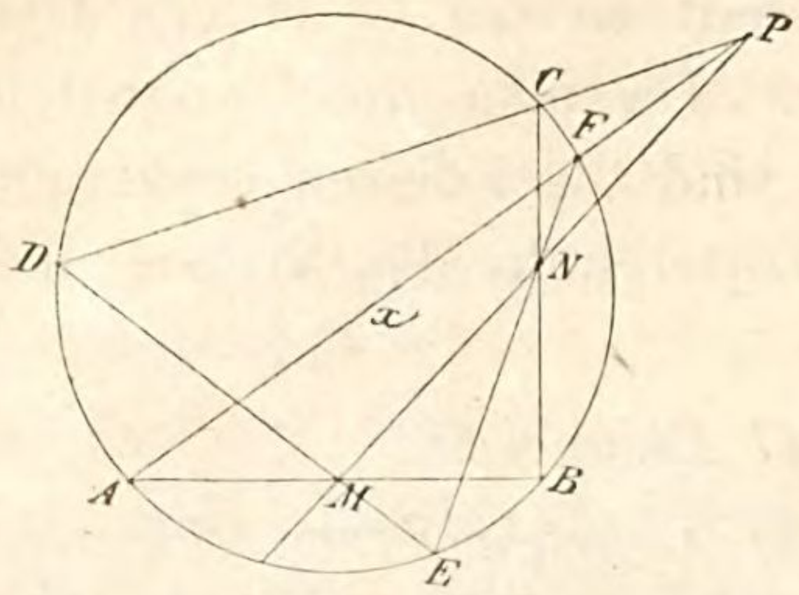


Fig. 55.

II. Durch A ziehe man eine beliebige Gerade x, bestimme die Schnittpunkte M von AB und DE, P von CD und x, N von BC und MP, so ist der Schnittpunkt F von EN und x ein Punkt des Kegelschnittes (157a). Wenn x sich um A dreht, so durchläuft F den Kegelschnitt.

159. *Fünf Tangenten eines Kegelschnittes K bestimmen alle übrigen.*

I. Es seien $abcde$ fünf Tangenten eines Kegelschnittes K; Man konstruiert den Pol P der Verbindungslinie p von ab und cd, indem man die Verbindungslinien r von ac und bd und q von ad und bc zum Durchschnitte bringt, (134). Zieht man durch den Punkt pe diejenige Gerade f, welche p und P harmonisch von e trennt, so ist auch f eine Tangente von K; (134). Auf den durch P gehenden Geraden s und t schneiden sich die Tangenten $cdef$. Die Strahlen m und n, welche qr und st harmonisch trennen, sind auch Tangenten von K, denn qr und st sind Strahlenpaare der dem Punkte P zugehörigen Involution konjugierter Strahlen. Ist nun xy ein Strahlenpaar, welches mn harmonisch trennt, so müssen die Verbindungslinien ax und by, ay und bx zwei Tangenten u und v von K sein. Wenn das Strahlenpaar xy sich um P dreht, so wälzen sich u und v auf K.

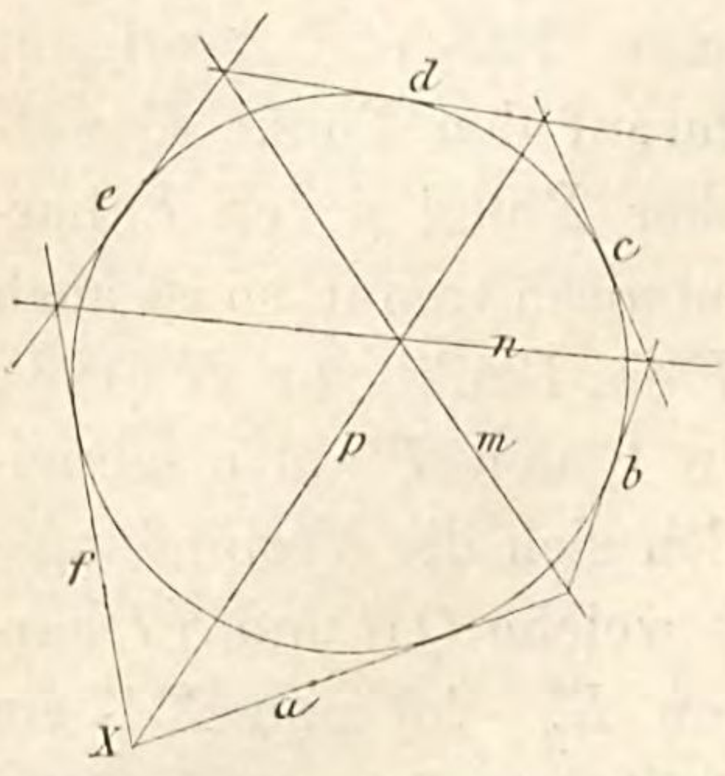


Fig. 56.

II. Auf a nehme man einen beliebigen Punkt X, konstruiere die Verbindungslinie m von ab und de, p von cd und X, n von bc und mp, so ist die Verbindungslinie f von en und X eine Tangente des Kegelschnittes (157b). Wenn X die Tangente a durchläuft, so wälzt sich f auf K.

III. Man konstruiere die Pole $ABCDE$ von $abcde$; diese sind die Berührungspunkte und also fünf Punkte von K. Nach 158 findet man alle übrigen.

160. *Vier Punkte eines Kegelschnittes und die Tangente in einem von ihnen bestimmen alle übrigen Punkte.*

I. Von dem Kegelschnitte K kennt man die Punkte $ABCD$ und die Tangente a in A. Man konstruiere den Durchschnitt P von a und BC, mache $BCPP_1$ harmonisch, so ist AP_1 die Polare p von P, schneide p mit BD in R und mit CD in Q, dann müssen sich CR, BQ, PD in einem Punkte E von K treffen. Endlich mache man $QRAM$ harmonisch und kann nun alle Punkte von K auf die 158. gezeigte Art konstruieren.

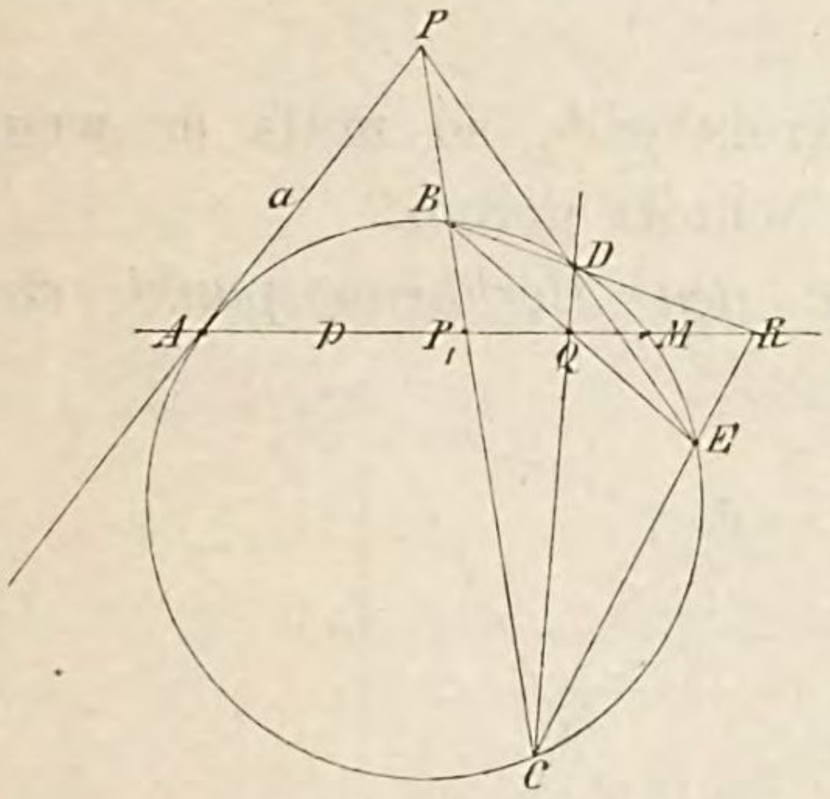


Fig. 57.

II. Gegeben sind von K die fünf Punkte $ABCDE$, von denen A und B zusammenfallen. Die Konstruktion der übrigen Punkte von K erfolgt wie in 158. II., wenn man statt AB die Tangente in A setzt.

161. *Vier Tangenten eines Kegelschnittes und der Berührungspunkt auf einer bestimmen alle übrigen Tangenten.*

Man kann entweder wie in 159. I. und II. verfahren oder die Methode der Polarisation anwenden.

162. *Drei Punkte und die Tangenten in zwei von ihnen bestimmen alle übrigen.*

I. Gegeben sind die Punkte ABC und die Tangenten a und b in A und B. Die Gerade AB oder p ist die Polare des Schnittpunktes P von a und b. Man schneide p mit PC in P_1, mache PP_1CD harmonisch so ist auch D ein Punkt von K. Die übrigen Punkte findet man wie in 158. I.

II. Gegeben sind von K die fünf Punkte $ABCDE$, von denen AB und CD zusammenfallen. Die Konstruktion der übrigen Punkte erfolgt wie in 158. II, wenn man statt der Sehnen AB und CD die Tangenten in A und C nimmt.

163. *Drei Tangenten und die Berührungspunkte auf zwei von ihnen bestimmen alle übrigen Punkte und Tangenten.*

Dies folgt auf eine der in 159. angegebenen Arten.

§ 15.

Die Brennpunkte.

164. *Verbindet man den Brennpunkt eines Kegelschnittes mit den Berührungspunkten zweier Tangenten und mit ihrem Schnittpunkte, so halbiert die letzte Verbindungslinie den von den beiden ersten gebildeten Winkel.*

Da dieser Satz für den Kreis gilt, so mufs er wegen 79 a. und b. auch für den Kegelschnitt gelten.

165. *Die Geraden, welche den Berührungspunkt einer Tangente mit den Brennpunkten verbinden, bilden mit der Tangente gleiche Winkel.*

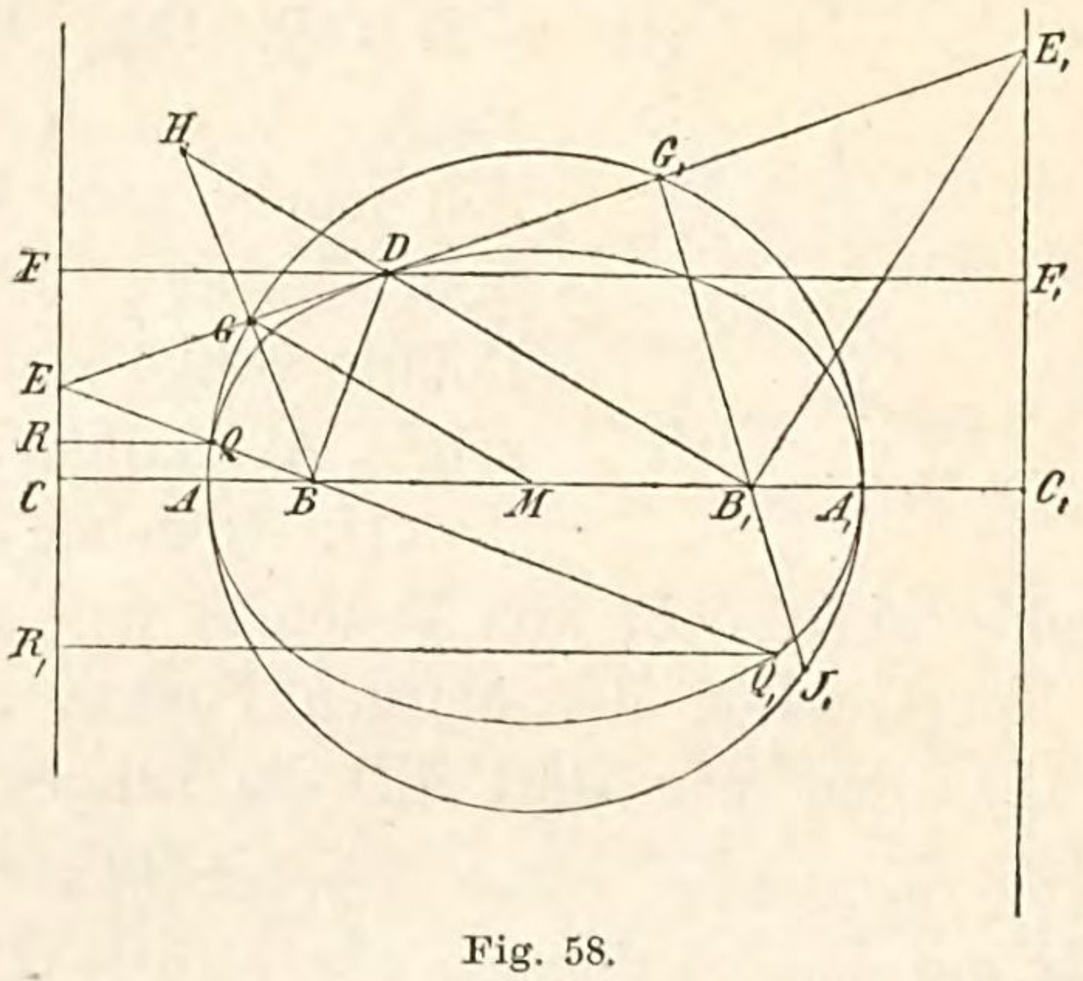


Fig. 58.

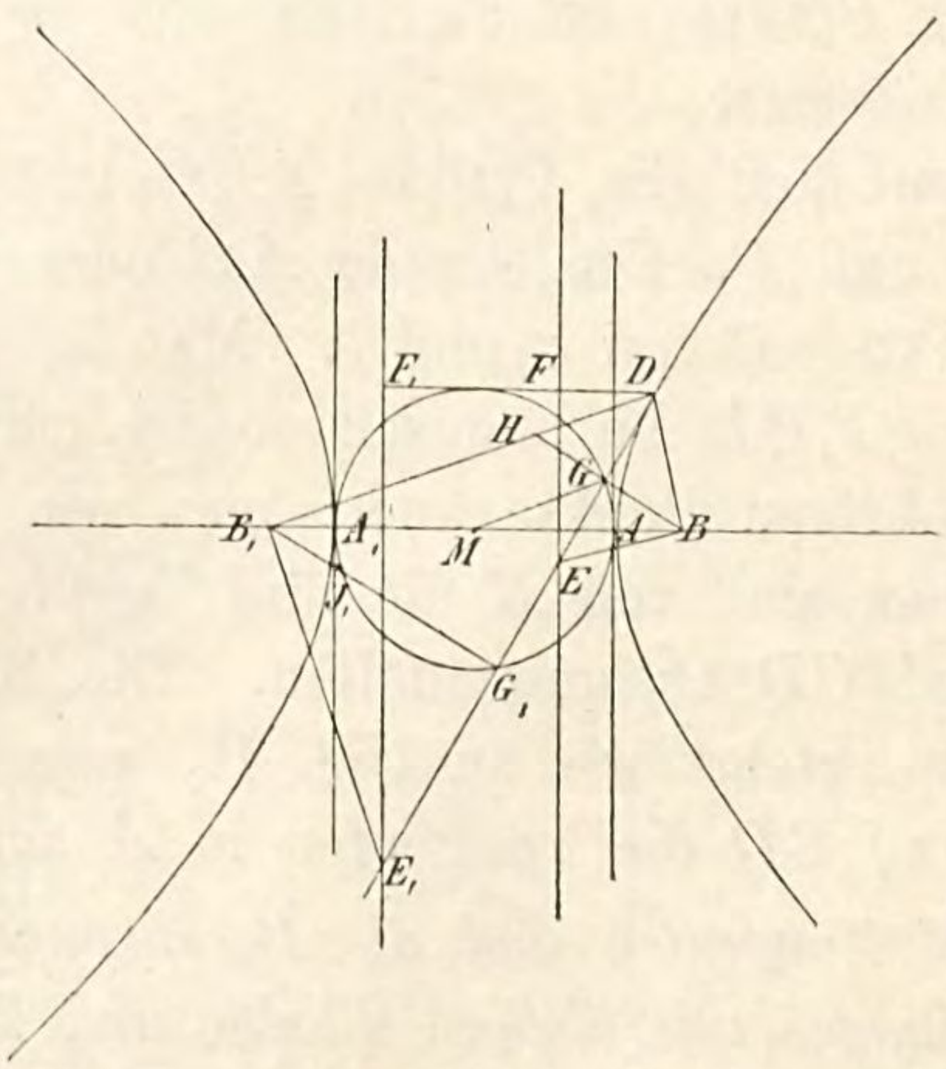


Fig. 58 a.

I. Im Punkte D eines Kegelschnittes K mit den Brennpunkten B und B_1 sei eine Tangente gezogen, welche die beiden Leitlinien in E und E_1 trifft. Diese Punkte sind die Pole von BD und B_1D (144) und es ist $\sphericalangle DBE = DB_1E_1 = 90^0$. Zieht man noch FF_1 durch D parallel zur Hauptaxe, so ist

$$DB : DF = DB_1 : DF_1,$$

also auch $DB : DB_1 = DF : DF_1 = DE : DE_1$,

daher ist $\triangle BDE \sim B_1DE_1$ und $\sphericalangle BDE = B_1DE_1$.

II. Im Falle der Parabel fällt der zweite Brennpunkt B_1 ins Unendliche, also die Gerade DB_1 mit DF_1 zusammen in

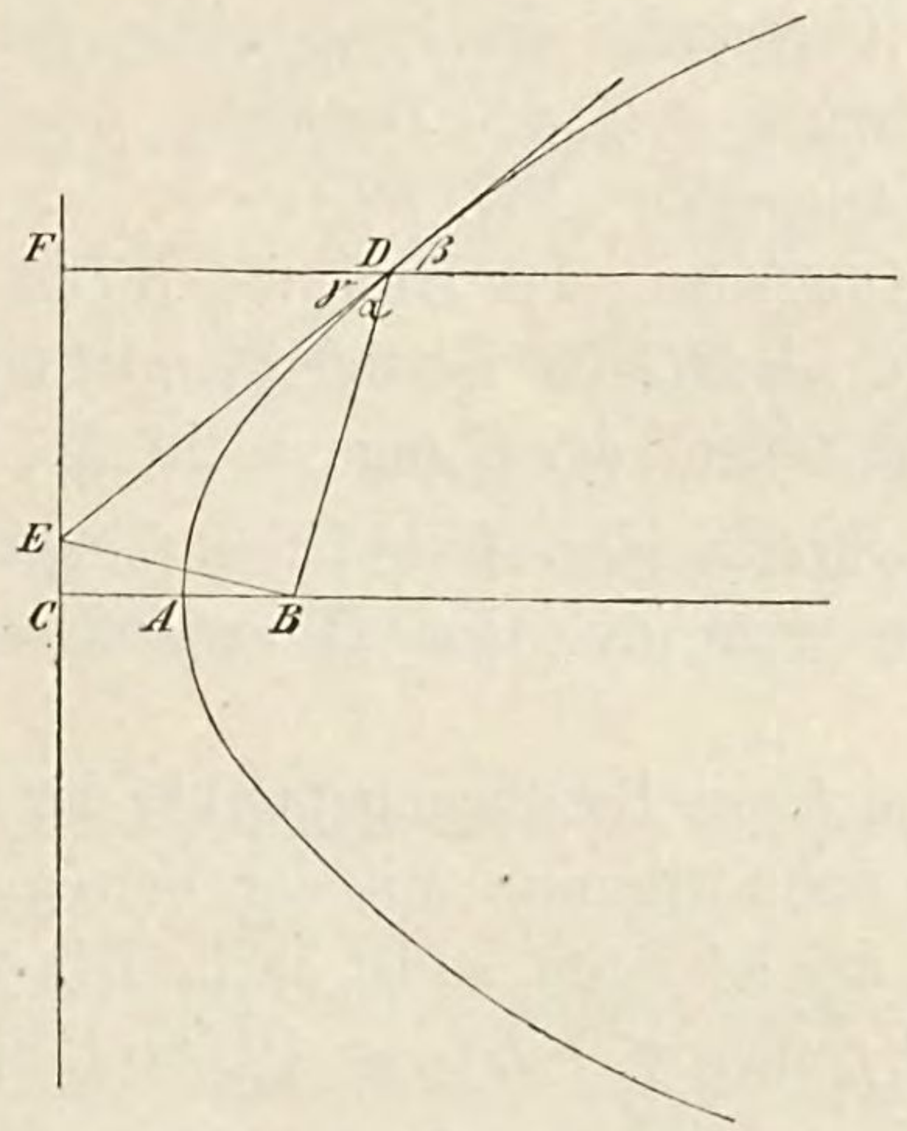


Fig. 59.

die Parallele zur Hauptaxe. Es wird $DB = DF$, $\triangle DBE \cong DFE$, und $\alpha = \gamma = \beta$.

166. *Bei einer Ellipse ist die Summe, bei einer Hyperbel die Differenz der Brennpunktsstrahlen eines ihrer Punkte gleich der Hauptaxe.*

Für die Punkte D und A gelten die Proportionen

$$DB : DB_1 = DF : DF_1$$

und

$$AB : AB_1 = AC : AC_1$$

Aus ihnen folgt:

$$DB_1 \pm DB : DF_1 \pm DF = DB : DF$$

$$AB_1 \pm AB : AC_1 \pm AC = AB : AC$$

Es ist aber

$$DF_1 \pm DF = AC_1 \pm AC, DB : DF = AB : AC, AB_1 \pm AB = AA_1$$

also

$$DB_1 \pm DB = AA_1$$

168. *Die Fufspunkte der Senkrechten, die von den Brennpunkten auf die Tangenten einer Ellipse oder Hyperbel gefällt werden, liegen auf einem Kreise um den Mittelpunkt M, welcher durch die Scheitel geht. — Scheitelkreis.*

Fig. 58. 59. Man fälle $BG \perp EE_1$ und schneide es mit B_1D in H, dann ist $\triangle BDG \simeq HDG$, also $BD = HD$ und $B_1H = AA_1$ Ferner ist $GM \parallel B_1H$, also $GM = \frac{1}{2} AA_1 = MA$.

168. *Die Fufspunkte der Senkrechten, die von dem Brennpunkte einer Parabel auf die Tangenten gefällt werden, liegen auf der Scheiteltangente.* (Fig. 59.)

Aus der Kongruenz der Dreiecke BDE und FDE folgt $BF \perp DE$, $BG = FG$ (G ist der Schnittpunkt von BF und DE); also liegt G auf der Tangente in A.

169. *Die Strecke einer beweglichen Tangente zwischen zwei festen Tangenten erscheint jedem Brennpunkte unter konstantem Winkel.*

Sind D und E die Berührungspunkte der festen Tangenten, F und G ihre Schnittpunkte mit der beweglichen, H der Berührungspunkt der letzteren, so ist nach 164. $\sphericalangle FBH = FBD$, $GBH = GBE$, also $\sphericalangle FBG = \frac{1}{2}(DBH + EBH)$.

169a. *Die Scheiteltangenten begrenzen auf jeder anderen Tangente eine Strecke, welche jedem Brennpunkte unter einem rechten Winkel erscheint.*

Folgt aus 169.

170. *Das Rechteck aus den Perpendikeln, die von den Brennpunkten auf eine Tangente gefällt werden können, ist konstant.*

Man fälle die Perpendikel BG und B_1G_1; die Fufspunkte liegen nach 165. auf dem Scheitelkreise. Da $B_1J_1 = BG$ und $B_1J_1 \cdot B_1G_1 = B_1A_1 \cdot B_1A$ konstant ist, so ist auch $BG \cdot B_1G_1$ konstant.

171. Man setze die Hauptaxe $AA_1 = 2a$, die *Excentricität* $BB_1 = 2e$, dann ist bei der Ellipse (Fig. 58) $B_1A_1 \cdot B_1A = (a - e)(a + e) = a^2 - e^2 = ML^2$. Diese Länge ML bezeichnet man mit b und nennt sie die halbe Nebenaxe.

Bei der Hyperbel wird $B_1A_1 \,.\, B_1A = (e - a)\,(e + a)$ $= e^2 - a^2 = ML^2$. Die Länge $ML = b$ heifst auch hier die halbe kleine Axe, obgleich L kein Hyperbelpunkt ist (148).

Die senkrechte Brennpunktssehne heifst *Parameter* (2p).

172. Es sei QQ_1 eine Brennpunktssehne, welche die Leitlinie in E trifft; von Q und Q_1 fälle man die Senkrechten QR und Q_1R_1 auf die Leitlinie, dann ist

$$QB : QR = Q_1B : Q_1R_1 = p : BC, \quad \text{(Fig. 51.)}$$

also $$QB : p : Q_1B = QR : BC : Q_1R_1 = QE : BE : Q_1E.$$

Da aber QQ_1EB harmonische Punkte sind, so folgt

$$QE : QB = Q_1E : Q_1B$$

oder $$QE : QE + QB = Q_1E : Q_1E + Q_1B$$

$$QE : BE = Q_1E : 2Q_1E - BE$$

und $$2QE \,.\, Q_1E = BE\,(QE + Q_1E)$$

Daher auch $2QB \,.\, Q_1B = p \,.\, (QB + Q_1B) = p \,.\, QQ_1$, d. h.

Das doppelte Produkt aus den Abschnitten einer Brennpunktssehne ist gleich dem Produkt aus dieser Sehne und dem halben Parameter.

173. *Durch die Hauptaxe und eine Tangente ist ein Kegelschnitt bestimmt.*

Es sei AA_1 die Hauptaxe, t irgend eine Tangente; über AA_1 beschreibe man einen Kreis, welcher die Tangenten in D und D_1 schneidet, errichte in D und D_1 auf t Senkrechte, welche die Achse in B und B_1 treffen, mache AA_1BC harmonisch, so ist die Senkrechte in C die Leitlinie. Man kennt also vom Kegelschnitte Brennpunkt, Leitlinie und das Verhältnis der Abstände irgend eines Kegelschnittpunktes von beiden gleich $AB : AC$. Also ist nach 126 der Kegelschnitt bestimmt.

Liegt A_1 im Unendlichen, so geht der Kreis über AA_1 in die Senkrechte in A auf AA_1 über, welche die Tangente t in D trifft. Man erhält den Brennpunkt B und wenn man $AC = AB$ macht und in C die Senkrechte errichtet, auch die Leitlinie des Kegelschnittes, der in diesem Falle eine Parabel wird.

174. *In jeder harmonischen Verwandtschaft ist einem Kreise oder einem Kegelschnitte ein Kegelschnitt verwandt.*

Es sei K irgend ein Kegelschnitt, O sei das Centrum und o die Axe einer harmonischen Verwandtschaft. Aus den Gesetzen derselben folgt unmittelbar, dafs für die verwandte krumme Linie $\mathfrak{K}$ alle Polareigenschaften gelten. Der Mittellinie m von O und o ist g_∞ verwandt; es sei M der Pol von m bezüglich K, so ist der verwandte Punkt $\mathfrak{M}$ der Pol von g_∞ bezüglich $\mathfrak{K}$, also der Mittelpunkt von $\mathfrak{K}$. Der Involution konjugierter Strahlen in Bezug auf K in M ist daher die Involution konjugierter Durchmesser in $\mathfrak{M}$ verwandt. Diese hat ein Paar rechtwinklige Strahlen, von denen mindestens einer $\mathfrak{K}$ schneiden mufs (146). Die Schnittpunkte des einen seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$; sollten beide Strahlen $\mathfrak{K}$ schneiden, so sei $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ der gröfsere der beiden Durchmesser. Es sei t irgend eine Tangente von $\mathfrak{K}$; durch diese und $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ als Hauptaxe ist ein Kegelschnitt $\mathfrak{K}'$ bestimmt (173), die beiden krummen Linien haben die Tangente t, die Punkte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ und die Tangenten in ihnen gemeinsam. Diese letzteren stehen nämlich auf $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ senkrecht. Für die Tangenten von $\mathfrak{K}$ folgt dies deshalb, weil der konjugierte Durchmesser zu $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ auf $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ senkrecht steht und für $\mathfrak{K}'$ deshalb, weil $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ die Hauptaxe ist. Deshalb mufs $\mathfrak{K}$ mit $\mathfrak{K}'$ zusammenfallen (163), weil für beide die Polareigenschaften gelten und $\mathfrak{K}$ ist also ein Kegelschnitt.

Der Beweis in 163. gilt nämlich nicht nur für einen Kegelschnitt, sondern für jede Figur, für welche die Polareigenschaften bestehen.

175. *Die Polarisationsfigur eines Kegelschnittes ist wieder ein Kegelschnitt.* Cf. 271.

Es sei K irgend ein Kegelschnitt, die Basis der Polarisation ein anderer Kegelschnitt O.

Aus den Gesetzen der Polarisation folgt unmittelbar, dafs für die verwandte krumme Linie $\mathfrak{K}$ alle Polareigenschaften gelten. Der Pol $\mathfrak{M}$ von g_∞ ist also der Mittelpunkt von $\mathfrak{K}$ Die Involution konjugierter Durchmesser in $\mathfrak{M}$ hat ein Paar rechtwinklige Strahlen, von denen mindestens einer $\mathfrak{K}$ schneiden mufs (146). Die Schnittpunkte des einen seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$

und wenn beide Strahlen $\mathfrak{K}$ schneiden, so sollen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ die Endpunkte der gröfseren Sehne sein. Durch eine Tangente t von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ als Hauptaxe ist ein Kegelschnitt $\mathfrak{K}'$ bestimmt (173), der (163) mit $\mathfrak{K}$ zusammenfallen mufs.

176. *Eine harmonische Verwandtschaft herzustellen, in welcher einem gegebenen Kegelschnitte K ein Kreis $\mathfrak{K}$ und einer gegebenen Geraden g die g_∞ verwandt ist.*

Auf der Geraden g, welche aufserhalb K liegen mufs, denke man sich die Involution der konjugierten Punkte hergestellt und über jedem Paare einen Kreis beschrieben. Diese Kreise schneiden sich in zwei Punkten O und O' (36c.). In derjenigen harmonischen Verwandtschaft, welche O als Centrum hat und deren Axe durch O' parallel zu g angenommen wird, ist dem Kegelschnitte K ein Kreis $\mathfrak{K}$ verwandt.

Ist nämlich G der Pol von g, AB eine Sehne durch G, sind PP_1, QQ_1, RR_1, ... konjugierte Punkte auf g, so treffen sich die Geraden AP und BP_1, AP_1 und BP, AQ und BQ_1, AQ_1 und BQ, ... in den Punkten P' und P_1', Q' und Q_1', ... von K. In der verwandten Figur $\mathfrak{K}$ werden die verwandten Punkte mit denselben deutschen Buchstaben bezeichnet. Es ist also $\mathfrak{G}$, der Pol von g_∞, der Mittelpunkt von $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ ein Durchmesser. Die Winkel $\mathfrak{A}\mathfrak{P}'\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}\mathfrak{P}_1'\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}\mathfrak{Q}'\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}\mathfrak{Q}_1'\mathfrak{B}$, ... müssen rechte Winkel sein; daher ist $\mathfrak{K}$ ein Kreis.

177. *Eine harmonische Verwandtschaft herzustellen, in welcher einem Kegelschnitte K ein Kreis und einem Punkte G der Mittelpunkt des Kreises verwandt ist.*

Auf der Polare g von G bestimme man die Involution konjugierter Punkte und mittelst derselben ganz wie in 177. die harmonische Verwandtschaft.

178. *Eine harmonische Verwandtschaft herzustellen, in welcher einem Kegelschnitte K ein anderer und 1. einer Geraden eine Leitlinie des letzteren 2. einem Punkte ein Brennpunkt des letzteren verwandt ist.*

179. Gegeben ist ein Kegelschnitt K mit den Axen $2a$ und $2b$. Ein Punkt der Axe $2a$ sei C und c seine Polare, welche die Axe in D schneidet; auf letzterer seien E und E_1

diejenigen konjugierten Punkte, welche gleichweit von D entfernt sind. Dann verhält sich $DE^2 : MF.MF_1 = DE : MF_1$, wenn F und F_1 konjugierte Punkte sind. Da $MF.MF_1 = b^2$ und die Polare von E mit der Geraden E_1CF_1 zusammenfallen mufs, so ist $DE^2 : b^2 = DE_1 : MF_1 = DC : MC$; aber $DC = MD - MC$, $MC.MD = a^2$, $MD = \frac{a^2}{MC}$, folglich

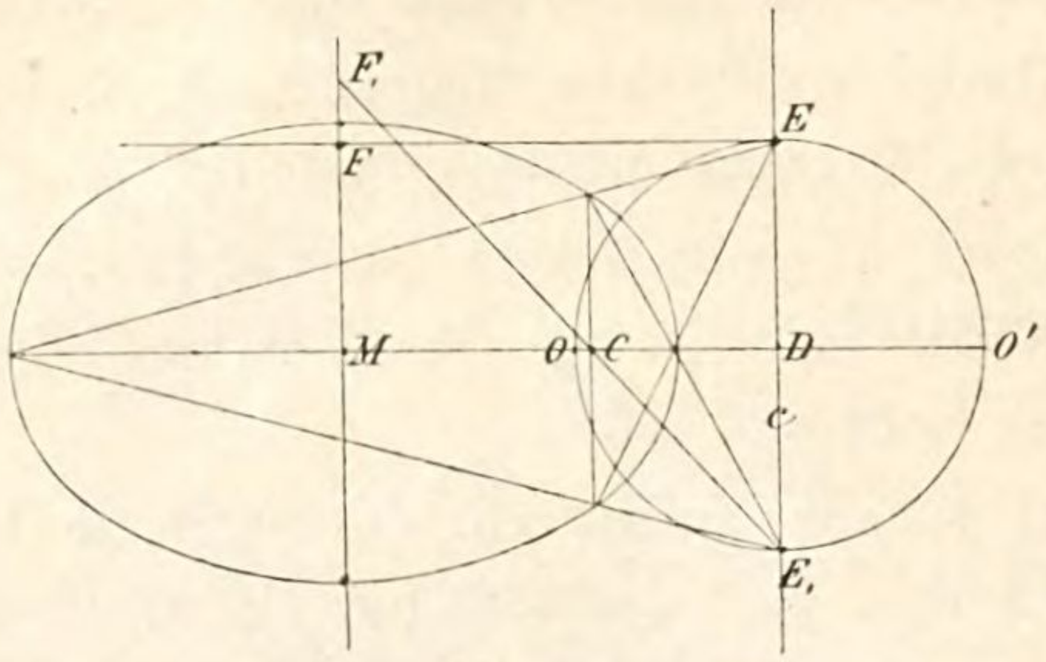


Fig. 60.

$$DE^2 : b^2 = a^2 - MC^2 : MC^2$$

und

$$DE^2 = b^2 . \frac{a^2 - MC^2}{MC^2}$$

Beschreibt man über EE_1 einen Kreis, welcher die Axe in OO' schneidet, zieht $o \parallel c$ durch O' und wählt O und o als Centrum und Axe einer harmonischen Verwandtschaft, so ist dem Kegelschnitte K ein Kreis $\mathfrak{K}$ verwandt, denn der Involution konjugierter Strahlen in C ist eine circulare Involution konjugierter Strahlen verwandt.

Mit Hilfe obiger Formel ist die Aufgabe gelöst: *Zu jedem Punkte der Axe $2a$ als Centrum die Axe derjenigen harmonischen Verwandschaft zu konstruieren, in welcher dem Kegelschnitte K ein Kreis verwandt ist.* Wenn nämlich O ein beliebiger Punkt der Axe ist, so ist

$$OM = DM - OD = DM - DE$$

$$= \frac{a^2 - b\sqrt{a^2 - MC^2}}{MC}$$

oder $MC.OM = a^2 - b\sqrt{a^2 - MC^2}$, woraus MC sich ergiebt, die Polare c von C und endlich o.

180. Zwei Kegelschnitte mit den Axen $2a$, $2b$ und $2a_1$, $2b_1$ und den Mittelpunkten MM_1 liegen so, dafs zwei derselben z. B. $2a$ und $2a_1$ in einer Geraden g liegen. Für die Potenzen der Involutionen konjugierter Punkte auf einer zu g senkrechten Geraden findet man nach der oben entwickelten Formel (Fig. 60)

$b^2 \cdot \frac{DC}{MC}$ und $b_1{}^2 \cdot \frac{D_1 C_1}{M_1 C_1}$. Setzt man beide Ausdrücke einander gleich, so bestimmt man *die Lage derjenigen Geraden, welche für beide Kegelschnitte dieselbe Involution konjugierter Punkte enthält.* Diese Gerade heifst die *reelle oder ideelle gemeinschaftliche Secante* der Kegelschnitte. Man findet, wenn man $MD = x$, $M_1 D = x_1$, $MD \cdot MC = a^2$, $MD_1 \cdot MC_1 = a_1{}^2$ setzt,

$$b^2 \cdot \frac{MD - MC}{MC} = b_1{}^2 \cdot \frac{M_1 D_1 - M_1 C_1}{M_1 C_1}$$

oder
$$b^2 \cdot \frac{x^2 - a^2}{a^2} = b_1{}^2 \cdot \frac{x_1{}^2 - a_1{}^2}{a_1{}^2}$$

oder
$$\frac{x^2 - a^2}{x_1{}^2 - a_1{}^2} = \frac{a^2 b_1{}^2}{a_1{}^2 b^2}$$

180a. Es kann sich ereignen, dafs der eine der beiden Kegelschnitte K und K_1, etwa K_1, ein Punkt wird, wobei noch vorausgesetzt werden soll, dafs K_1 auf keiner Axe von K liegt. Die Polaren zweier Punkte A und B bezüglich K_1 seien die Geraden a und b, welche sich natürlich in K_1 schneiden müssen; dann sind a und $K_1 A$, b und $K_1 B$ je zwei konjugierte Strahlen. Durch diese beiden Paare ist aber die Involution konjugierter Strahlen bezüglich K_1 gegeben. Die Paare konjugierter Strahlen durch K_1 bezüglich des Kegelschnittes K bilden auch eine Involution und diese hat mit der vorigen ein Paar konjugierter Strahlen gemein; es sei dieses das Paar mm_1.

Man kann nun durch eine harmonische Verwandtschaft K und K_1 so transformieren, dafs der Punkt $\mathfrak{K}_1$ als Kreis angesehen werden kann und im Mittelpunkte von $\mathfrak{K}$ liegt, wenn $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}$ die transformirten Figuren sind. Zu dem Zwecke schneide man die Involution der konjugierten Strahlen bezüglich K_1 mit der Polare p von K_1 in Bezuf auf K in einer Punktinvolution. Diese hat keine Doppelpunkte; also schneiden sich die Kreise, die man über den Entfernungen je zweier konjugierten Punkte, als Durchmessern, beschreibt, in zwei Punkten O und O' Den ersteren wähle man als Centrum einer harmonischen Verwandtschaft, deren Mittellinie p ist und deren Axe also durch O' parallel zu p läuft. Die letztere mag m und m_1 in M und M_1 schneiden; diesen Punkten sind die im Unendlichen liegenden Punkte $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}_1$

verwandt, welche auf den Geraden OM und OM_1 liegen müssen. Da aber $\sphericalangle MOM_1 = 90^0$ ist, so mufs auch $\sphericalangle \mathfrak{M}\mathfrak{K}_1\mathfrak{M}_1 = 90^0$ sein. Für den Punktkegelschnitt $\mathfrak{K}_1$ ist also die Involution konjugierter Strahlen eine circulare, also ist $\mathfrak{K}_1$ als Kreis zu betrachten.

Der Mittellinie p der Verwandtschaft ist aber die unendlich ferne Gerade verwandt; dem Pole K_1 von p in Bezug auf K ist also der Pol von g_∞, der Mittelpunkt von $\mathfrak{K}$ verwandt und da $\mathfrak{K}_1$ und K_1 verwandte Punkte sind, so ist $\mathfrak{K}_1$ der Mittelpunkt von $\mathfrak{K}$.

Auf einer im Punkte P der Nebenaxe senkrecht zu ihr errichteten Geraden seien Q und Q_1 diejenigen konjugierten Punkte, welche gleichweit von P entfernt sind; es ist dann, wenn P_1 der konjugierte Punkt von P auf der Nebenaxe ist,

$$PQ^2 = a^2 \cdot \frac{b^2 - \mathfrak{K}_1 P_1{}^2}{\mathfrak{K}_1 P_1{}^2}$$

wo a und b die Halbaxen von $\mathfrak{K}$ sind. Da nun $\mathfrak{K}_1 P \cdot \mathfrak{K}_1 P_1 = b^2$, so wird

$$PQ^2 = \frac{a^2 \cdot (\mathfrak{K}_1 P^2 - b^2)}{b^2}$$

Setzt man diesen Ausdruck gleich $\mathfrak{K}_1 P^2$, so findet man denjenigen Punkt P, auf dessen zur Nebenaxe senkrecht errichteten Geraden die Strahlenpaare der circularen Involution in $\mathfrak{K}_1$ und der Involution konjugierter Strahlen in P_1 sich in denselben Punktpaaren treffen. Man findet

$$\mathfrak{K}_1 P = \pm \frac{a \cdot b}{e}, \text{ wo } e^2 = a^2 - b^2.$$

Diese Senkrechte in P ist also die ideelle gemeinschaftliche Sekante von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$. Die zu ihr bezüglich der Hauptaxe symmetrisch liegende Gerade ist eine zweite ideelle Sekante.

Die ihnen verwandten Geraden q und q_1 sind zwei ideelle Sekanten von K und K_1.

Sind P' und P_1' zwei konjugierte Punkte der Hauptaxe und $Q'Q_1'$ diejenigen konjugierten Punkte auf der in P' zur Hauptaxe senkrechten Geraden, welche gleichweit von dieser entfernt sind, so ist

$$P'Q'^2 = b^2 \cdot \frac{a^2 - P_1'\mathfrak{K}_1{}^2}{P_1'\mathfrak{K}_1{}^2} = \frac{b^2\,(P'\mathfrak{K}_1{}^2 - a^2)}{a^2}$$

Setzt man diesen Ausdruck gleich $P'\mathfrak{K}_1^2$, so erhält man denjenigen Punkt P' und in ihm diejenige Gerade, auf welcher jedem Punkte bezüglich $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$ derselbe Punkt konjugiert ist. Man erhält

$$P'\mathfrak{K}_1^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2}$$

und

$$P'\mathfrak{K}_1 = \pm \frac{ab}{c} \cdot \sqrt{-1}$$

Aufser den reellen gemeinschaftlichen Sekanten, die parallel zur Hauptaxe liegen, giebt es also noch zwei imaginäre gemeinschaftliche Sekanten parallel zur Nebenaxe.

Es haben also $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$ zwei reelle und zwei imaginäre gemeinschaftliche Sekanten; dasselbe gilt demnach auch von K und K_1. Somit gilt der Satz:

Ein Kegelschnitt K und ein Punktkegelschnitt K_1 haben zwei reelle und zwei imaginäre gemeinschaftliche Sekanten. Erstere haben für beide Kegelschnitte dieselbe Involution konjugierter Punkte. — Die Polare von K_1 bezüglich K geht durch den Schnittpunkt der reellen Sekanten und trennt sie harmonisch von K_1.

Denn bei $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$ sind die reellen Sekanten gleichweit vom Mittelpunkte entfernt und zur Axe senkrecht.

181. Diese Entwicklung verliert ihre Giltigkeit für den Fall, dafs einer der Kegelschnitte Parabel wird: Um auch für diesen Fall die Lage der gemeinschaftlichen Sekante zu bestimmen, soll zuvor eine Eigenschaft der Parabel abgeleitet werden.

Zwei Gerade b und b_1 stehen in den Punkten B und B_1, welche um a und a_1 vom Scheitel A entfernt sind, auf der Axe senkrecht; die Potenzen der auf ihnen befindlichen Involutionen konjugierter Punkte seien $BD^2 = BE^2$ und $B_1 D_1^2$. Man mache $AC = AB$, $AC_1 = AB_1$; dann ist EC die Polare von D und DC_1 diejenige von G. Da

$$B_1G \;.\; B_1G_1 = B_1D_1^2,$$

so ist $B_1D_1^2 : BD^2 = B_1G \;.\; B_1G_1 : BD \;.\; BE.$

Aber $B_1G \;\; : BE \;\; = B_1C : BC$

$B_1G_1 \;\; : BD \;\; = B_1C_1 : BC_1$

$B_1C = BC_1,\; BC = 2a,\; B_1C_1 = 2a_1,$

also $B_1D_1^2 : BD^2 = a_1 : a,$

d. h. *die Potenzen der Involutionen konjugierter Punkte auf zwei zur Parabelaxe senkrechten Geraden verhalten sich wie die Abstände dieser Geraden vom Scheitel.*

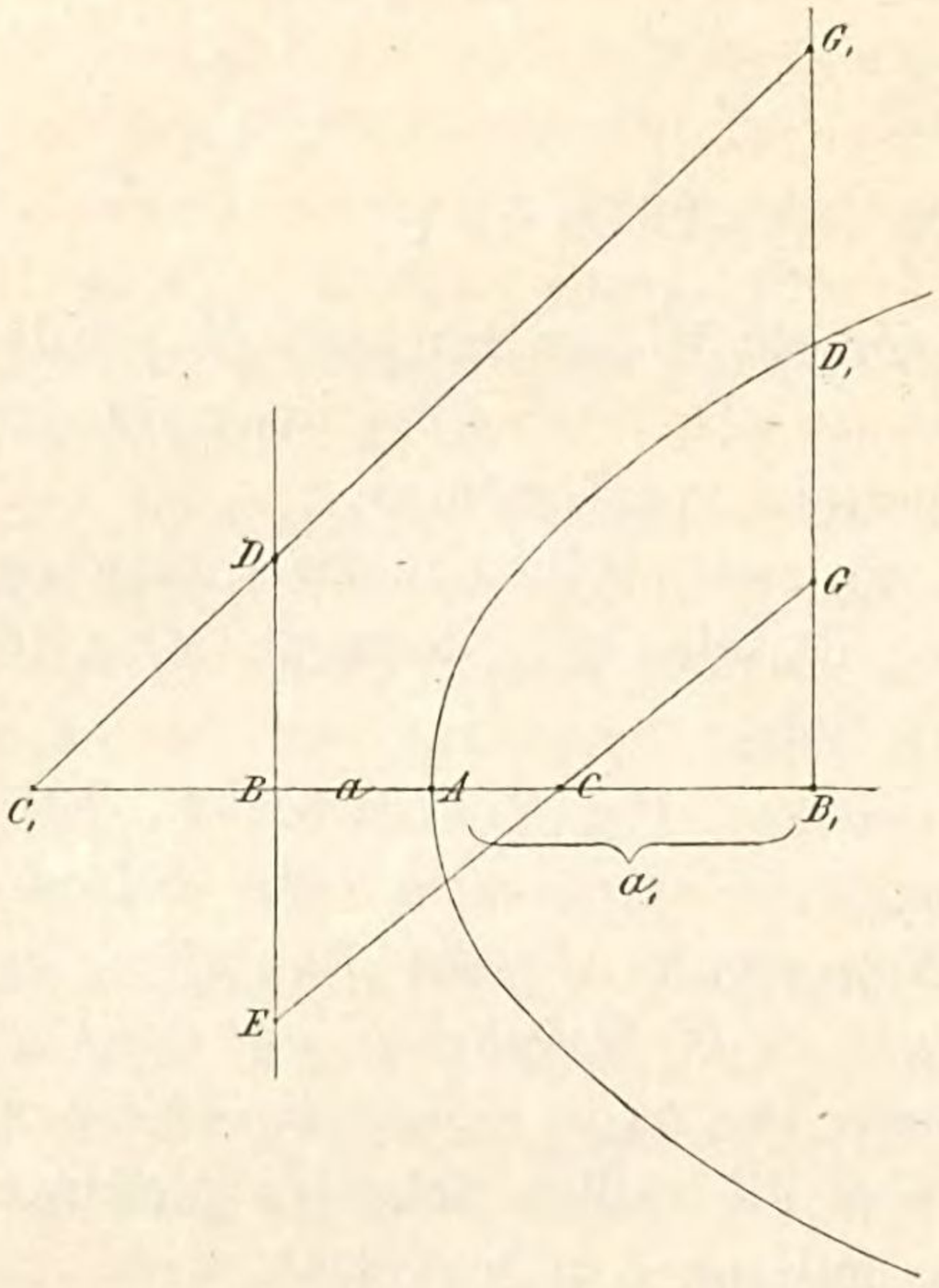


Fig. 61.

Denkt man sich jetzt eine Parabel K und einen anderen Kegelschnitt K_1, deren Hauptaxen zusammenfallen mögen und in der Entfernung x vom Scheitel A der Parabel und x_1 vom Mittelpunkte M_1 eine Senkrechte C auf der gemeinschaftlichen Axe errichtet, nimmt man ferner die Potenzen der Involutionen konjugierter Punkte auf derselben gleich p^2 und ${p_1}^2$ und diejenige auf der Nebenaxe von K_1 für die Parabel gleich q^2 an,

so ist $$p^2 = q^2 \cdot \frac{x}{M_1 A} \text{ und } {p_1}^2 = {b_1}^2 \cdot \frac{{x_1}^2 - {a_1}^2}{{a_1}^2}.$$

Sollen beide Potenzen gleich sein, so ist

$$q^2 \cdot \frac{x}{M_1 A} = {b_1}^2 \cdot \frac{{x_1}^2 - {a_1}^2}{{a_1}^2}$$

worin noch $x + x_1 = M_1 A$ zu setzen ist.

Sind beide Kegelschnitte Parabeln mit den Scheiteln A und A_1, sind x und x_1 die Entfernungen der Senkrechten c von den Scheiteln, sind ferner q^2 und ${q_1}^2$ die Potenzen zweier zur Axe senkrechten Geraden in den Entfernungen a und a_1 von den Scheiteln, so mufs

$$q^2 \cdot \frac{x}{a} = {q_1}^2 \cdot \frac{x_1}{a_1},$$

$$\frac{x}{x_1} = \frac{a}{a_1} \cdot \frac{{q_1}^2}{q^2}$$

sein.

In den beiden ersten Fällen ergeben die Formeln zwei gemeinschaftliche Sekanten; im letztem Falle tritt scheinbar nur eine auf. Als zweite hat man aber hier die unendlich ferne Gerade zu betrachten, welche als gemeinschaftliche Tangente beider Parabeln anzusehen ist.

Beschreibt man um den Schnittpunkt der gemeinschaftlichen Sekante mit der Centrale einen Kreis, dessen Radius die Quadratwurzel aus der Potenz der Involution konjugierter Punkte auf der Sekante ist, so kann man jeden seiner Schnittpunkte als Centrum einer harmonischen Verwandtschaft nehmen, in welcher beiden Kegelschnitten Kreise verwandt sind. Die Axen dieser Verwandtschaften bestimmt man durch die Bedingung, dafs die der gemeinschaftlichen Sekante verwandte Gerade ins Unendliche fällt.

Somit ist die Aufgabe gelöst:

Zwei Kegelschnitte, deren Axen in einer Geraden liegen, durch harmonische Verwandtschaft in Kreise zu verwandeln.

§ 16.

Konstruktion der Kegelschnitte aus gegebenen Punkten und Tangenten.

182. *Durch fünf Punkte ist stets ein einziger Kegelschnitt bestimmt.*

Sind $ABCDE$ fünf beliebige Punkte, so stelle man nach 87. eine solche harmonische Verwandtschaft her, dafs die verwandten Punkte auf einem Kreise liegen. Der diesem (174) verwandte Kegelschnitt geht durch $ABCDE$ und ist wegen 158. der einzige durch diese Punkte.

183. *Durch fünf Tangenten ist stets ein einziger Kegelschnitt bestimmt.*

Sind $abcde$ fünf beliebige Gerade, so stelle man nach 90. eine solche harmonische Verwandtschaft her, dafs die fünf verwandten Geraden einen Kreis berühren. Der diesem verwandte Kegelschnitt ist wegen 159. der einzige, welcher $abcde$ zu Tangenten hat.

184. *Durch vier Punkte $ABCD$ und die Tangente a in A ist stets ein einziger Kegelschnitt bestimmt.*

91. 160.

185. *Durch vier Tangenten und den Berührungspunkt auf einer von ihnen ist stets ein einziger Kegelschnitt bestimmt.*

92. 161.

186. *Durch drei Punkte und die Tangenten in zwei von ihnen ist stets ein einziger Kegelschnitt bestimmt.*

93. 162.

187. *Durch drei Tangenten und die Berührungspunkte auf zwei von ihnen ist stets ein einziger Kegelschnitt bestimmt.*

94. 163.

188. *Der geometrische Ort des Scheitels eines harmonischen Strahlenbüschels, dessen Strahlen durch vier feste Punkte gehen, von denen keine drei in einer Geraden liegen, ist ein Kegelschnitt.*

Sind $ABCD$ vier feste, nicht in einer Geraden liegende Punkte und ist $S(ABCD)$ ein harmonisches Büschel, so ist durch die fünf Punkte $ABCDS$ ein Kegelschnitt K bestimmt und jeder Punkt S' hat, wie beim Kreise, die Eigenschaft, dafs $S'(ABCD)$ auch ein harmonisches Büschel ist. Gäbe es aufser der Peripherie von K noch einen Punkt X, so dafs $X(ABCD)$ harmonisch wäre, und schnitte XA den Kegelschnitt in Y, so wäre auch $Y(ABCD)$ harmonisch. Weil aber XA und YA in einer Geraden liegen, so müfsten auch BCD in einer Geraden liegen, was gegen die Annahme ist.

188a. *Verbindet man zwei feste Punkte S und S_1 mit den Punktpaaren einer Involution AA_1, BB_1, . . . so ist der Ort des Schnittpunktes der Verbindungsgeraden ein Kegelschnitt.*

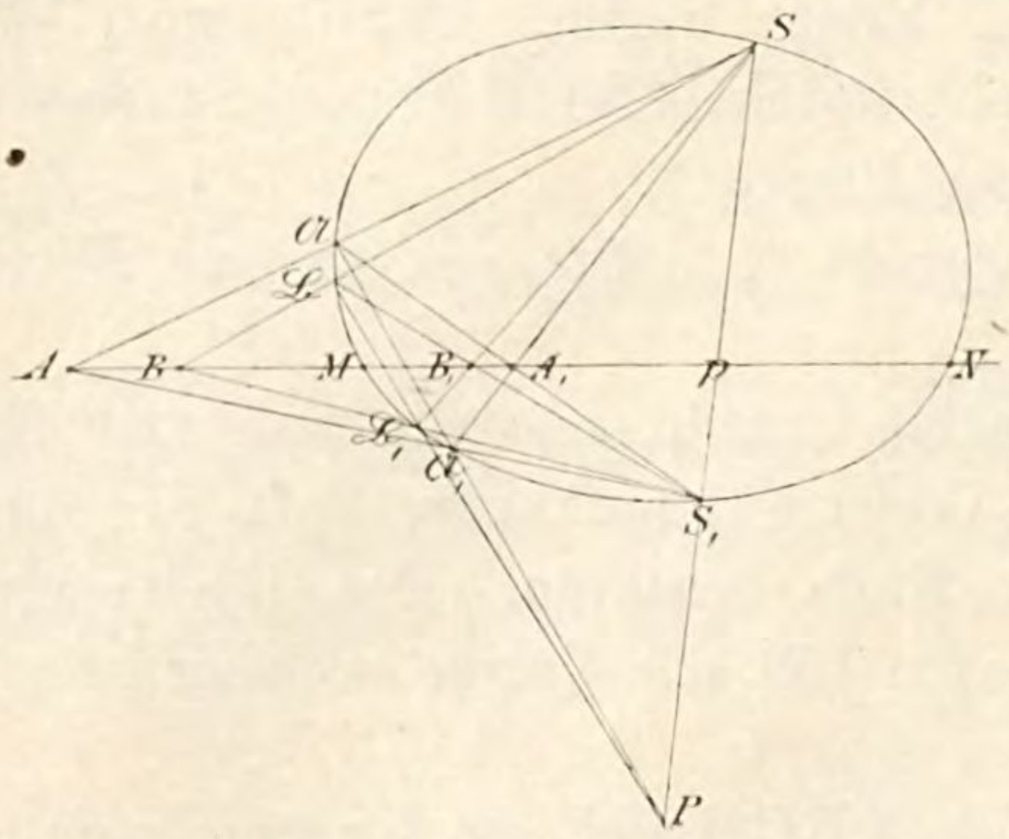


Fig. 61a.

I. Die Involution AA_1, BB_1 . . . auf p hat Doppelpunkte M und N.

Die Strahlen SA, S_1A_1 und S_1A, SA_1 mögen sich in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ schneiden; dann sind $S(MN\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1)$ und $S_1(MN\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1)$ harmonische Büschel, also sind $SS_1MN\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ Punkte eines Kegelschnittes K. Wenn sich $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ und SS_1 in P schneiden, so ist A_1P die Polare von A in Bezug auf K und AP

diejenige von A_1. Verbindet man S mit B, so erhält man mit K den Schnittpunkt $\mathfrak{B}$; schneidet man K mit $P\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{B}_1$, so müssen sich $S\mathfrak{B}$ und $S_1\mathfrak{B}_1$ sowie $S\mathfrak{B}_1$ und SB in zwei Punkten der Polare p oder AA_1 schneiden. Der erste dieser Schnittpunkte ist B; der zweite heifse X. Da aber PX die Polare von B sein mufs, also $MNBX$ harmonische Punkte sind, so fällt X mit B_1 zusammen. Also sind die Schnittpunkte der Strahlenpaare SB, S_1B_1 und S_1B, SB_1, d. i. $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_1$ Punkte von K.

II. Die Involution AA_1, BB_1, ... auf p hat keine Doppelpunkte.

Stellt man eine harmonische Verwandtschaft her, welche p zur Mittellinie hat und deren Centrum einer der Schnittpunkte ist, in denen die Kreise über AA_1, BB_1, sich treffen, so sind die Strahleninvolutionen in S und S_1 circularen Involutionen in den verwandten Punkten $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}_1$ verwandt. Sind $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$, ... die zu AA_1, BB_1, ... verwandten im Unendlichen liegenden Punkte, so schneiden sich die zu einander rechtwinkligen Strahlen $\mathfrak{S}\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{S}_1\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{S}\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{S}_1\mathfrak{A}$, $\mathfrak{S}\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{S}_1\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{S}\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{S}_1\mathfrak{B}$, ... auf dem Kreise $\mathfrak{K}$ mit dem Durchmesser $\mathfrak{S}\mathfrak{S}_1$. Ihm ist ein Kegelschnitt K verwandt, welcher durch S und S_1 und die Schnittpunkte SA und S_1A_1, SA_1 und S_1A, SB und S_1B_1, SB_1 und S_1B, ... geht.

188b. *Schneidet man zwei feste Gerade s und s_1 durch die Strahlenpaare einer Involution aa_1, bb_1, ... so ist der Ort der Verbindungslinien der Schnittpunkte ein Kegelschnitt.*

I. Wenn die Involution aa_1, bb_1, ... Doppelstrahlen hat, so läfst sich der Beweis ebenso wie in 188a. führen.

II. Die Involution aa_1, bb_1, ... hat keine Doppelstrahlen.

Es sei M der Scheitel der Involution und S der Schnittpunkt von s und s_1. Das Strahlenpaar aa_1 schneide s in PQ, s_1 in P_1Q_1 und es mögen sich PQ_1 und P_1Q in R treffen. Durch S und R lege man die Gerade g, diese schneidet die Strahleninvolution in einer Punktinvolution. O sei einer der Punkte, von denen letztere durch eine circulare Strahleninvolution projiciert wird. Nimmt man O zum Centrum und g zur Mittellinie einer harmonischen Verwandtschaft, so ist der

Involution in M eine circulare Involution in $\mathfrak{M}$ und dem Tangentenpaare ss_1 ein paralleles Tangentenpaar $\mathfrak{s}\mathfrak{s}_1$ verwandt. Das Strahlenpaar $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ der Involution in $\mathfrak{M}$ muſs parallel sein, also ist die von $\mathfrak{s}\mathfrak{s}_1\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ gebildete Figur ein Rhombus, in welchen sich ein Kreis $\mathfrak{K}$ beschreiben läſst, mit $\mathfrak{M}$ als Mittelpunkt. Jedes durch $\mathfrak{M}$ gelegte rechtwinklige Geradenpaar, also jedes Strahlenpaar der circularen Involution in $\mathfrak{M}$, schneidet aber die parallelen Tangenten $\mathfrak{s}\mathfrak{s}_1$ in solchen Punkten, daſs ihre Verbindungslinien Tangenten von $\mathfrak{K}$ sind.

Also müssen die Verbindungslinien der Schnittpunkte, welche die Strahlenpaare aa_1, bb_1, ... ss_1 bestimmen, einen Kegelschnitt K, welcher der zum Kreise $\mathfrak{K}$ verwandte Kegelschnitt ist, umhüllen.

189. *Alle Geraden, welche vier feste Gerade, von denen keine drei durch einen Punkt gehen, in harmonischen Punkten schneiden, sind Tangenten eines Kegelschnittes.*

Beweis entweder wie in 188. oder durch Polarisation.

190. *Schneidet man eine Gerade g mit den Strahlen eines Büschels S und konstruiert auf jedem Strahle zu seinem Schnittpunkte den konjugierten Punkt bezüglich eines Kegelschnittes K, so liegen alle konjugierten Punkte auf einem Kegelschnitte K_1.*

Man stelle eine harmonische Verwandschaft her, in welcher dem Kegelschnitte K ein Kreis $\mathfrak{K}$ und der g die g_∞ verwandt ist. Dem Büschel S ist ein anderes $\mathfrak{S}$ verwandt; die konjugierten Punkte zu den Schnittpunkten des letzteren mit g_∞ bezüglich $\mathfrak{K}$ sind die Fuſspunkte der vom Mittelpunkte des Kreises auf die Strahlen von $\mathfrak{S}$ gefällten Perpendikel. Diese Fuſspunkte liegen auf einem Kreise $\mathfrak{K}$; auf dem verwandten Kegelschnitte K_1 liegen die konjugierten Punkte zu den Schnittpunkten der Strahlen von S mit g bezüglich K.

191. *Schneidet man eine Gerade mit den Strahlen eines Büschels und konstruiert in jedem Schnittpunkte zu dem durchgehenden Strahle den konjugierten Strahl bezüglich eines Kegelschnittes K, so sind alle konjugierten Strahlen Tangenten eines Kegelschnittes.*

Entweder direkt durch harmonische Verwandtschaft oder durch Polarisation aus 190.

§ 17.

Poldreiecke.

192. *Sind AA_1 und BB_1 zwei Paar konjugierter Punkte, so sind auch die Schnittpunkte CC_1 der Seitenpaare AB, A_1B_1 und AB_1, BA_1 konjugierte Punkte.*

I. Folgt aus 109.

II. Die Polaren von A und B gehen durch A_1 und B_1 und mögen sich in D schneiden; dann sind DA und DA_1, DB und DB_1 konjugierte Strahlenpaare. Sie sind aber auch Strahlenpaare der Involution, welche durch die Verbindungslinien von D mit den sechs Ecken $AA_1BB_1CC_1$ gebildet wird und da die konjugierten Strahlenpaare in D gleichfalls eine Involution bilden, so sind DC und DC_1 konjugierte Strahlen und weil C_1D die Polare von C ist, so sind CC_1 konjugierte Punkte.

193. *Die sechs Ecken zweier Poldreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ liegen auf einem Kegelschnitte.*

Die Ecke A_1 liege innerhalb; man stelle eine harmonische Verwandtschaft her, so dafs der Geraden B_1C_1 die unendlich ferne Gerade und dem Kegelschnitte ein Kreis verwandt ist.

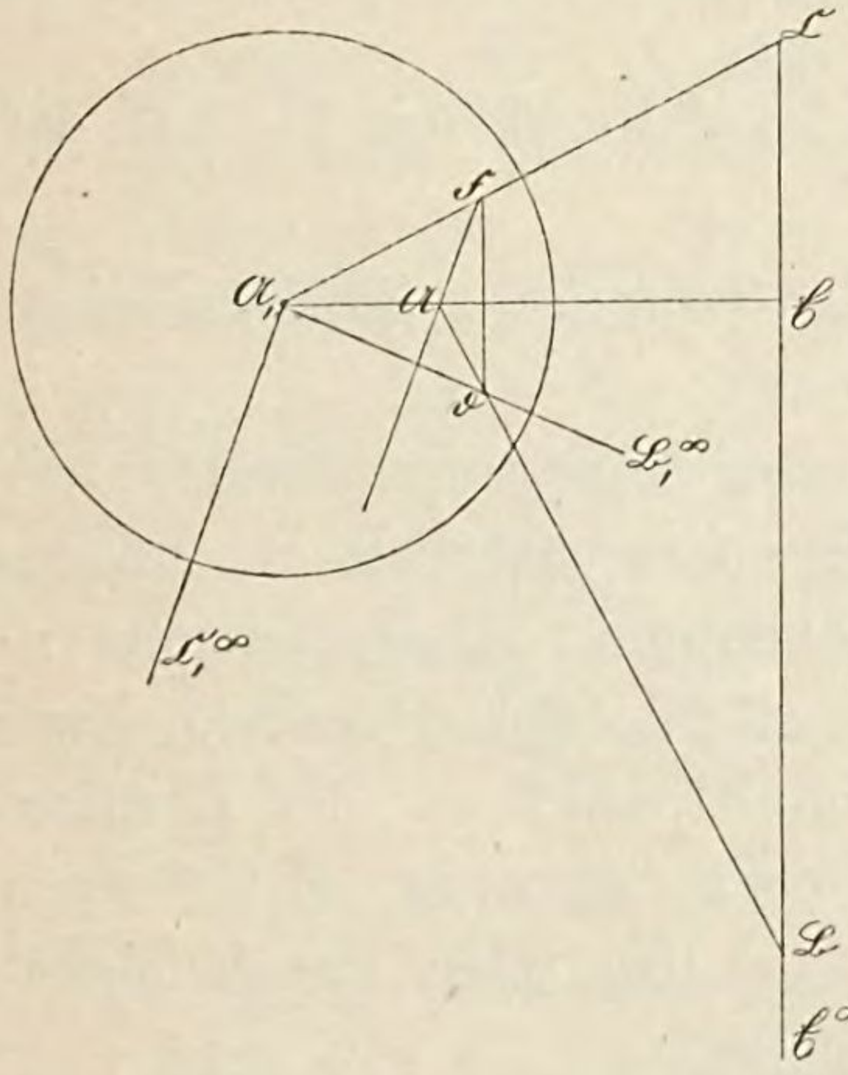


Fig. 62.

Man bezeichne die verwandten Punkte mit $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1^\infty\mathfrak{C}_1^\infty$. In dem Sechsecke $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1$ bestimme man die Schnittpunkte der Gegenseiten $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}^\infty$, $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}\mathfrak{C}_1$. Da $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1 \perp \mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_1$, als konjugierte Strahlen, stehen mufs, so schneiden sich in $\mathfrak{A}$ zwei Höhen $\mathfrak{D}\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{F}\mathfrak{A}$ des Dreiecks $\mathfrak{A}_1\mathfrak{D}\mathfrak{F}$, also ist auch $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1 \perp \mathfrak{D}\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{D}\mathfrak{F}$ geht durch $\mathfrak{E}^\infty$. Das Sechseck ist also ein Pascal'sches und seine Ecken, mithin auch die des verwandten Sechsecks, liegen auf einem Kegelschnitte.

194. *Sind* $\mathfrak{ABC}$ *drei Punkte einer gleichseitigen Hyperbel* H, *so liegt auf derselben auch der Höhenpunkt des Dreiecks* $\mathfrak{ABC}$. Fig. 62. Cf. 309.

Ist $\mathfrak{A}_1$ der Höhenpunkt des Dreiecks $\mathfrak{ABC}$, so beschreibe man um denselben einen Kreis, für welchen $\mathfrak{ABC}$ ein Poldreieck ist. Man findet seinen Radius r aus der Gleichung $r^2 = \mathfrak{A}_1\mathfrak{A} \,.\, \mathfrak{A}_1\mathfrak{E}$. Durch $\mathfrak{A}_1$ ziehe man die Geraden nach den unendlich fernen Punkten $\mathfrak{B}_1^\infty\mathfrak{C}^\infty$ der Hyperbel, so stehen diese auf einander senkrecht und deshalb sind $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1^\infty\mathfrak{C}_1^\infty$ auch die Ecken eines Poldreiecks des Kreises. Folglich liegen die sechs Ecken $\mathfrak{ABC}\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1^\infty\mathfrak{C}_1^\infty$ auf einem Kegelschnitte, der mit H fünf Punkte gemein hat und also mit ihm identisch ist.

195. *Zwei senkrechte Sehnen einer gleichseitigen Hyperbel schneiden sich so, dafs die Produkte aus ihren Abschnitten gleich sind.* Fig. 62.

Denn aus den ähnlichen Dreiecken $\mathfrak{ABE}$ und $\mathfrak{A}_1\mathfrak{CE}$ folgt $\mathfrak{AE} \,.\, \mathfrak{A}_1\mathfrak{E} = \mathfrak{BE} \,.\, \mathfrak{CE}$.

195a. Die Höhe auf die Hypotenuse eines rechtwinkligen, einer gleichseitigen Hyperbel eingeschriebenen Dreiecks, ist eine Tangente derselben.

Denn wird $\sphericalangle \mathfrak{BAC} = 90^0$, so fällt $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A}_1$ auf der Geraden $\mathfrak{AE}$ zusammen.

196. *Die sechs Seiten zweier Poldreiecke berühren einen Kegelschnitt.*

I. Man denke sich eine Parabel konstruiert, welche die vier Geraden $\mathfrak{AB}$, $\mathfrak{BC}$, $\mathfrak{CA}$, $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1^\infty$ und natürlich die unendlich ferne Gerade berührt. Der Höhenpunkt $\mathfrak{A}_1$ des Tangentendreiecks $\mathfrak{ABC}$ liegt auf der Leitlinie der Parabel. Zwei Tangenten der Parabel, deren Schnittpunkt auf der Leitlinie liegt, stehen auf einander senkrecht, also ist $\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_1^\infty$ auch eine Tangente der Parabel. — Die benutzten Parabeleigenschaften sind 215. und 221. abgeleitet.

II. Durch Polarisation aus 193.

197. *Zwei einem Kegelschnitte* K *eingeschriebene Dreiecke* ABC *und* $A_1B_1C_1$ *sind stets Poldreiecke eines anderen Kegelschnittes.*

Man stelle eine solche harmonische Verwandtschaft her, dafs der Geraden B_1C_1 die unendlich ferne Gerade g_∞, den Winkeln $B_1A_1C_1$ und A_1EB rechte Winkel verwandt sind, wenn E der Schnittpunkt von BC und AA_1 ist. Zu dem Zwecke beschreibe man über B_1C_1 und D_1E_1 als Durchmessern Kreise; sind O und O_1 deren Schnittpunkte, so kann man O als Centrum und die zu B_1C_1 durch O_1 gelegte Parallele als Axe der gesuchten Verwandtschaft wählen. In der verwandten Figur $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1^\infty\mathfrak{C}_1^\infty$ ist $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1^\infty \perp \mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_1^\infty$ und $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ eine Höhe des Dreiecks $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$. Da der dem Kegelschnitte K verwandte Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ eine gleichseitige Hyperbel sein mufs, so ist $\mathfrak{A}_1$ der Höhenpunkt des Dreiecks $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$. Daher giebt es einen Kreis um $\mathfrak{A}_1$, für welchen $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1^\infty\mathfrak{C}_1^\infty$ Poldreiecke sind. Für den ihm verwandten Kegelschnitt sind ABC und $A_1B_1C_1$ Poldreiecke.

198. Die Paare konjugierter Punkte P_1P_2, $P_1'P_2'$, ... einer Geraden p bilden eine Involution; ist P der Pol von p, so sind PP_1P_2, $PP_1'P_2'$, ... Poldreiecke. Jedem derselben läfst sich ein Kreis umschreiben und alle diese Kreise bilden ein Büschel, denn sie haben einen gemeinschaftlichen Punkt und schneiden eine Gerade in einer Involution. Durch PP_1 lege man die Gerade q, deren Pol P_2 sein mufs. Alle Kreise durch P_2, welche q in zwei konjugierten Punkten schneiden, bilden ebenfalls ein Büschel; dasselbe hat mit dem vorigen den durch das Poldreieck PP_1P_2 bestimmten Kreis gemeinschaftlich. Man kann die Geraden p und q als zwei beliebige Gerade betrachten und folgert dann:

Die Gesamtheit aller Kreise, welche den Poldreiecken eines Kegelschnittes umgeschrieben sind, bilden ein Netz. (Siehe Nachtrag.)

199. Es giebt einen Kreis $\mathfrak{K}$, welcher alle Kreise dieses Netzes rechtwinklig schneidet; sein Mittelpunkt M fällt mit demjenigen des Kegelschnittes zusammen. Auf $\mathfrak{K}$ sei D ein beliebiger Punkt, DE und DE_1 seien die beiden Tangenten an den Kegelschnitt, so gehören die Kreise durch D, welche die Gerade EE_1 in E und E_1 berühren, zu den Kreisen des Netzes. Da der Kreis $\mathfrak{K}$ beide im Punkte D rechtwinklig

schneidet, so liegen ihre Mittelpunkte F und F_1 auf der Tangente in D und in diesem Punkte müssen sich beide berühren. Ist G der Schnittpunkt von EE_1 mit MD, so stehen die Geraden GF und GF_1 als Halbierungslinien zweier Nebenwinkel auf einander senkrecht; da sie aber auch mit ED und E_1D rechte Winkel bilden, so ist $\sphericalangle EDE_1 = 90^0$,

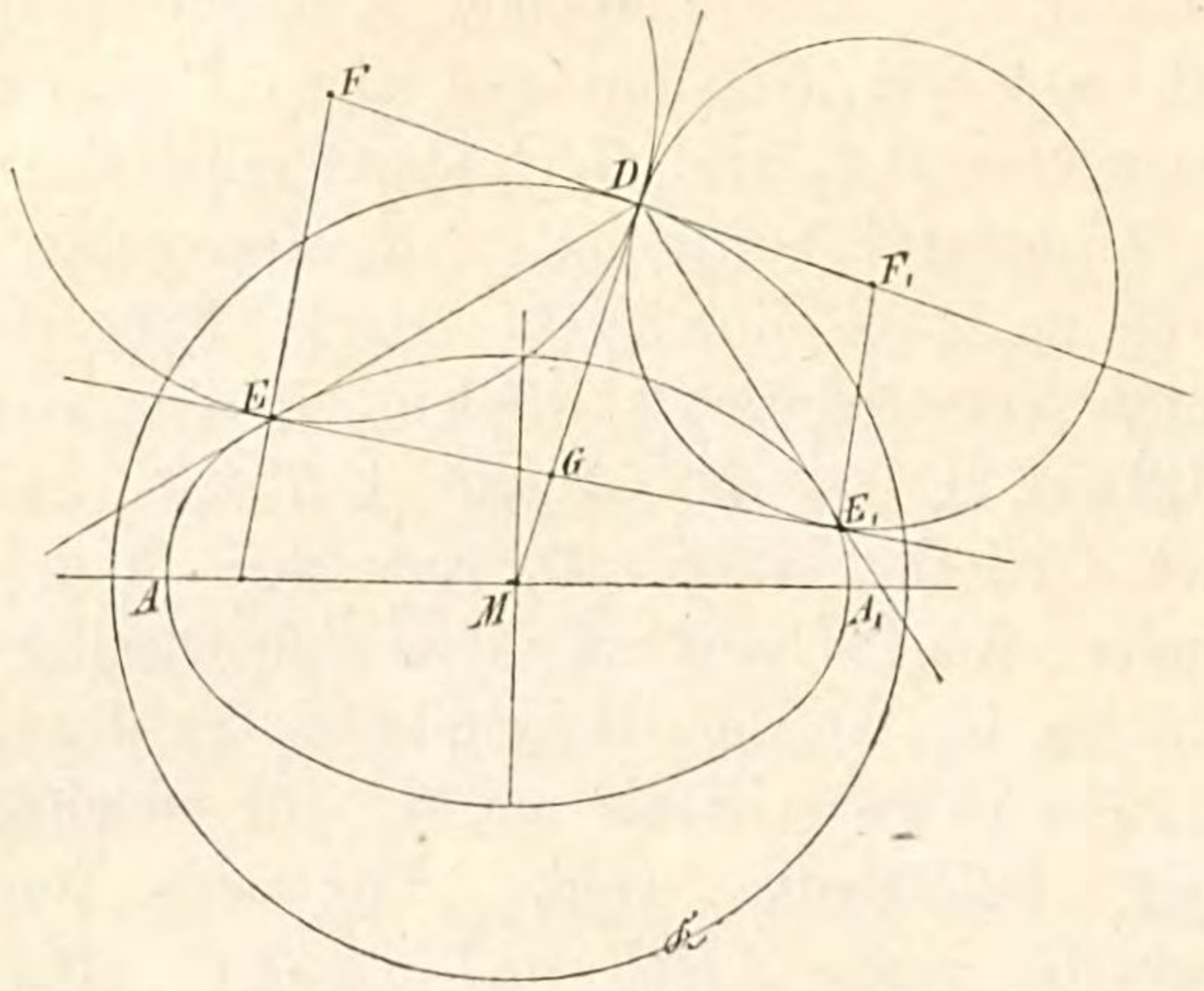


Fig. 63.

woraus folgt:

Der Ort des Scheitels des einem Kegelschnitte umgeschriebenen rechten Tangentenwinkels ist ein konzentrischer Kreis.

200. Aus dem D diametral gegenüberliegenden Punkte D_1 lassen sich natürlich auch rechtwinklige Tangenten an den Kegelschnitt ziehen; die von D und D_1 ausgehenden Tangenten desselben bilden daher ein dem Kreise $\mathfrak{K}$ eingeschriebenes, dem Kegelschnitte umgeschriebenes Rechteck:

Alle einem Kegelschnitte umgeschriebenen Rechtecke sind dem Kreise $\mathfrak{K}$ eingeschrieben.

201. Um die Gröfse des Radius r dieses Kreises $\mathfrak{K}$ zu berechnen, fixiere man einen seiner Schnittpunkte Q mit der Hauptaxe. Die Tangenten von Q an den Kegelschnitt bilden einen rechten Winkel. Ist P einer der Berührungspunkte und PQ_1 senkrecht zur Hauptaxe, so mufs $PQ_1 = QQ_1$ sein, da Winkel $PQQ_1 = 45^0$ ist. Zieht man PS senkrecht zur

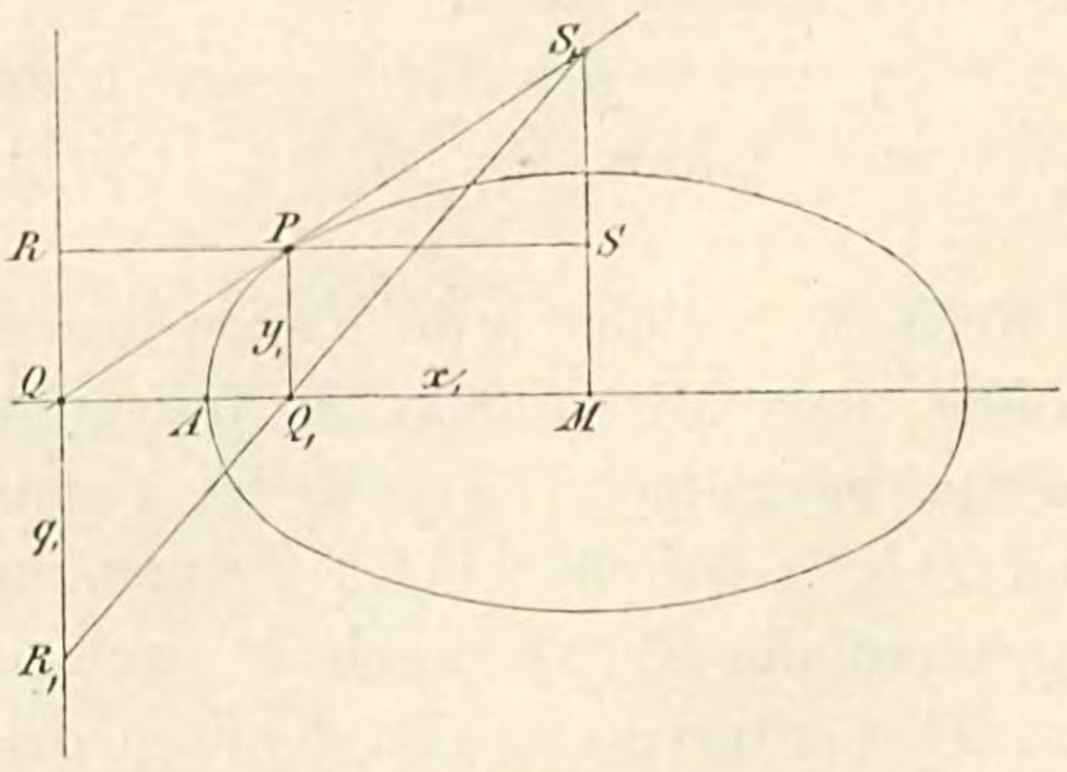


Fig. 64.

Nebenaxe und schneidet damit die Polare von Q_1 in R, so ist S_1 der Pol von PS, denn derselbe muſs auf der Neben-

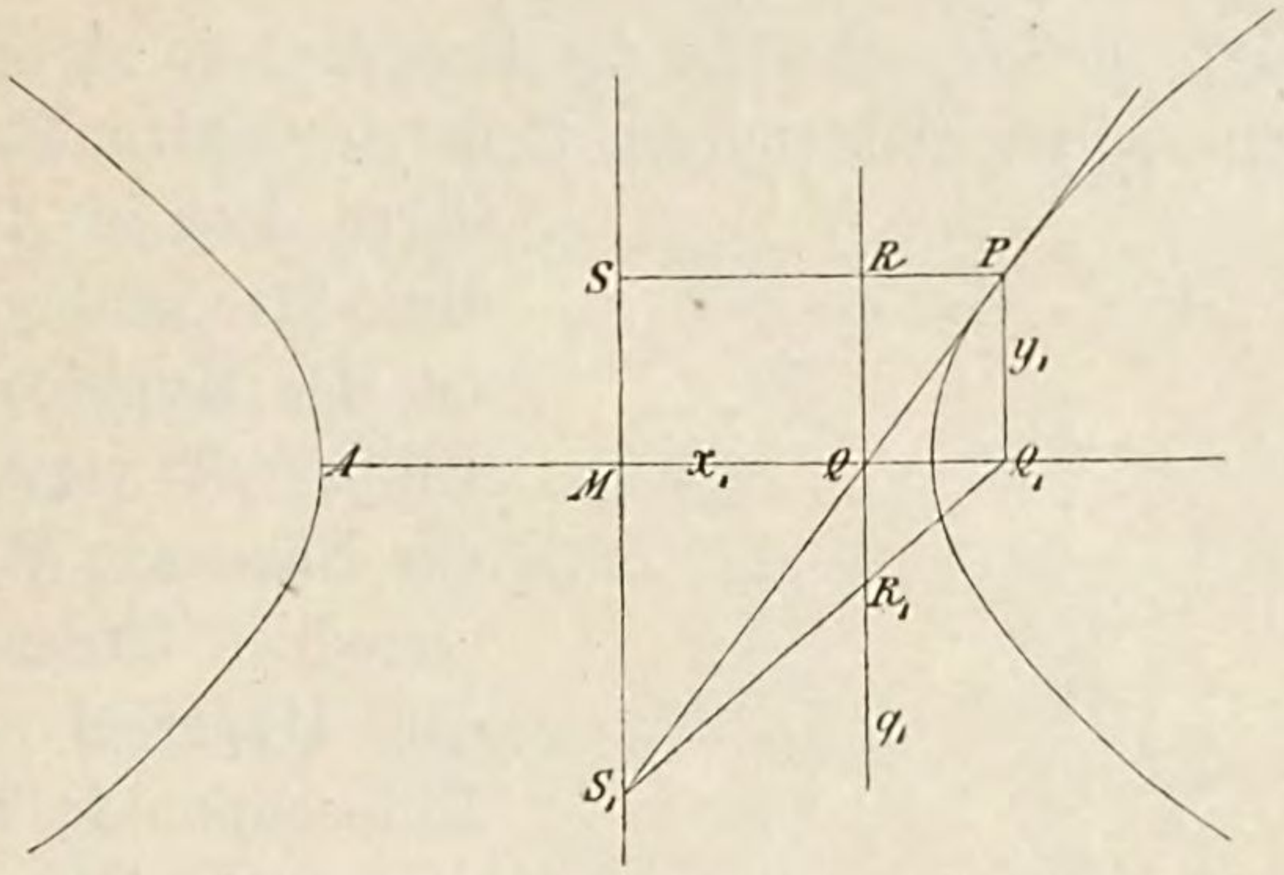


Fig. 65.

axe und auf der Tangente PQ liegen. Da S und S_1 konjugierte Punkte sind, so ist das Produkt

$$MS \,.\, MS_1 = b^2.$$

Aus der Proportion

$PQ_1 : QQ_1 = MS_1 : MQ$ folgt $MS_1 = MQ$;

da auch $MS = PQ_1 = QQ_1$, so erhält man

$$QQ_1 \,.\, r = \mp b^2 \text{ oder } \overline{+} (MQ_1 - MQ) \,.\, r = b^2.$$

Auch QQ_1 sind konjugierte Punkte, also ist

$$MQ \,.\, MQ_1 = r \,.\, MQ_1 = a^2$$

bei der Ellipse $r^2 = a^2 + b^2$

bei der Hyperbel $r^2 = a^2 - b^2$, d. h.

Der Radius des Kreises, welcher die Scheitel aller einem Kegelschnitte umgeschriebenen rechten Winkel enthält, ist gleich der Quadratwurzel aus der Summe oder Differenz der Quadrate der Halbaxen, je nachdem der Kegelschnitt Ellipse oder Hyperbel ist.

Bei der Ellipse ist der Kreis $\mathfrak{K}$ stets reell.

Wenn bei der Hyperbel $a = b$ wird, was bei der gleichseitigen Hyperbel der Fall ist, so reduziert sich der Kreis $\mathfrak{K}$ auf einen Punkt und das einzige rechtwinklige Tangentenpaar wird von den Asymptoten gebildet.

Wird $a < b$, so wird r imaginär. In diesem Falle giebt es keine rechtwinkligen Tangenten.

202. *Die konjugierte Hyperbel.*

Die Hyperbel H schneide die Hauptaxe in A und A_1; in einer harmonischen Verwandtschaft deren Centrum A ist und deren Axe in A_1 auf der Hauptaxe senkrecht steht, ist der Hyperbel H eine Ellipse E verwandt mit der Nebenaxe $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$. Den unendlich fernen Punkten der Hyperbel sind die Ellipsenpunkte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ verwandt; Hyperbel und Ellipse berühren sich in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ und haben dieselbe Hauptaxe.

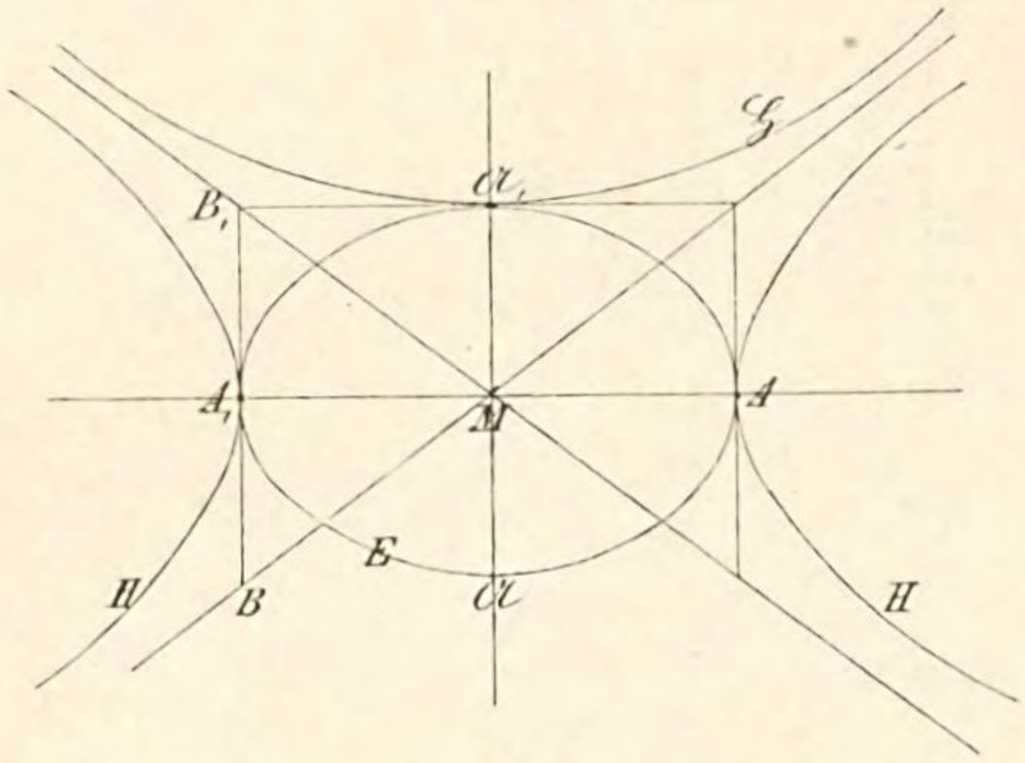


Fig. 66.

Der Pol von $\mathfrak{A}_1 B_1$ bezüglich H liegt auf der Nebenaxe, im Schnittpunkte derselben mit der Polare von B_1. Diese aber geht durch A_1 und den unendlich fernen Punkt der Asymptote $B_1 M$, ist also der letzteren parallel und folglich die Gerade $A_1 \mathfrak{A}$. Mithin sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ konjugierte Punkte der Hyperbel H auf ihrer Nebenaxe. Alle konjugierten Punktpaare derselben bezüglich H bilden eine Involution mit dem Centralpunkte M; die Potenz derselben $M\mathfrak{A} \,.\, M\mathfrak{A}_1$ bezeichnet man mit b^2 und b ist also die halbe Nebenaxe der Hyperbel H und gleichzeitig die halbe Nebenaxe der Ellipse E:

Eine Hyperbel und die ihr harmonisch verwandte Ellipse in derjenigen Verwandtschaft, welche den einen Scheitel der Hauptaxe zum Centrum und die Tangente im anderen zur Axe hat, haben gleichgrofse Nebenaxen.

203. Verändert man jetzt die harmonische Verwandtschaft, indem man den einen Scheitel $\mathfrak{A}$ der Nebenaxe der Ellipse E zum Centrum und die Tangente in anderen, $\mathfrak{A}_1$, zur Axe nimmt, so ist der Ellipse E eine andere Hyperbel $\mathfrak{H}$ verwandt, welche denselben Mittelpunkt M und die Nebenaxe b der ersteren zur Hauptaxe hat. Den Punkten A und A_1 sind die unendlich fernen Punkte der Hyperbel $\mathfrak{H}$ verwandt; diese

hat also die zu $\mathfrak{A}A$ und $\mathfrak{A}A_1$ parallelen Geraden zu Asymptoten. Ganz wie vorhin folgert man, dafs A und A_1 konjugierte Punkte der Hyperbel $\mathfrak{H}$ sind, dafs also die Nebenaxe $2a$ derselben durch die Gleichung $MA \,.\, MA_1 = a^2$ bestimmt ist. Die Hyperbel $\mathfrak{H}$ hat also mit der Hyperbel H dieselben Asymptoten und der Richtung nach dieselben, der Gröfse nach aber vertauschte Haupt- und Nebenaxen. Beide Hyperbeln heifsen *konjugierte Hyperbeln*.

Da $BB_1 = \mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ ist, so folgt:

Die Asymptoten schneiden auf den Scheiteltangenten die Nebenaxe ab.

Nennt man den Asymptotenwinkel 2α, so ist

$$tg\alpha = \frac{b}{a}.$$

204. Von den beiden konjugierten Hyperbeln liegt jede in zwei Scheitelgebieten der Asymptoten. Die Durchmesser, welche die eine treffen, können die andern nicht schneiden.

Um von einem Punkte C einer Asymptote an die Hyperbel H die Tangente zu ziehen, ziehe man AC bis zum Durch-

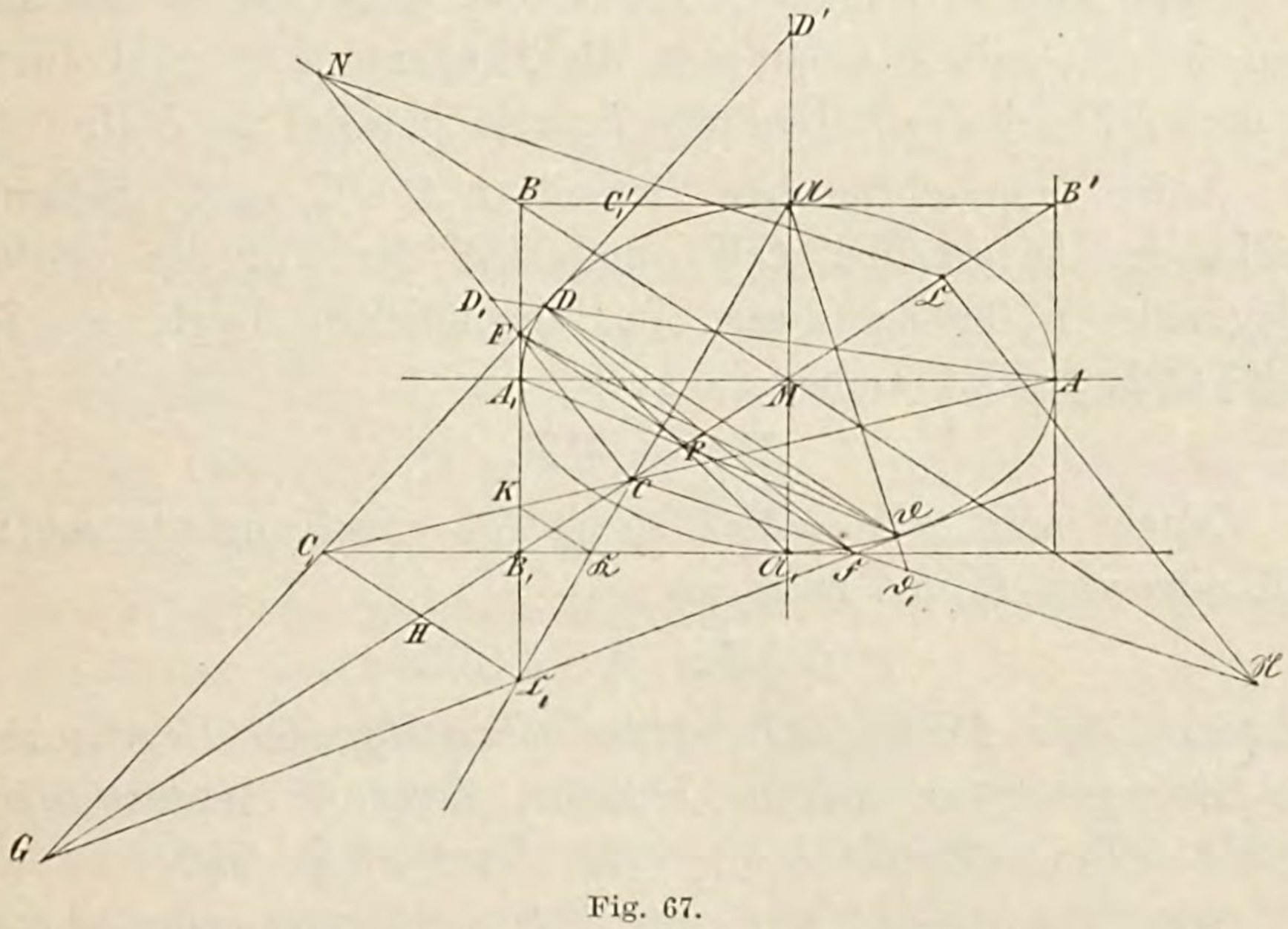


Fig. 67.

schnitt in C_1 mit $\mathfrak{A}_1B_1$, so sind C und C_1 verwandte Punkte, weil MB_1 und $\mathfrak{A}_1B_1$ verwandte Gerade sind; ziehe an die Ellipse E die Tangente C_1D, welche die Scheiteltangente

durch A_1 in F schneidet, dann ist CF eine Tangente an H. Den Tangenten von E sind Tangenten von H verwandt, F ist sich selbst verwandt, also mufs die der Ellipsen-Tangente C_1F verwandte Gerade CF eine Tangente an H sein.

In analoger Weise zieht man $\mathfrak{A}C$ bis $\mathfrak{C}_1$ auf A_1B_1, die Tangente $\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}$ an E, so ist $C\mathfrak{F}$ eine Tangente an die konjugierte Hyperbel $\mathfrak{H}$.

Aus den ähnlichen Dreiecken $\mathfrak{A}CB'$ und $\mathfrak{K}CB_1$, sowie ACB' und KCB_1 folgt

$$B'C : B_1C = \mathfrak{A}C : \mathfrak{K}C = AC : KC,$$

also $$A\mathfrak{A} \parallel K\mathfrak{K} \parallel MB \parallel C\mathfrak{C}_1$$

und daher $$C_1H = \mathfrak{C}_1H.$$

Ist G der Schnittpunkt der Tangente C_1F mit MB_1, so mufs die Polare von G bezüglich der Ellipse E parallel der zu MG konjugierten Durchmesserrichtung MB sein; die von der Ellipse auf der Polare abgeschnittene Sehne wird durch GM halbiert. Die zweite von G an die Ellipse gezogene Tangente mufs daher die zur Polare parallele Gerade $C_1\mathfrak{C}_1$ in einem solchen Punkte X schneiden, dafs $C_1H = XH$ ist; also fällt $\mathfrak{C}_1$ mit X zusammen, die Tangente $\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}$ geht durch G und $D\mathfrak{D}$ ist die Polare von G, also parallel zu BM.

Jedem umgeschriebenen Vierseite $B_1C_1G\mathfrak{C}_1$ ist der Schnittpunkt der Diagonalen $C_1\mathfrak{C}_1$ und $F\mathfrak{F}$ der Pol der dritten Diagonale B_1G; da dieser im Unendlichen liegt, so ist $F\mathfrak{F} \parallel C_1\mathfrak{C}_1 \parallel N\mathfrak{N}$. Daher ist auch

$$MN = M\mathfrak{N}.$$

Macht man $M\mathfrak{C} = MC$, so ist $N\mathfrak{C}$ eine Tangente von $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{N}\mathfrak{C}$ eine von H und zwar ist

$$CN \parallel \mathfrak{C}\mathfrak{N},\ \mathfrak{C}N \parallel C\mathfrak{N}.$$

Daraus folgt: *Parallele Tangenten einer Hyperbel H schneiden die Asymptoten in solchen Punkten, deren Verbindungslinien parallele Tangenten der konjugierten Hyperbel $\mathfrak{H}$ sind.*

205. Die Gerade AD trifft CN im Berührungspunkte D_1 mit der Hyperbel H; die Polare von D' geht durch D und steht auf $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ im harmonischen Gegenpunkte zu D' senkrecht, also sind $C_1C_1'DD'$ harmonische Punkte; ihnen sind

verwandt CND_1 und der unendliche ferne Punkt auf CN, daher ist

$$CD_1 = ND_1, \text{ d. h.}$$

Die Strecke einer Hyperbeltangente zwischen den Asymptoten wird durch den Berührungspunkt halbiert.

206. Die Gerade $\mathfrak{AD}$ trifft die Tangente $N\mathfrak{C}$ der konjugierten Hyperbel auch im Halbierungspunkte $\mathfrak{D}_1$; deshalb sind die Radien MD_1 und $M\mathfrak{D}_1$ konjugierte Radien bezüglich beider Hyperbeln H und $\mathfrak{H}$, da sie durch die Asymptoten harmonisch getrennt werden.

Es soll der Pol von $C\mathfrak{N}$ bezüglich H ermittelt werden. Man weifs, dafs er auf $M\mathfrak{D}_1$ liegen mufs und der Schnittpunkt dieser Geraden mit der Polare von C ist. Letztere geht aber durch D_1 und ist der Asymptote $C\mathfrak{C}$ parallel, trifft also die Tangente $N\mathfrak{C}$ in ihrem Halbierungspunkte $\mathfrak{D}_1'$, der auf $M\mathfrak{D}_1$ und der Hyperbel $\mathfrak{H}$ liegt. Also sind $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{D}_1'$ konjugierte Punkte der Hyperbel H und die Schnittpunkte von $\mathfrak{H}$ mit dem Durchmesser $\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_1'$. Bezeichnet man mit QQ_1 irgend zwei konjugierte Punkte dieses Durchmessers bezüglich der Hyperbel H, so folgt wegen der Gleichung

$$M\mathfrak{D}_1^2 = MQ \,.\, MQ_1,$$

dafs sie auch konjugiert bezüglich der konjugierten Hyperbel $\mathfrak{H}$ sind. Also:

Zwei konjugierte Punkte eines Durchmessers der Hyperbel H sind auch konjugiert für die konjugierte Hyperbel. Diese bestimmt auf den Durchmessern, welche H nicht treffen, die Gröfse derselben.

207. Da jeder Durchmesser einer Hyperbel beide Zweige derselben oder keinen Zweig schneidet, so folgt:

Irgend zwei parallele Tangenten einer Hyperbel berühren beide Zweige derselben.

Von jedem Punkte R einer Asymptote läfst sich noch eine zweite Tangente an die Hyperbel ziehen. Ist der Asymptotenwinkel 2α ein spitzer, so gelangt R, wenn er eine Asymptote durchläuft, auch in eine Lage S, von der aus sich eine zur Asymptote senkrechte Tangente ziehen läfst, denn der Winkel FRU, wo U der unendlich ferne Berührungspunkt der Asymptote ist, wächst kontinuirlich von α bis 180^0.

Wenn der Winkel 2α ein stumpfer ist, so giebt es einen solchen Punkt nicht. Demnach existiert der Kreis $\mathfrak{K}$, von dessen Punkten sich rechtwinklige Tangenten an eine Hyperbel ziehen lassen, sobald der Asymptotenwinkel, in welchem die Hyperbel liegt, ein spitzer ist. Dann ist $tg\,\alpha = \frac{b}{a}$, also $a > b$

Man findet seinen Radius, wenn man in M auf einer Asymptote eine Senkrechte errichtet, zu ihr in Bezug auf beide Asymptoten den harmonischen Gegenstrahl konstruiert, mit demselben die Hyperbel schneidet und und in einem Schnittpunkte die Tangente bis zum Durchschnitte R mit der Asymptote konstruiert, auf welcher sie senkrecht steht; dann ist MR der gesuchte Radius.

208. *Harmonische Verwandtschaft zwischen einem Kreise und einer gleichseitigen Hyperbel.*

In einem Kreise M ziehe man einen Durchmesser AA_1, in A_1 die Tangente, wähle A und diese Tangente als Centrum und Axe einer harmonischen Verwandtschaft, so ist dem Kreise M eine Hyperbel H verwandt, welche senkrechte Asymptoten hat. Diese ist eine gleichseitige. Eine Gerade durch A schneide Kreis und Hyperbel in B und B_1; man fälle BC und B_1C_1 senkrecht auf AA_1, so ist

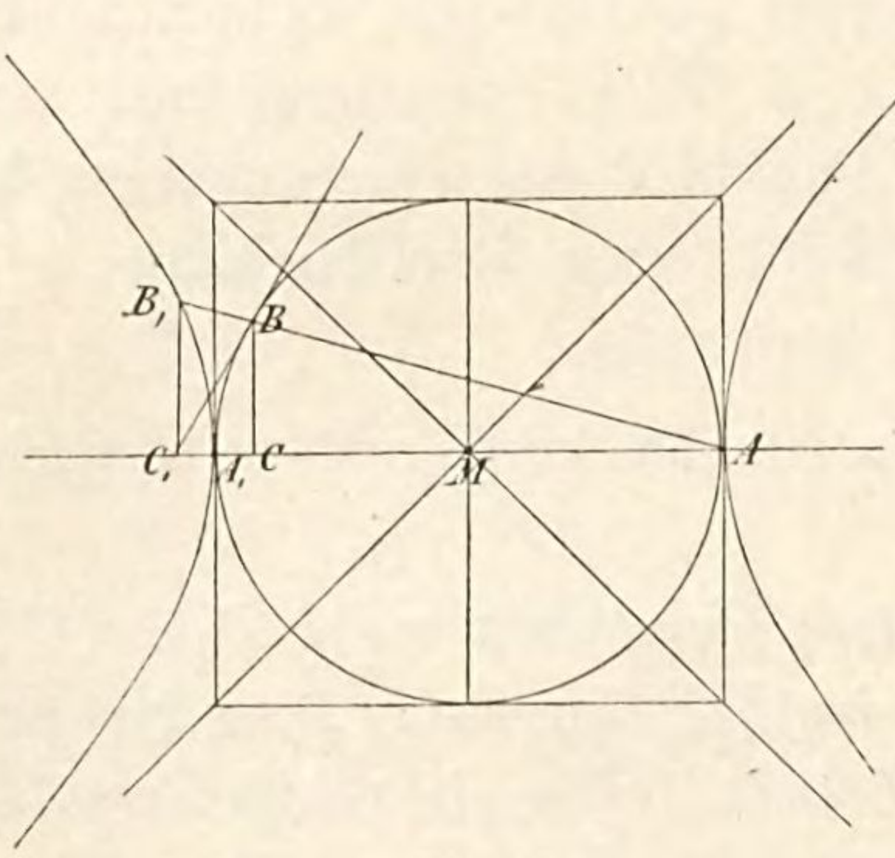


Fig. 68.

$$BC : B_1C_1 = AC : AC_1.$$

Ferner $$BC^2 = AC \,.\, A_1C.$$

Da AA_1CC_1 harmonisch sind, so ist $AC : A_1C = AC_1 : A_1C_1$ also

$$B_1C_1{}^2 = \frac{BC^2 \,.\, AC_1{}^2}{AC^2} = \frac{A_1C \,.\, AC_1{}^2}{AC} = AC_1 \,.\, A_1C_1.$$

Also:

a. *Eine gleichseitige Hyperbel und ein Kreis, welcher die-*

selbe in den Scheiteln der Hauptaxe berührt, Scheitelkreis, sind harmonisch verwandt.

b. *Die Senkrechte aus einem Punkte einer gleichseitigen Hyperbel auf die Hauptaxe ist die mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten, in welche sie dieselbe zerlegt.*

Da C und C_1 konjugierte Punkte für den Kreis sind, so ist $C_1 B$ Tangente an denselben und

$$C_1 B^2 = AC_1 \,.\, A_1 C_1 = C_1 B_1{}^2, \text{ also}$$

c. *Errichtet man in einem Punkte der Hauptaxe einer gleichseitigen Hyperbel eine halbe senkrechte Sehne und zieht von ihm die Tangente an den Scheitelkreis, so ist sie gleich der ersteren.* Cf. 272 c.

Unmittelbar aus der Entstehung folgt:

d. *Die konjugierte Hyperbel einer gleichseitigen Hyperbel ist wieder gleichseitig.*

Siehe 202.

209. Es bleibt noch übrig, den Kreis $\mathfrak{K}$, den Ort der Schnittpunkte rechtwinkliger Tangenten, für den Fall der Parabel zu untersuchen. Da auch hier $QQ_1 = PQ_1$ sein mufs, dies aber der Fall ist, wenn Q_1 der Brennpunkt und Q der Schnittpunkt der Hauptaxe mit der Leitlinie ist, so geht $\mathfrak{K}$ durch letzteren. Der Mittelpunkt M liegt bei der Parabel im Unendlichen, also degeneriert $\mathfrak{K}$ in eine Gerade, die in Q zur Hauptaxe senkrecht steht, also in die Leitlinie: Fig. 65.

Die Scheitel aller einer Parabel umgeschriebenen rechten Winkel liegen auf der Leitlinie.

Soll ein Kreis die Leitlinie rechtwinklig schneiden, so mufs sein Mittelpunkt auf derselben liegen, also:

Die Mittelpunkte aller Kreise, welche den Poldreiecken einer Parabel umgeschrieben sind, liegen auf der Leitlinie.

§ 18.

Die Parabel.

210. Die Parabel ist der geometrische Ort eines Punktes, dessen Abstände von einem festen Punkte B und einer festen Geraden C einander gleich sind; B und C sind Brennpunkt

und Leitlinie der Parabel $\mathfrak{P}$. Aus der genannten Erklärung lassen sich eine Anzahl von Eigenschaften der Parabel in einfachster Weise herleiten, ohne die Voraussetzung, dafs ihr zweiter Brennpunkt im Unendlichen liegt.

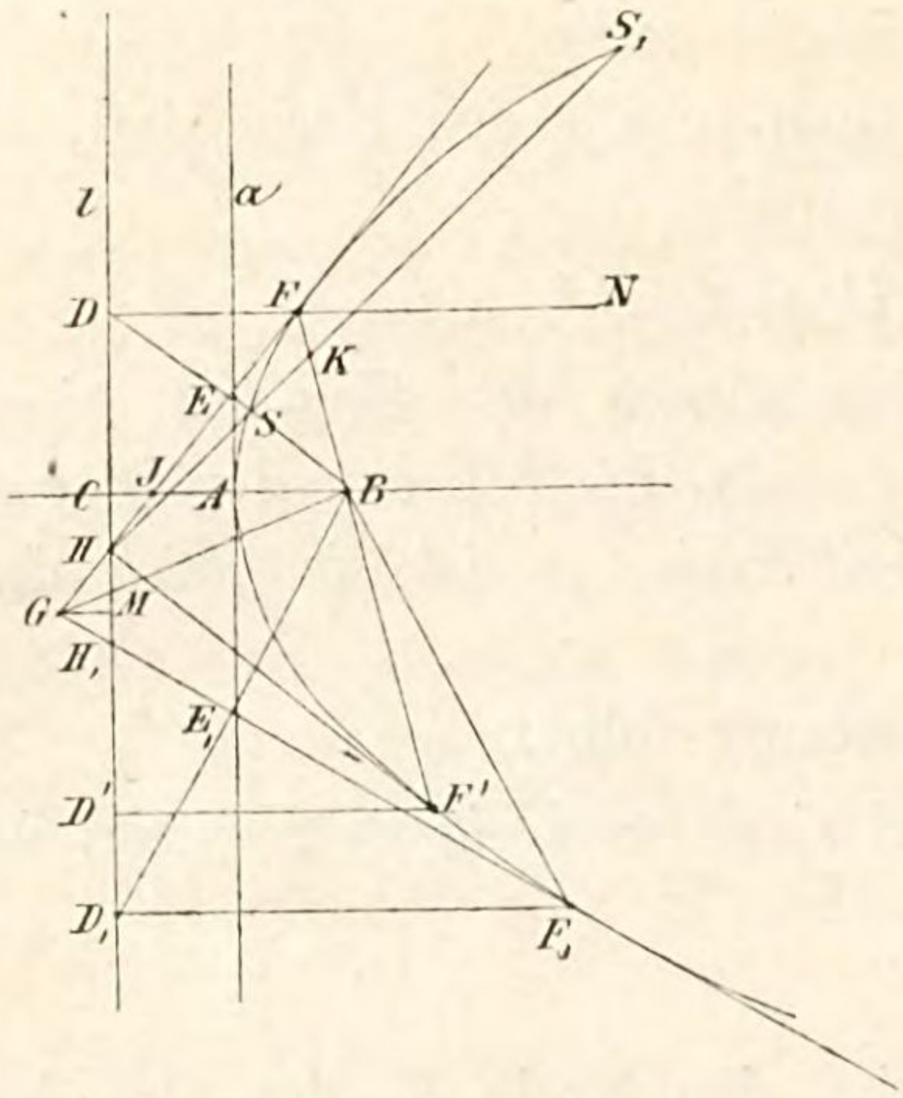


Fig. 69.

Vom Brennpunkte B fälle man $BC \perp l$, halbiere BC in A, so ist A der *Scheitel* der Parabel, die Richtung AB ist die Richtung und Lage ihrer *Hauptaxe*, die Gerade a, welche in A senkrecht auf BC errichtet wird, ist die *Scheiteltangente*. Jede Parallele zur Hauptaxe heifst ein *Durchmesser*.

Um irgend eine andere Tangente und gleichzeitig ihren Berührungspunkt zu konstruieren, verbinde man B mit einem beliebigen Punkte D der Leitlinie. Die Strecke BD wird durch die Scheiteltangente a in E halbiert, weil $AB = AC$ ist. Zieht man noch die Mittelsenkrechte von BD, so ist sie eine Parabeltangente und ihr Schnittpunkt F mit der durch D zur Hauptaxe gezogenen Parallelen ist der Berührungspunkt. Denn da $FB = FD$, so ist F ein Parabelpunkt; auf der Mittelsenkrechten EF kann es aufser F keinen weiteren Parabelpunkt geben, denn für einen beliebigen Punkt X von EF ist $XB = XD$ und fällt man noch $XY \perp l$, so ist $XY < XD$ also auch $XY < XB$, mithin liegt X nicht auf der Parabel und EF ist eine Tangente derselben.

Umgekehrt mufs der Fufspunkt E jeder Senkrechten aus dem Brennpunkte auf eine Tangente auf der Scheiteltangente und der Gegenpunkt D des Brennpunktes in Bezug auf irgend eine Tangente auf der Leitlinie liegen, denn aufser den vorhin konstruierten Tangenten kann es keine anderen Parabeltangenten geben. Folglich:

a. *Die Fufspunkte der Senkrechten aus dem Brennpunkte auf die Tangenten liegen auf der Scheiteltangente.*

b. *Die Gegenpunkte des Brennpunktes in Bezug auf die Tangenten liegen auf der Leitlinie.*

211. Wenn die Leitlinie von der Tangente in H geschnitten wird, so ist $HB = HD$, also ist

$$\triangle BFH \cong FDH$$

und

$$\sphericalangle FBH = FDH = 90^0$$

d. h. *die Strecke einer Parabeltangente zwischen dem Berührungspunkte und der Leitlinie erscheint dem Brennpunkte unter einem rechten Winkel.*

212. Ist J der Schnittpunkt der Tangente EF mit der Hauptaxe, so ist

$$\triangle DEF \cong BEJ,$$

also

$$EF = EJ,$$

d. h. *die Strecke einer Parabeltangente zwischen dem Berührungspunkte und der Hauptaxe wird durch die Scheiteltangente halbiert.*

213. Durch den Punkt H der Leitlinie lege man die Parabelsehne SS_1, welche der Brennstrahl BF nach dem Berührungspunkte in K schneidet; von S und S_1 fälle man ST und S_1T_1 senkrecht auf die Leitlinie l, dann ist

$$SB = ST,\ S_1B = S_1T_1,$$

$$ST : S_1T_1 = SH : S_1H = SB : S_1B_1,$$

also ist BH eine Halbierungslinie des Nebenwinkels von SBS_1 und da $BH \perp BK$, so sind

$$B(SS_1HK)$$

harmonische Strahlen.

Nennt man noch BK die Polare von H, H den Pol von BK, so folgt:

a. *Jede Parabelsehne wird durch ihren Schnittpunkt mit der Leitlinie und seine Polare harmonisch geteilt.*

b. *Die Polare eines Punktes der Leitlinie trifft die Parabel in den Berührungspunkten seiner Tangenten.*

c. *Der Pol einer Brennpunktssehne liegt auf der Leitlinie senkrecht über dem Brennpunkte.*

214. Eine zweite Tangente E_1F_1 schneide die erste EF in G. Dann ist

$$GD = GB = GD_1.$$

Hieraus ergiebt sich eine Konstruktion der Parabeltangenten von einem Punkte G. Man beschreibe um G mit seiner Brennpunktsentfernung GB einen Kreis, welcher die Leitlinie in D und D_1 trifft, so schneiden die in D und D_1 errichteten Senkrechten die Parabel in den gesuchten Berührungspunkten.

Eine zweite Konstruktion ergiebt sich aus a. Man beschreibe über GB als Durchmesser einen Kreis, welcher die Scheiteltangente in E und E_1 trifft; es sind dann GE und GE_1 die Tangenten.

Eine dritte Konstruktion folgt aus b. und c. Man ziehe GB, errichte in B auf GB die Senkrechte, so trifft sie die Parabel in den Berührungspunkten.

Ist HF' die zweite Tangente vom Punkte H der Leitlinie, $F'D' \perp l$, so ist

$$HD = HB = HD',$$

also

$$\sphericalangle DBD' = 90^0 = FHF'$$

d. h. *die Tangenten von einem Punkte der Leitlinie stehen aufeinander senkrecht.*

215. Man erkennt die Parabel als Tangentengebilde aus den Sätzen 210a und 214, welche in anderer Fassung lauten:

a. *Bewegt sich der Scheitel eines rechten Winkels auf einer Geraden a und dreht sich der eine Schenkel um einen festen Punkt B, so beschreibt der andere eine Parabel mit dem Brennpunkte B und der Scheiteltangente a.*

b. *Bewegt sich die Spitze eines rechtwinkligen Dreiecks auf einer Geraden l und dreht sich die Hypotenuse um den festen Fußspunkt B der Hypotenusenhöhe, so beschreiben die Katheten eine Parabel, deren Brennpunkt B und deren Leitlinie l ist.*

Fällt man noch $GM \perp l$, so ist

$$\sphericalangle FBG = FDG = 180^0 - DGM = 180^0 - D_1GM$$
$$= F_1D_1G = F_1BG, \text{ also:}$$

c. *Verbindet man den Brennpunkt mit den Berührungspunkten und dem Schnittpunkte zweier Tangenten, so halbiert die letzte Verbindungslinie den von den beiden ersten gebildeten Winkel.*

Da $\sphericalangle DFE = BFE$, so folgt:

d. *Jede Tangente einer Parabel bildet mit dem Brennpunkts-*

strahle und dem Durchmesser ihres Berührungspunktes gleiche Winkel.

216. $\sphericalangle MGH_1 = EE_1B$, denn ihre Schenkel stehen senkrecht auf einander. Die Punkte BEE_1G liegen auf einem Kreise, denn $\sphericalangle BEG = BE_1G = 90^0$, also $\sphericalangle EE_1B = EGB$ und

$$\sphericalangle MGH_1 = EGB,$$

d. h. a. *Je zwei Tangenten bilden mit dem Brennpunktsstrahle und dem Durchmesser ihres Schnittpunktes gleiche Winkel.*

Da $\sphericalangle FBE = JBE$ und $\sphericalangle F_1BE_1 = JBE_1$, so ist

$$\sphericalangle EBE_1 = \tfrac{1}{2}\, FBF_1 = 180^0 - EGE_1,$$

d. h. b. *Der Winkel, unter welchem das Stück der Scheiteltangente zwischen zwei beliebigen Parabeltangenten dem Brennpunkte erscheint, ist die Hälfte des Winkels, den die Brennstrahlen nach den Berührungspunkten bilden, und ergänzt den Tangentenwinkel zu 2R.*

217. PP_1P_2 seien die Ecken eines von drei Tangenten gebildeten Dreiecks. Nach 215c ist

$$\sphericalangle FBP_2 = F_1BP_2,\ FBP_1 = F_2BP_1,$$

also

$$\sphericalangle P_1BP_2 = \tfrac{1}{2}\, F_1BF_2 = E_1BE_2 = 2R - E_1PE_2 \text{ (216)}.$$

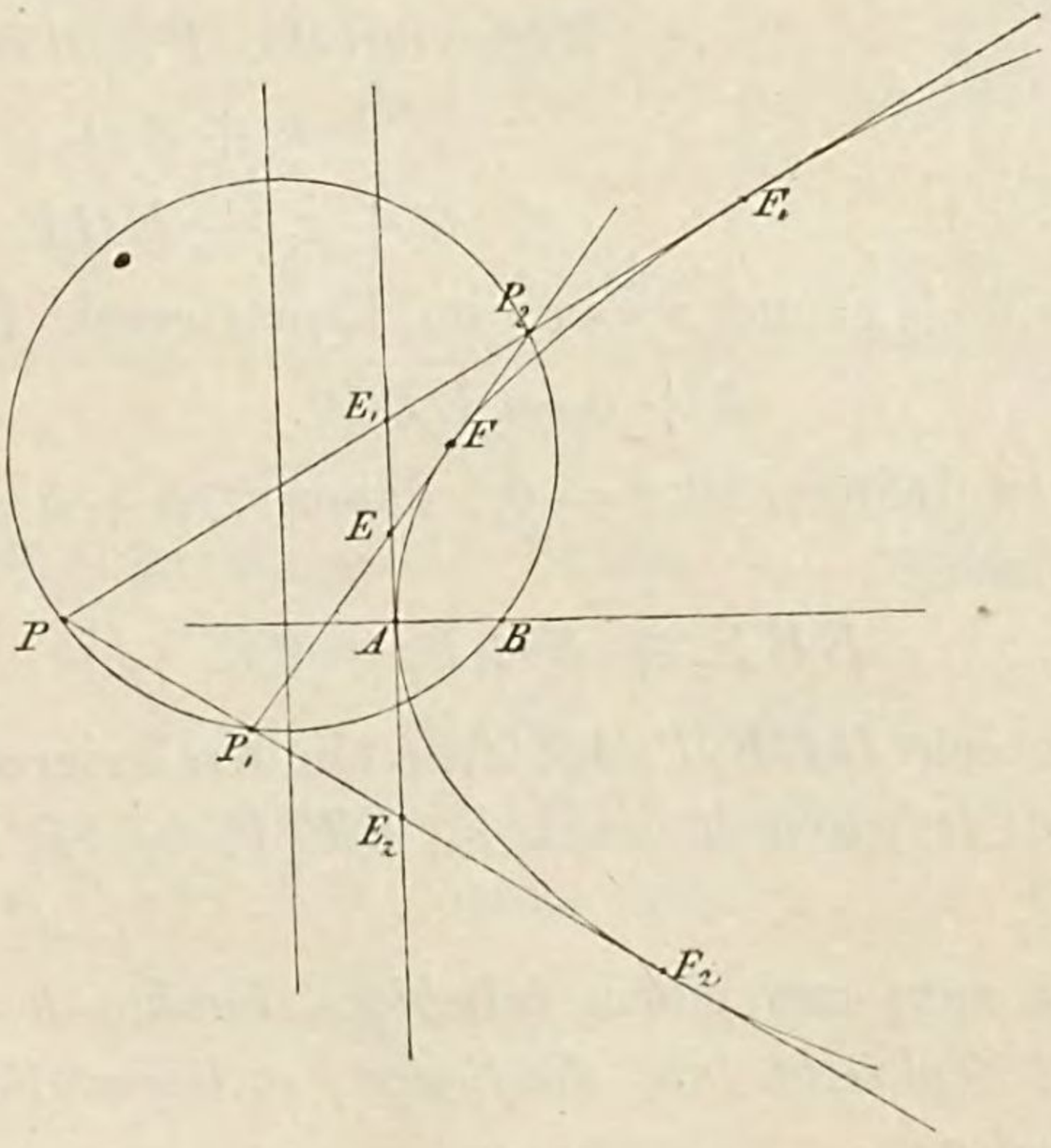


Fig. 70.

Hält man die Tangenten PF_1 und PF_2 fest, nimmt aber die dritte P_1P_2 veränderlich, so folgt aus der letzten Gleichung:

a. *Die Strecke, welche zwei feste Tangenten auf einer beweglichen begrenzen, erscheint dem Brennpunkte unter einem konstanten Winkel, der den Winkel der festen Tangenten zu $2R$ ergänzt.*

b. *Die Ecken eines Tangentendreiecks und der Brennpunkt liegen auf einem Kreise.*

218. Die Fufspunkte der Senkrechten aus dem Brennpunkte auf die Tangenten, EE_1E_2, liegen auf einer Geraden, der Scheiteltangente. Diese letzte Eigenschaft läfst sich verallgemeinern, sie gilt für jeden beliebigen Punkt auf der Peripherie des dem Dreieck PP_1P_2 umgeschriebenen Kreises.

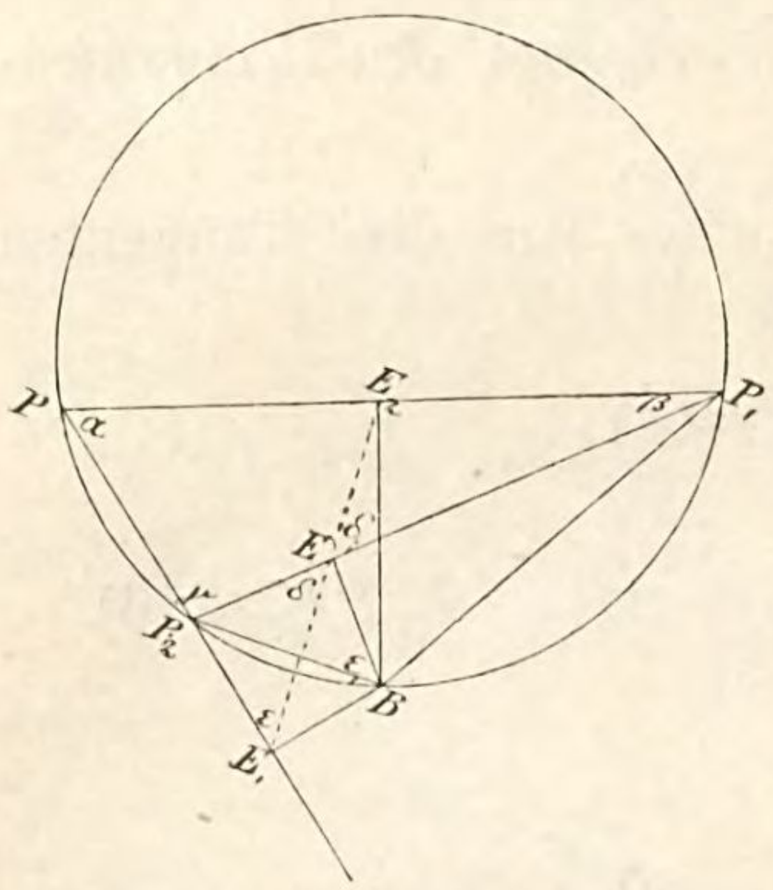


Fig. 71.

Es sei also PP_1P_2 ein beliebiges dem Kreise K eingeschriebenes Dreieck, B irgend ein Punkt von K, es seien $BE \perp P_1P_2$, $BE_1 \perp PP_2$. Man ziehe EE_1 bis zum Durchschnitte in E_2 mit PP_1, so ist zu zeigen, dafs $BE_2 \perp PP_1$ steht.

Im Dreiecke PP_1P_2 und im Kreisvierecke PP_1BP_2 ist

$$\alpha + \beta + \gamma = 2R$$

$$\alpha + \varepsilon_1 + EBP_1 = 2R,$$

also da $\gamma = \delta + \varepsilon$ und $\varepsilon = \varepsilon_1$ im Kreisviereck BEE_1P_2 ist,

$$\beta + \delta = EBP_1.$$

Als Scheitelwinkel ist $\delta = \delta_1$, daher $\sphericalangle \beta + \delta + \sphericalangle EE_2P_1 = 2R$, also auch

$$EBP_1 + EE_2P_1 = 2R.$$

Das Viereck BEE_2P_1 ist also ein Kreisviereck und weil $\sphericalangle BEP_1 = 1R$, so mufs auch $\sphericalangle BE_2P_1 = 1R$ sein.

Mithin:

a. *Fällt man aus einem beliebigen Punkte des umgeschriebenen Kreises Senkrechte auf die Seiten, so liegen die Fufspunkte in einer Geraden.*

Aus diesem Satze folgt:

b. *An einem Dreiecke giebt es unendlich viele Berührungsparabeln; der Ort ihrer Brennpunkte ist der umgeschriebene Kreis.*

219. Legt man durch den Brennpunkt B irgend einen Kreis K und zieht von einem Punkte P desselben die Tangenten an die Parabel, welche den Kreis K in P_1 und P_2 schneiden und von P_1 die zweite Tangente an die Parabel, so mufs sie wegen b. den Kreis K in P_2 schneiden. Daraus aber folgt:

Einem Kreise durch den Brennpunkt einer Parabel lassen sich unendlich viele Tangentendreiecke der Parabel einschreiben.

220. Es sei ABC ein beliebiges einem Kreise eingeschriebenes Dreieck, P ein beliebiger Punkt seiner Peripherie, $PE_1 \perp AC$, $PE_1 = E_1E_2$, H der Höhenpunkt, also $HB_1 = B_1B_2$ und $HC_1 = C_1C_2$, Q der Schnittpunkt von E_2H mit AC, dann ist

$$\triangle CHQ \cong CB_2Q,$$

$$\sphericalangle QHC_2 = CQH + HCQ = B_2QC + QCB_2.$$

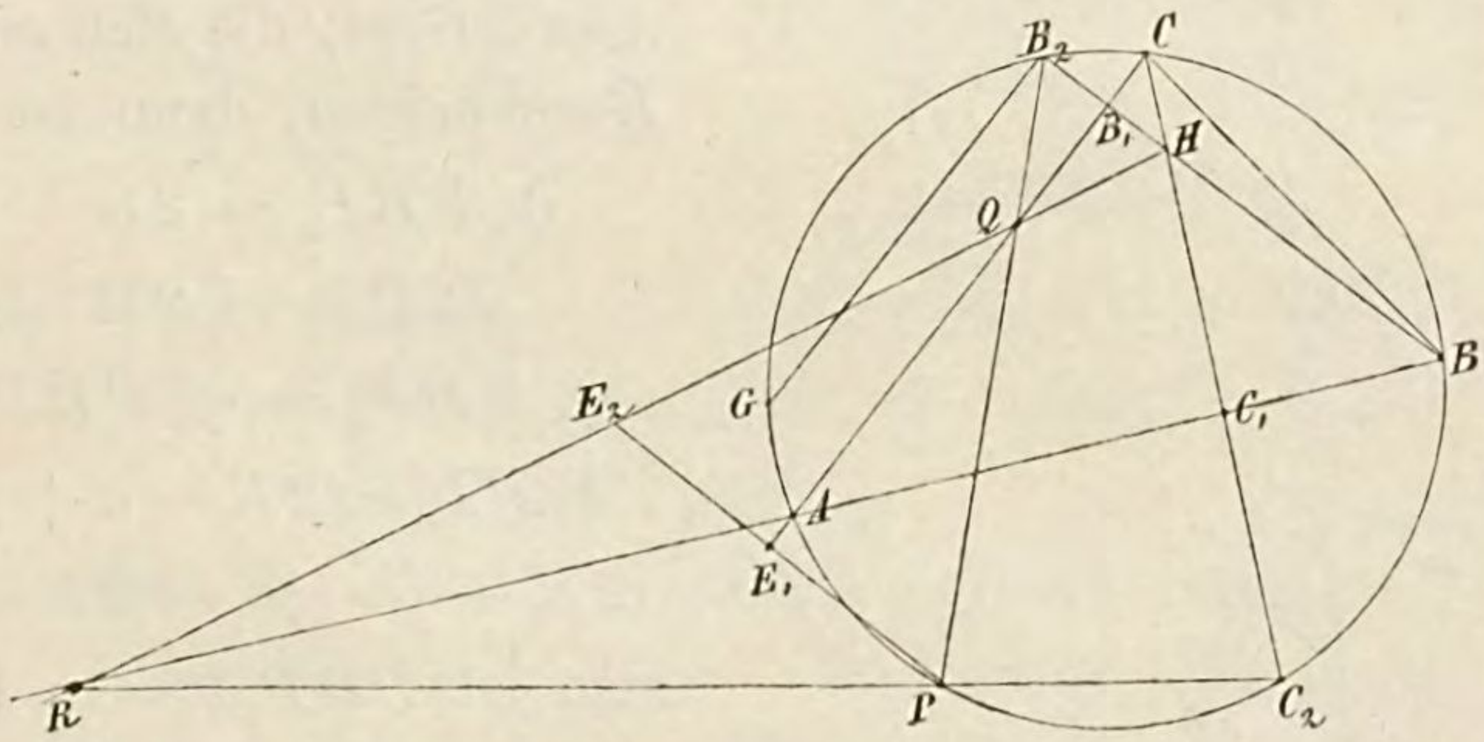


Fig. 72.

Zieht man $B_2G \parallel CA$, so ist Bogen $B_2C =$ Bogen AG und $\sphericalangle B_2QC = GB_2P$, also

$$\sphericalangle QHC_2 = GB_2P + QCB_2.$$

Die beiden Peripheriewinkel auf der rechten Seite stehen auf den Bogen GP und AB_2, deren Summe

$$\overset{\frown}{PA} + \overset{\frown}{AG} + \overset{\frown}{AG} + \overset{\frown}{GB_2} = \overset{\frown}{PA} + \overset{\frown}{AG} + \overset{\frown}{B_2C} + \overset{\frown}{GB_2} = \overset{\frown}{PC}$$

ist. Daher ist

$$\sphericalangle QHC_2 = \sphericalangle HC_2P.$$

Die Geraden HQ und C_2P treffen sich also in einem Punkte R von AB und fällt man $PD_1 \perp AB$ und verlängert PD_1 bis zum Durchnitte D_2 mit QR, so ist

$$PD_1 = D_1D_2.$$

Ebenso läfst sich zeigen, dafs der Gegenpunkt von P bezüglich der Seite BC auf der Geraden PQ liegt. Somit folgt:

Zeichnet man in einen Kreis ein Dreieck, so liegen die Gegenpunkte eines beliebigen Peripheriepunktes bezüglich der Seiten auf einer Geraden, welche durch den Höhenpunkt des Dreiecks geht.

221. Ist das Dreieck ein Tangentendreieck der Parabel, so geht der umgeschriebene Kreis durch den Brennpunkt. Die Gegenpunkte desselben bezüglich der Tangenten liegen auf der Leitlinie, also geht diese (220) durch den Höhenpunkt des Tangentendreiecks:

Der Höhenpunkt jedes Tangentendreiecks der Parabel liegt auf der Leitlinie.

222. $PP_1P_2P_3P_4P_5$ seien die sechs Ecken eines vollständigen Vierseits. Um die Dreiecke PP_1P_2 und $P_2P_3P_4$ beschreibe man Kreise, die sich noch in B schneiden, dann ist

$$\sphericalangle PBP_2 = 2R - \alpha,$$

$$P_2BP_3 = 2R - \beta$$

$$\sphericalangle PBP_4 = \sphericalangle PBP_2 +$$

$$P_2BP_4 = 2R - \alpha + \gamma =$$

$$2R - (\alpha - \gamma) = 2R - \delta,$$

also ist PBP_4P_5 ein Kreisviereck und in gleicher Weise läfst sich zeigen, dafs auch $P_3BP_1P_5$ ein Kreisviereck ist. Beschreibt man daher

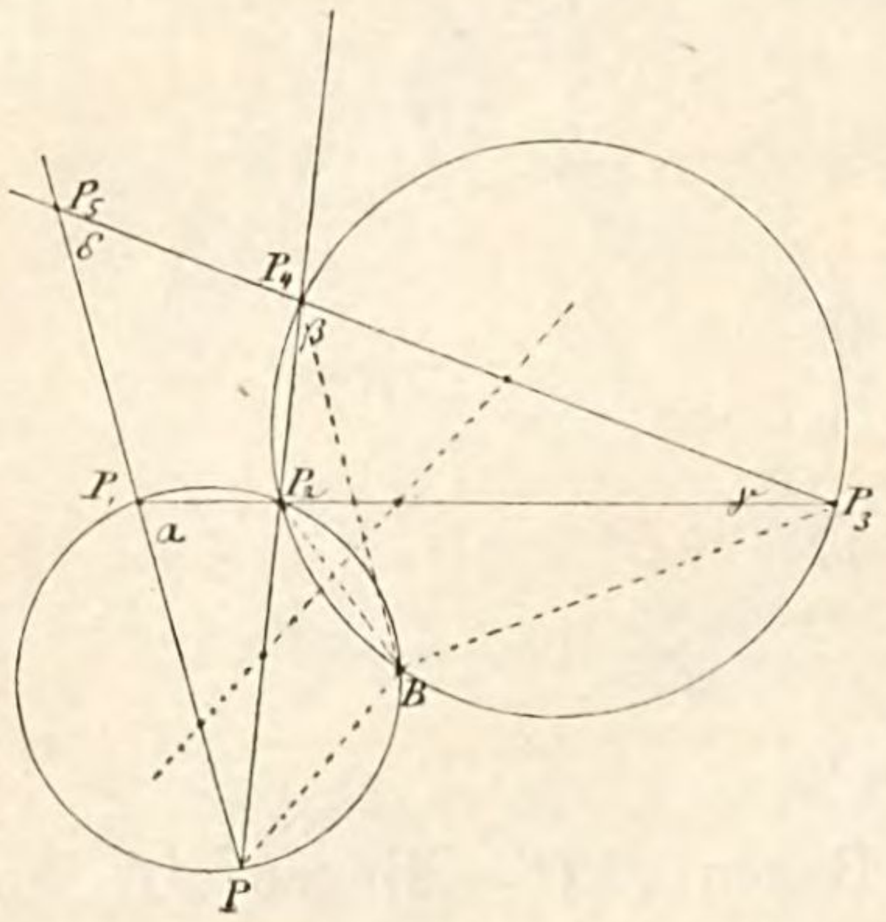


Fig. 73.

um die Dreiecke PP_4P_5 und $P_1P_3P_5$ Kreise, so schneiden sich diese auch in B, also:

Beschreibt man um die vier Dreiecke, in welchen sich vier Gerade schneiden, Kreise, so treffen sie sich in einem Punkte.

223. Fällt man aus B Senkrechte auf die vier Seiten des Vierseits, so müssen ihre Fufspunkte wegen 218. auf einer Ge-

raden und die Gegenpunkte von B in Bezug auf die vier Seiten wegen 220. auf einer anderen Geraden liegen. Auf dieser liegen auch die Höhenpunkte der vier Dreiecke, welche die vier Geraden bilden:

Die Höhenpunkte der vier Dreiecke, welche von vier Geraden gebildet werden, liegen in einer Geraden.

224. Aus 218, 222, 223 folgt:

Vier Tangenten bestimmen eine Parabel.

225. Läfst man die beiden Tangenten P_1P_3 und P_5P_3 zusammenfallen, so wird P_3 der Berührungspunkt; die Kreise durch $P_1P_5P_3$ und $P_2P_4P_3$ gehen in diejenigen Kreise durch P_3 über, welche PP_1 in P_1 und PP_2 in P_2 berühren.

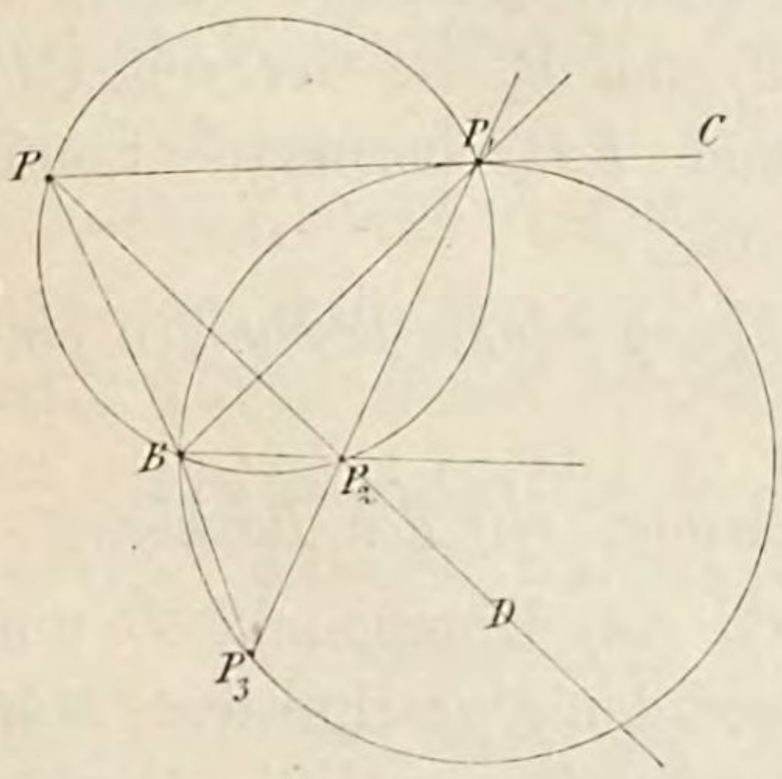


Fig. 74.

Die Kreise durch PP_1P_2 und P_1BP_3, welcher letztere PP_1 in P_1 berührt, schneiden sich noch in B, dann ist

$$\sphericalangle PP_1P_2 + PBP_2 = 180^0,$$

$$\sphericalangle CP_1P_3 = P_1BP_3.$$

Als Aufsenwinkel ist

$$\sphericalangle CP_1P_3 = P_1PP_2 + PP_2P_1 = P_1BP_2 + DP_2P_3,$$

also $$P_1BP_2 + DP_2P_3 = P_1BP_3 = P_1BP_2 + P_2BP_3$$

und $$DP_2P_3 = P_2BP_3.$$

Folglich geht der Kreis, welcher durch P_3 gelegt wird und PD in P_2 berührt, auch durch B. Daraus aber folgt:

Drei Tangenten und der Berührungspunkt auf einer bestimmen eine Parabel.

226. Es mögen im Vierseit $PP_1P_2P_3P_4P_5$ (Fig. 73) die beiden Paare von Gegenseiten zusammenfallen; es sind dann (Fig. 75) PP_1 und PP_2 zwei Tangenten mit den Berührungspunkten P_1 und P_2. Durch P_1 lege man einen Kreis, der PP_2 in P berührt und durch P_2 einen anderen, der PP_1 in P berührt; beide schneiden sich in B. Dann ist nach einem bekannten Kreissatze

$$\sphericalangle \alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3,\ \gamma = \gamma_1,\ \beta = \beta_1.$$

Macht man Sehne $PC = PD = PD = PB$, so ist $\sphericalangle \beta = \beta_2$, $\gamma = \gamma_2$. Da $\sphericalangle \alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3 = 2R = \alpha_3 + \beta_1 + \gamma$, so ist

$$\sphericalangle \gamma_3 = \gamma = \gamma_2$$

und

$$P_1 C \parallel P_2 D.$$

Zieht man $BE \parallel P_2 D$ und fällt $BF \perp PP_1$, $BG \perp PP_2$, so kann man B als Brennpunkt, BE als Axe, FG als Scheiteltangente einer Parabel ansehen, welche in P_1 und P_2 die Geraden PP_1 und PP_2 berührt. Somit folgt:

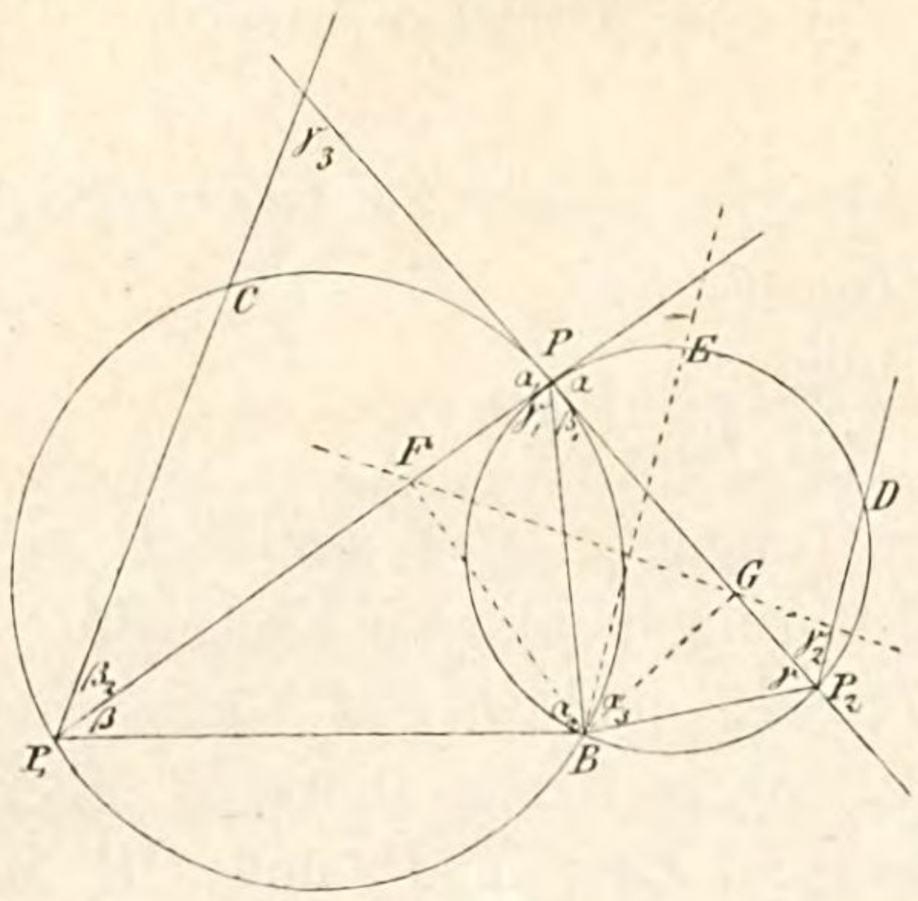


Fig. 75.

Zwei Tangenten und ihre Berührungspunkte bestimmen eine Parabel.

227. *Die Schnittpunkte einer Geraden mit der Parabel.*

Eine Parabel sei gegeben durch den Brennpunkt B und die Leitlinie l; sie werde von einer Geraden g geschnitten. Man beschreibe um die Punkte von g mit ihren Entfernungen von B Kreise; diese bilden ein Büschel, denn sie treffen sich noch in dem Gegenpunkte B_1 von B in Bezug auf g. Unter ihnen giebt es zwei, mit den Mittelpunkten P und Q, welche l in P_1 und Q_1 berühren. Da $PP_1 \perp l$, $QQ_1 \perp l$, $PP_1 = PB$, $QQ_1 = QB$, so sind P und Q die Schnittpunkte von g mit der Parabel. — *Die Parabel hat also höchstens zwei Schnittpunkte mit einer Geraden gemein.*

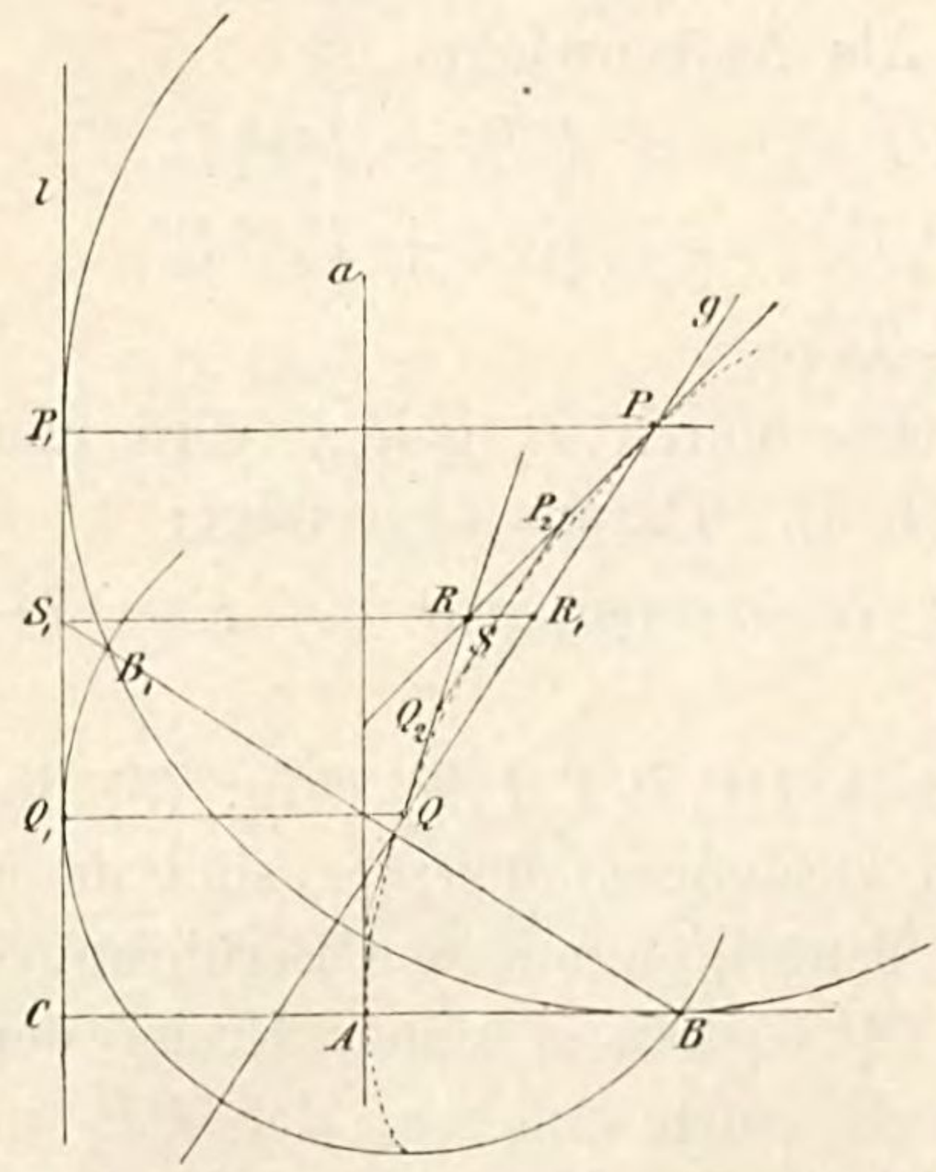


Fig. 76.

228. Die Gerade BB_1 steht auf g senkrecht, sie schneide l in

S_1, dann ist $P_1S_1 = Q_1S_1$, denn die gemeinschaftliche Sehne zweier Kreise, Potenzlinie, halbiert das zwischen den Berührungspunkten liegende Stück einer gemeinschaftlichen Tangente (28). Zieht man durch S_1 die Parallele S_1R_1 zu PP_1, so ist auch $PR_1 = QR_1$. Jede zu PQ parallele Parabelsehne wird, da die Richtung von BB_1 ungeändert bleibt, auch durch S_1R_1 halbiert. Ist S der Schnittpunkt von S_1R_1 mit der Parabel, so nennt man die Richtung derjenigen Parabelsehnen, welche durch den Durchmesser S_1S von S halbiert werden, zu diesem Durchmesser *konjugiert*. In einem Satze:

Die Halbierungspunkte aller parallelen Parabelsehnen liegen auf einem Durchmesser, dem konjugierten Durchmesser.

229. In P und Q ziehe man die Tangenten, die sich in R schneiden, dann sind PR und QR die Mittelsenkrechten von BP_1 und BQ_1, also $RB = RP_1 = RQ_1$ und daher $RS_1 \perp P_1Q_1$; mithin liegt R auf der Geraden SS_1:

a. *Die Tangenten in den Endpunkten einer Sehne schneiden sich auf dem zur letzteren konjugierten Durchmesser.*

Zieht man demnach in S die Tangente und schneidet sie mit RP und RQ in P_2 und Q_2, so liegen P_2 und Q_2 auf den zu RP und RQ konjugierten Durchmessern, welche die Sehnen PS und QS und daher auch PR und QR halbieren, folglich ist

$$P_2Q_2 \parallel PQ \text{ und } RS = R_1S:$$

b. *Die Tangente in einem Parabelpunkte ist den zu seinem Durchmesser konjugierten Sehnen parallel.*

c. *Die Strecke eines Durchmessers zwischen einem seiner Punkte und dessen Berührungssehne wird durch die Parabel halbiert.*

230. *Die Polareigenschaften.*

Die Bezeichnungen der vorigen Nummer werden festgehalten. Durch R ziehe man eine beliebige Gerade h, welche die Parabel in M und N und die Berührungssehne PQ in E schneidet. Der Schnittpunkt von h mit der Tangente in S sei D. Die Projektionen von $DEMN$ auf die Leitlinie seien $D_1E_1M_1N_1$. Fig. 77.

Die Tangente DS ist die Mittelsenkrechte von BS_1, also ist $DB = DS_1$. Da $RS = R_1S$ und $SD \parallel PQ$, so ist auch $RD = DE$ und $DS_1 = DE_1$. Es läfst sich also um D ein

Kreis beschreiben, welcher durch BE_1S_1 und den Gegenpunkt B' von B bezüglich h geht. Die Kreise um M mit MB und um N mit NB berühren die Leitlinie l in M_1 und N_1 und

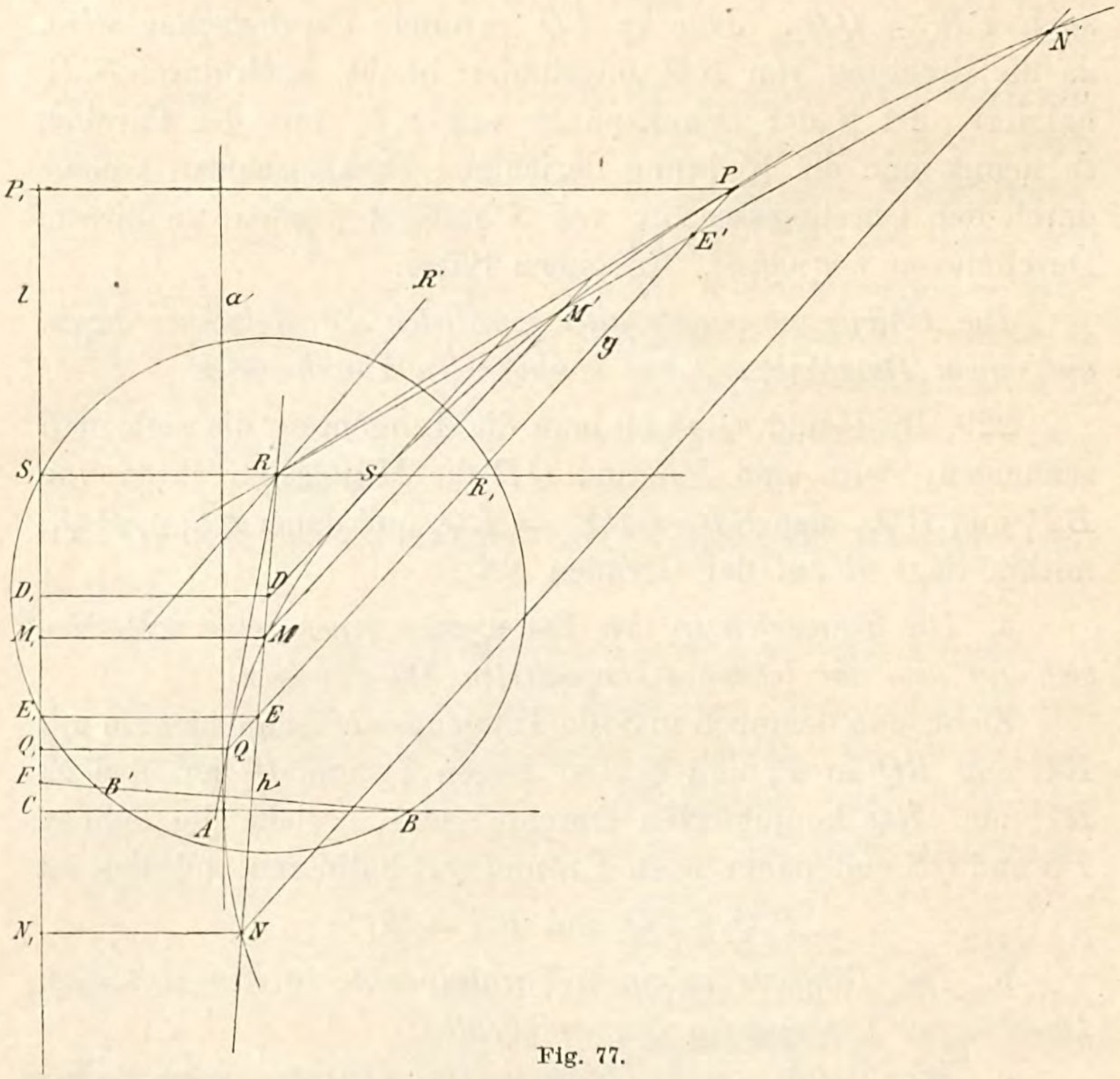


Fig. 77.

schneiden sich auch in B', also ist, wenn BB' die Leitlinie in F trifft,

$$FB \,.\, FB' = FS_1 \,.\, FE_1 = FM_1^2 = FN_1^2,$$

es sind also $M_1N_1S_1E_1$ und daher auch $MNRE$ harmonisch:

a. *Jede Parabelsehne wird durch einen ihrer Punkte und seine Berührungssehne harmonisch geteilt. — Die Berührungssehne heifst die Polare des Punktes.**)

---

*) Der Beweis dieses Satzes ist dem Schriftchen von Simon „Die Kegelschnitte behandelt für die Repetition der Gymnasial-Prima“ entnommen.

Zieht man durch M und N zu ER_1, die parallelen Parabelsehnen MM' und NN' und durch R die Parallele RR' so sind die Geraden RR', EE', MM', NN' harmonisch und da $RM'E'N'$ auf einer Geraden liegen, so müssen sich $M'N$ und MN' in R_1 schneiden. Daher werden die Parabelsehnen MN' und $M'N$ durch R_1 und RR' harmonisch geteilt. Da M und N beliebig waren, so gilt allgemein der Satz:

b. *Alle durch einen innerhalb der Parabel liegenden Punkt gelegten Sehnen werden durch diesen und eine Gerade, seine Polare, harmonisch geteilt. Diese ist konjugiert zu dem durch den Punkt gehenden Durchmesser.*

231. *Quadratur der Parabel.*

In den Punkten A und B der Parabel seien die Tangenten gezogen, sie mögen sich in C schneiden. Durch C ziehe man die Parallele zur Axe, welche die Berührungssehne in D, die Parabel in E schneiden mag, dann ist nach dem letzten Satze

$$CE = DE$$

weil der unendlich grofse Durchmesser in C und D harmonisch geteilt wird. Die Tangente in E mufs durch den im Unendlichen liegenden Pol des Durchmessers CD gehen, also ist

$$FG \parallel AB.$$

Daher ist, wenn man

Dreieck $ABC = \triangle$ setzt,

$$CFG = \tfrac{1}{4} \triangle$$

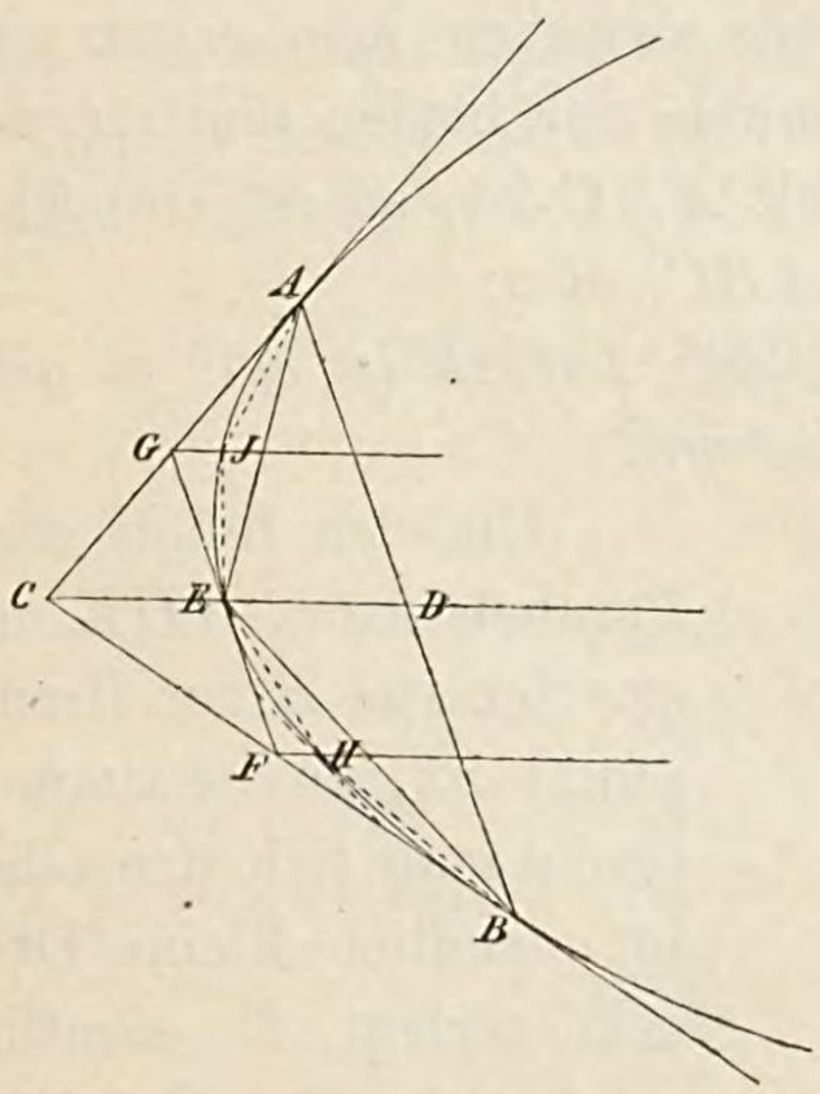


Fig. 77a.

Die beiden Dreiecke AEG und BEF sind gleich $\frac{1}{8} \triangle$. Schneidet man die Parabel mit den Durchmessern durch F und G in H und J, und zieht durch diese Punkte Tangenten, so schneiden sie von den Dreiecken AEG und BEF je ein Viertel, also zusammen $\frac{1}{16} \triangle$ ab.

Fährt man so fort, so zerteilt man das von den Tangenten AC und BC und der Parabel gebildete Segment in

$$\tfrac{1}{4}\triangle + \tfrac{1}{16}\triangle + \tfrac{1}{64}\triangle + \cdots = \tfrac{1}{3}\triangle$$

folglich ist das von der Berührungssehne und der Parabel begrenzte Segment gleich $\frac{2}{3}\triangle$:

Jedes Parabelsegment beträgt zwei Drittel desjenigen Dreiecks, welches die Sehne mit den Tangenten in den Endpunkten bildet.

Es sei ABC ein beliebiges der Parabel eingeschriebenes Dreieck; die Tangenten durch seine Ecken schneiden sich in Punkten $A_1B_1C_1$. — Wenn man von dem Tangentenwinkelsegmente ABC_1 die beiden Tangentenwinkelsegmente ACB_1 und BCA_1 abzieht, so behält man das Tangentendreieck $A_1B_1C_1$. Da die genannten drei Segmente die Hälften der Parabelsegmente (AB), (AC), (BC) sind und die Differenz zwischen dem ersten und der Summe der beiden anderen das Dreieck ABC ist, so ist Dreieck $A_1B_1C_1 = \frac{1}{2}ABC$, also:

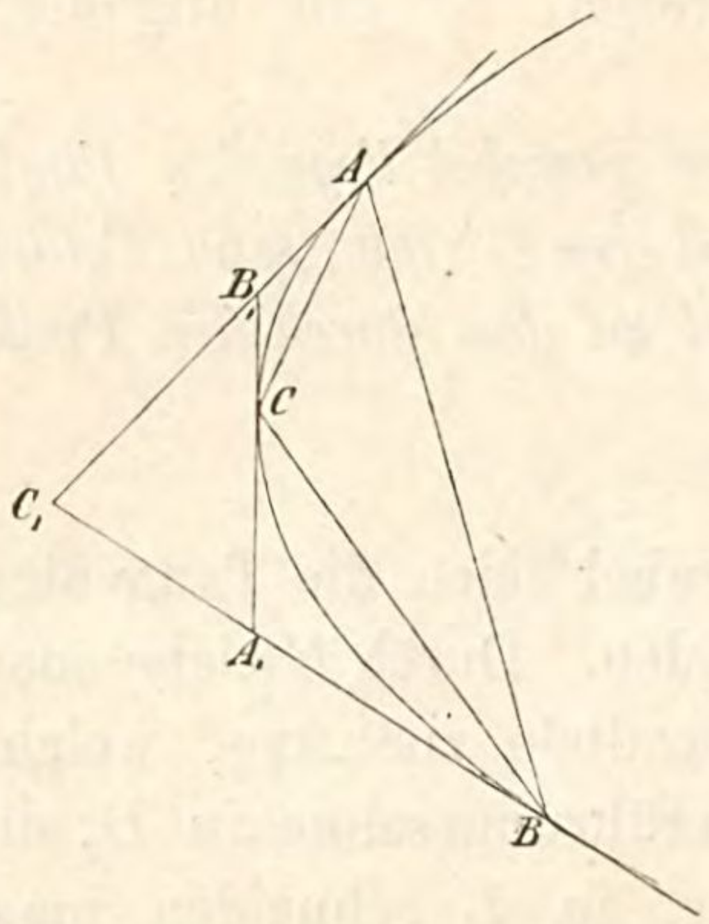


Fig. 77 b.

Das von drei Tangenten gebildete Dreieck ist halb so grofs als das Dreieck ihrer Berührungssehnen.

Um den Inhalt eines Parabelsektors BDE, dessen Scheitel B der Brennpunkt ist, zu bestimmen, denke man sich denselben in unendlich kleine Dreiecke zerlegt, die sämtlich eine Ecke in B haben. Es sei GH ein unendlich kleiner Parabelbogen, so dafs er mit seiner Tangente zusammenfällt und D seine Mitte ist. Fällt man GG_1 und HH_1 senkrecht auf die Leitlinie, so ist $BH = HH_1$, $BG =$

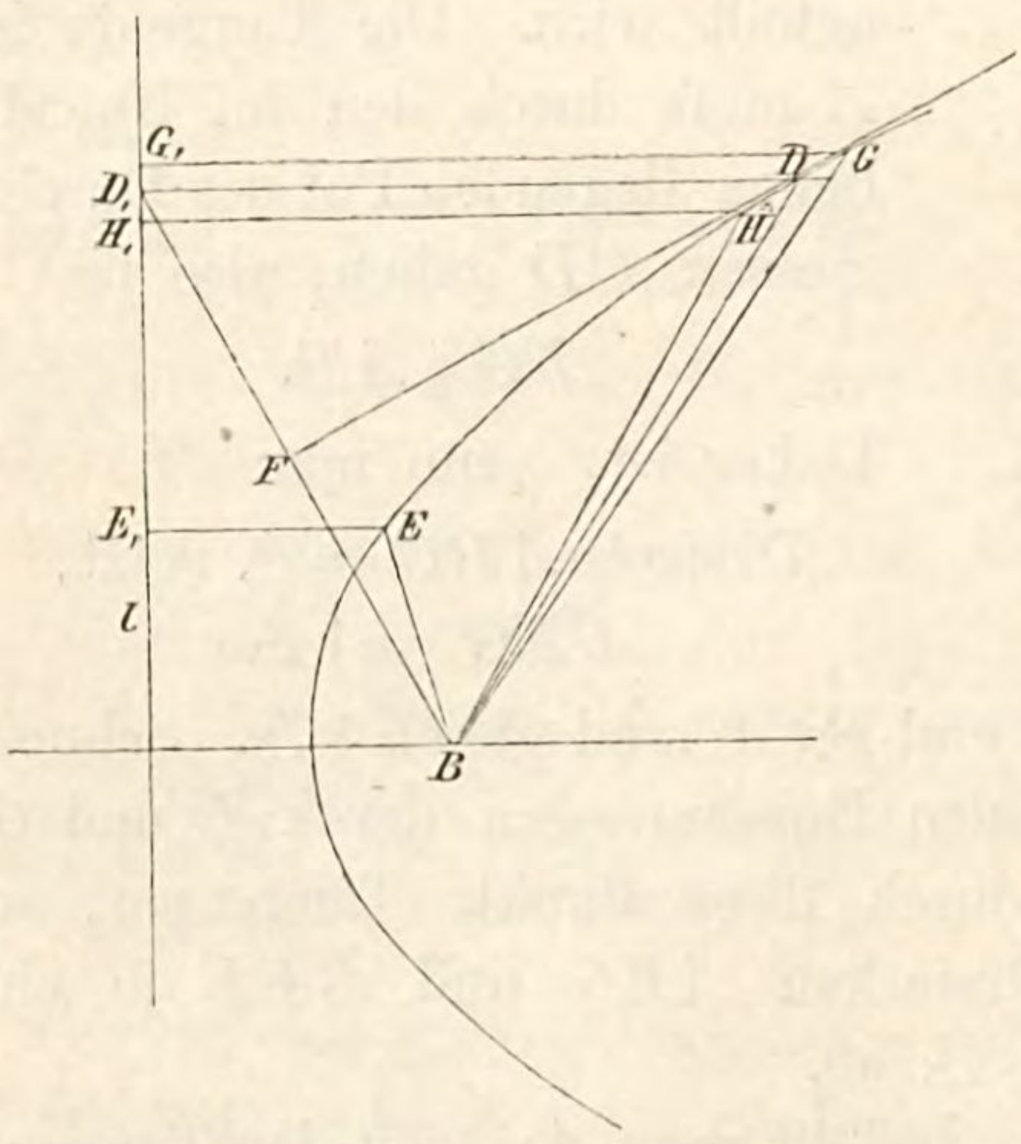


Fig. 77 c.

GG_1; ferner ist die Tangente in D die Mittelsenkrechte von BD_1, wenn DD_1 senkrecht auf der Leitlinie steht, also ist

$$\text{Trapez}\quad GG_1H_1H = GH_1 \,.\, DD_1 = GH \,.\, D_1F$$

$$\text{Dreieck}\quad BGH = \tfrac{1}{2}\, GH \,.\, BF$$

daher $\quad \text{Trapez}\quad GG_1H_1H = 2\, BGH.$

Daraus aber folgt:

$$\text{Sektor}\ BDE = \tfrac{1}{2}\ \text{Trapez}\ DD_1E_1E.$$

Also: *Jeder von einem Parabelbogen und zwei Brennstrahlen begrenzte Sektor ist halb so groſs wie das Trapez, welches von dem Parabelbogen, den aus seinen Endpunkten auf die Leitlinie gefällten Senkrechten und der Leitlinie begrenzt wird.*

§ 19.

Ellipse und Hyperbel.

232. In gleicher Weise wie vorher die Parabel lassen sich Ellipse und Hyperbel erzeugen als geometrischer Ort eines Punktes, dessen Abstände von einem festen Punkte, *Brennpunkte*, und einem festen Kreise, *Leitkreise*, einander gleich sind.

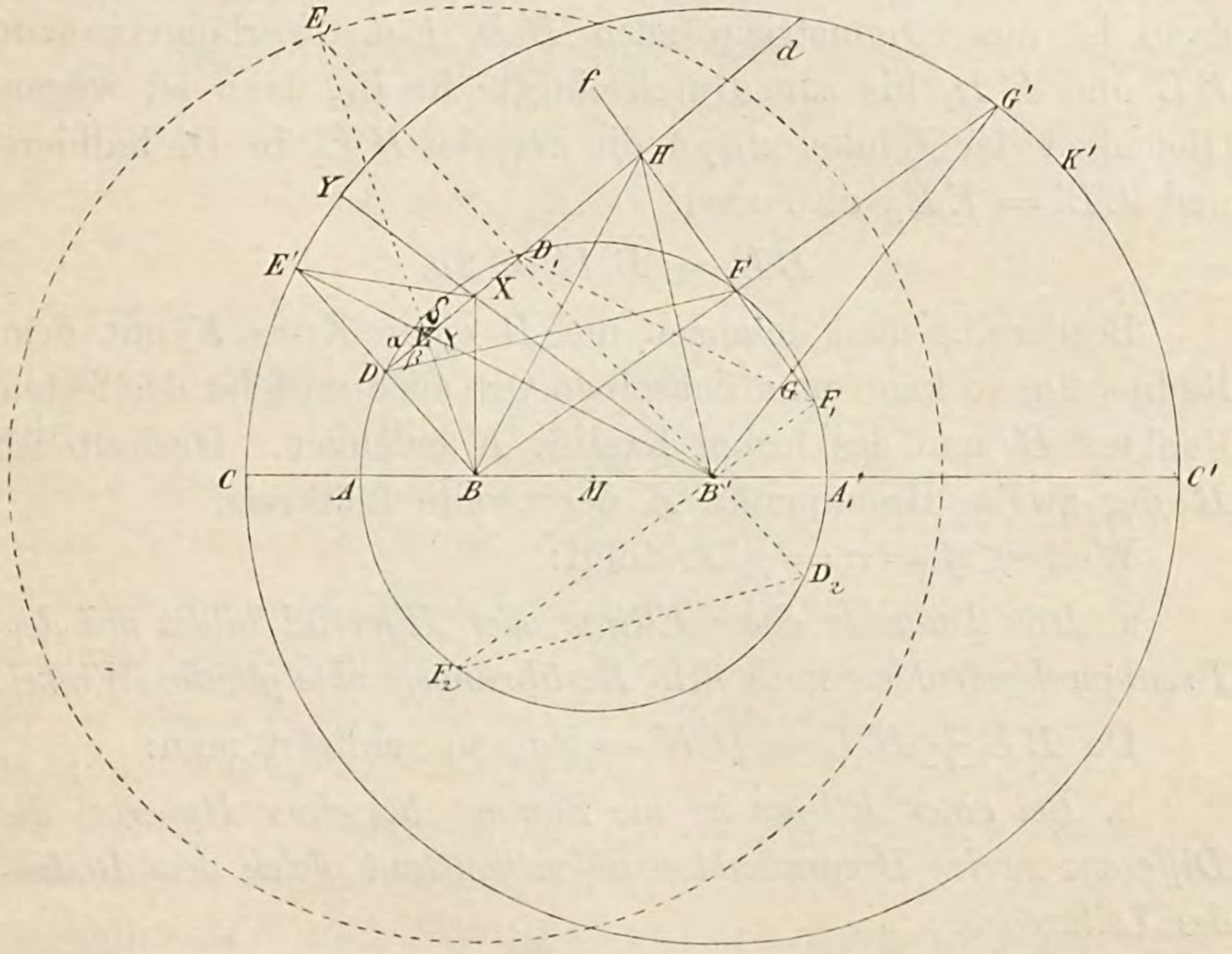


Fig. 78.

Es sei B ein fester Punkt und K' um B' ein fester Kreis mit dem Radius $2a$. Man ziehe durch B und B' den Durchmesser CC', halbiere BC in A und BC' in A', so sind A und A' gleichweit von B und dem Kreise entfernt, also Punkte des Ortes.

Andere Punkte und gleichzeitig ihre Tangenten findet man durch folgende Konstruktion. Man verbinde B und B' mit einem beliebigen Punkte E' von K', zeichne über AA' als Durchmesser einen Kreis M, welcher *Scheitelkreis* genannt wird und errichte im Schnittpunkte D von BE' mit dem Scheitelkreise die Senkrechte d, so ist sie eine Tangente des Ortes und ihr Schnittpunkt E mit $B'E'$ ist ein Punkt desselben. Um das erste zu beweisen, zeige man, dafs es aufser E auf d keinen Punkt des Ortes giebt. Ist X ein beliebiger Punkt von d, so ist $XB = XE' > XY$, wenn Y der Durchschnitt von $B'X$ mit K' ist. Also ist d eine Tangente. Da aber $EB = EE'$ so ist E ein Punkt des Ortes. Dieser Ort heifst Ellipse oder Hyperbel, je nachdem B innerhalb oder aufserhalb des Kreises K' liegt.

Die Tangente d schneide den Scheitelkreis M noch in D_1, dann ist aus Symmetriegründen $B'D_1 \perp d$. Verlängert man BE und $B'D_1$ bis zum Durchschnitte in E_1, dann ist wegen Gleichheit der Winkel $\alpha\beta\gamma\delta$ die Strecke $B'E_1$ in D_1 halbiert und $EB' = EE_1$, also auch

$$BE_1 = B'E' = 2a.$$

Beschreibt man demnach um B einen Kreis K mit dem Radius $2a$, so kann man denselben Ort auch mittelst des festen Punktes B' und des festen Kreises K erzeugen. Deshalb ist B' der zweite Brennpunkt, K der zweite Leitkreis.

Weil $\sphericalangle \beta = \alpha = \gamma$, so folgt:

a. *Iede Tangente einer Ellipse oder Hyperbel bildet mit den Brennpunktsstrahlen nach dem Berührungspunkte gleiche Winkel.*

Da $BE \pm B'E = B'E' = 2a$, so schliefst man:

b. *Bei einer Ellipse ist die Summe, bei einer Hyperbel die Differenz zweier Brennpunktsstrahlen konstant gleich dem Radius des Leitkreises.*

Es stehen BD und $B'D_1$ auf der Tangente senkrecht, also:

c. *Die Fußpunkte aller Senkrechten, die sich von den Brennpunkten auf die Tangenten einer Ellipse oder Hyperbel fällen lassen, liegen auf einem Kreise, dem Scheitelkreise.*

233. Eine zweite Tangente f schneide d in H; sie schneide den Scheitelkreis M in F, dann ist $\sphericalangle BFH = 90^0$. Da auch $BDH = 90^0$, so sind D und F die Schnittpunkte des Scheitelkreises mit dem über BH als Durchmesser konstruierten Kreise. Darin liegt aber die *Konstruktion der Tangenten* von einem Punkte H an eine Ellipse oder Hyperbel.

Da $$BD = DE', \; BF = FG',$$

so ist $$HE' = HB = HG'$$

Ferner ist $$B'E' = B'G' = 2a,$$

also sind die Dreiecke $HE'G'$ und $B'E'G'$ gleichschenklig und

$$\sphericalangle EB'H = G'B'H.$$

E und G sind aber die Berührungspunkte der Tangenten EH und GH, also gilt der Satz:

Verbindet man einen Brennpunkt mit den Berührungspunkten und dem Schnittpunkte zweier Tangenten, so halbiert die letzte Verbindungslinie den von den beiden ersten gebildeten Winkel.

234. Eine beliebige Tangente schneide die beiden festen

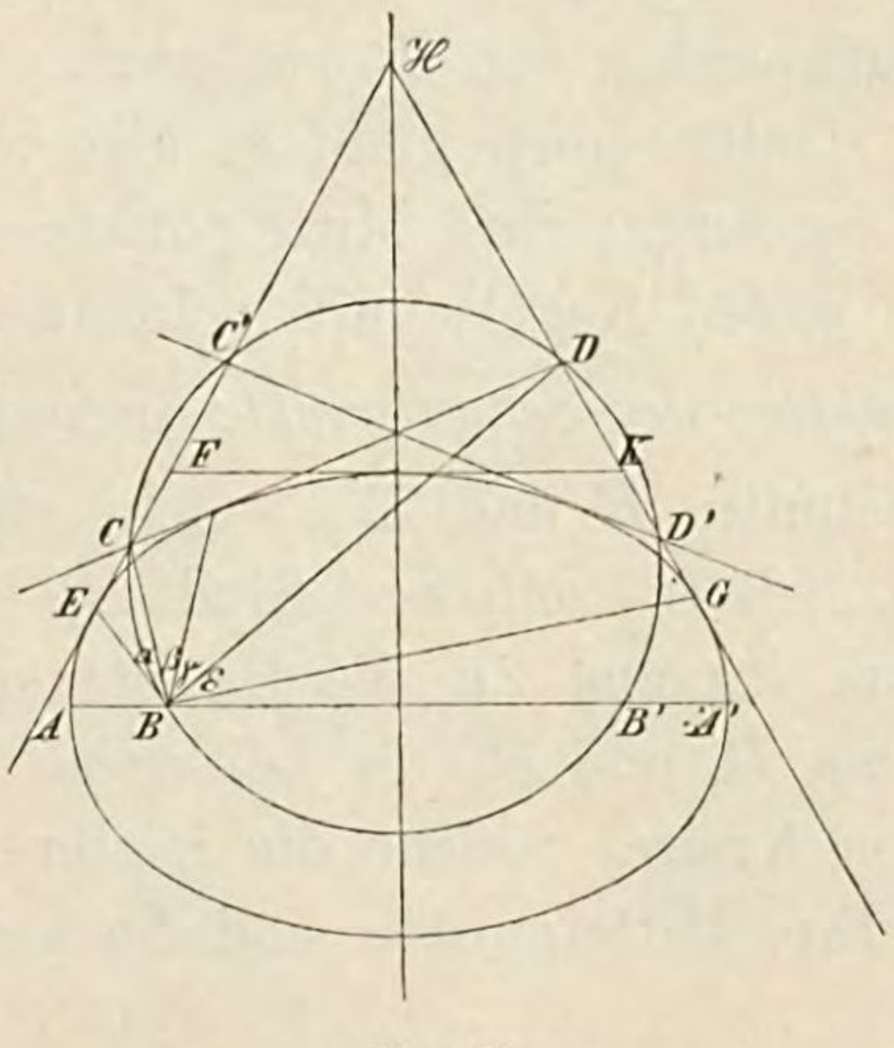


Fig. 79.

Tangenten HE und HG in C und D, dann ist nach dem vorigen Satze $\sphericalangle \alpha = \beta, \; \gamma = \delta$, also $\beta + \gamma = \frac{1}{2} EBG$:

Die Strecke einer beweglichen Tangente zwischen zwei festen Tangenten erscheint jedem Brennpunkte unter konstantem Winkel.

Nimmt man den Punkt H auf der Nebenaxe und die Tangente FK parallel der Hauptaxe, so ist $\sphericalangle FBK = FB'K$, also liegen $BB'FK$ auf einem Kreise. Da aber $\sphericalangle FBK = CBD$, $\sphericalangle FB'K = CB'D$, so ist auch $\sphericalangle CBD = CB'D$ und es liegen auch $BB'CD$ auf einem Kreise:

Die Punkte, in denen eine bewegliche Tangente zwei feste Tangenten trifft, die sich auf der Nebenaxe schneiden, liegen mit den Brennpunkten auf einem Kreise.

Aus diesem Satze ergiebt sich eine einfache Konstruktion des Kegelschnittes aus seinen Tangenten. Man beschreibe um die Punkte der Mittelsenkrechten zweier Punkte BB' Kreise, welche durch diese Punkte hindurchgehen und schneide mit ihnen zwei zur Mittelsenkrechten symmetrisch liegende Gerade. Dann sind die Verbindungsgeraden der vier Schnittpunkte, welche sich auf der Mittelsenkrechten schneiden, Tangenten eines Kegelschnittes.

235. *Konstruktion der Schnittpunkte einer Geraden.*

Um die Schnittpunkte einer Geraden g mit dem Kegelschnitte zu konstruieren, denke man sich um die Punkte von g mit ihren Abständen von B Kreise beschrieben. Diese treffen sich noch im Gegenpunkte von B bezüglich g und bilden daher ein Büschel. Unter ihnen giebt es also zwei, welche den Leitkreis von B berühren; ihre Mittelpunkte sind die beiden Punkte, in denen g den Kegelschnitt schneidet.

236. *Konstruktion der Schnittpunkte confocaler Kegelschnitte.*

Zwei Kegelschnitte K und K', welche einen Brennpunkt B gemein haben, heifsen *confocal.* Sind B_1 und B_1' die anderen Brennpunkte, $2a$ und $2a'$ die Hauptaxen, so beschreibe man mit diesen um B_1 und B_1' die Leitkreise von B und konstruiere diejenigen Kreise, welche die letzteren berühren und durch B gehen. Ihre Mittelpunkte sind die gesuchten Schnittpunkte.

Ist einer der Kegelschnitte eine Parabel, so geht der Leitkreis in die Leitlinie über, die Konstruktion bleibt ungeändert.

In gleicher Weise verfährt man, wenn die Kegelschnitte *biconfocal* sind, also beide Brennpunkte gemein haben.

Wenn im letzten Falle S ein Schnittpunkt zweier Kegelschnitte mit den Brennpunkten B und B_1 ist, so halbieren die Tangenten die von den Brennpunktsstrahlen gebildeten Winkel und stehen also auf einander senkrecht, die Kegelschnitte schneiden sich also *rechtwinklig*.

Wenn zwei biconfocale Kegelschnitte sich schneiden, so bilden sie rechte Winkel.

237. In den Kreisvierecken $HBDF$ und $HB'D_1F_1$ ist

$$\sphericalangle BHD = BFD \text{ und } \sphericalangle B'HF_1 = B'D_1F_1$$

Verlängert man D_1B' und F_1B' bis zum Durchschnitt mit dem Scheitelkreise in D_2 und F_2, so ist

$$B'D_2 = BD,\ B'F_2 = BF, \text{ also } \triangle B'D_1F_1 \cong BDF$$

$$\text{und } \sphericalangle B'F_2D_2 = BFD.$$

Im Kreisviereck $D_1F_1F_2D_2$ ist $\sphericalangle B'F_2D_2 = B'D_1F_1$, also

$$\sphericalangle BHD = B'HF_1,$$

d. h. *die Tangenten eines Punktes bilden mit seinen Brennpunktsstrahlen gleiche Winkel.*

238. Wenn die Tangenten HD und HF auf einander senkrecht stehen, so stehen auch BD und BF auf einander Fig. 80 u. 80a.

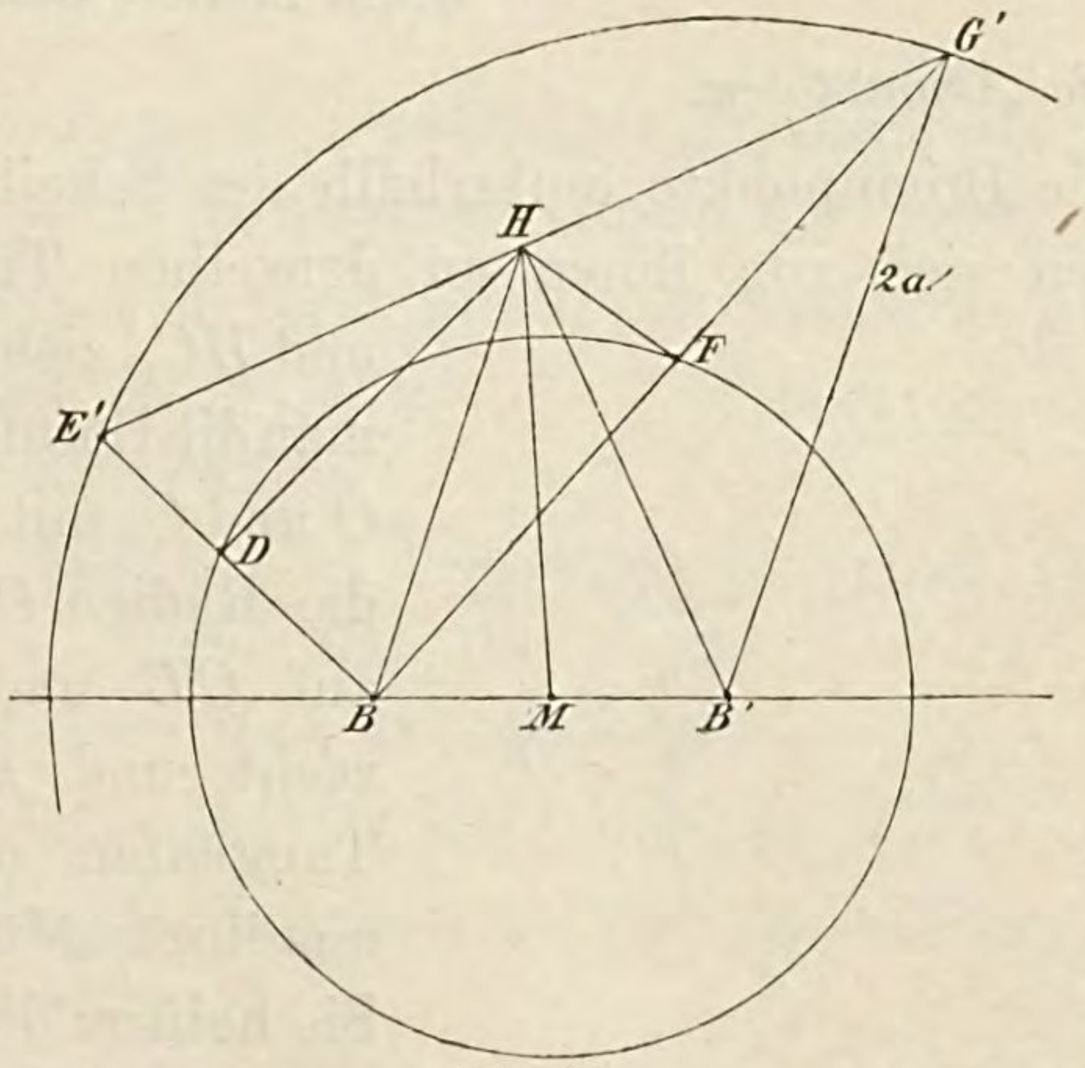


Fig. 80.

senkrecht und der Punkt H liegt auf der Hypotenuse $E'G'$ und es ist $E'H = G'H = BH$ und $\sphericalangle B'HE' = 90^0$.

Also $$B'H^2 + BH^2 = B'H^2 + G'H^2 = 4a^2.$$

Aber $$2HM^2 + 2BM^2 = BH^2 + B'H^2 = 4a^2,$$

also $$HM^2 = 2a^2 - BM^2,$$

d. h. HM ist konstant und der Ort für H ist ein Kreis.

Die Schnittpunkte aller rechtwinkligen Tangentenpaare liegen auf einem Kreise. Cf. 199, 200.

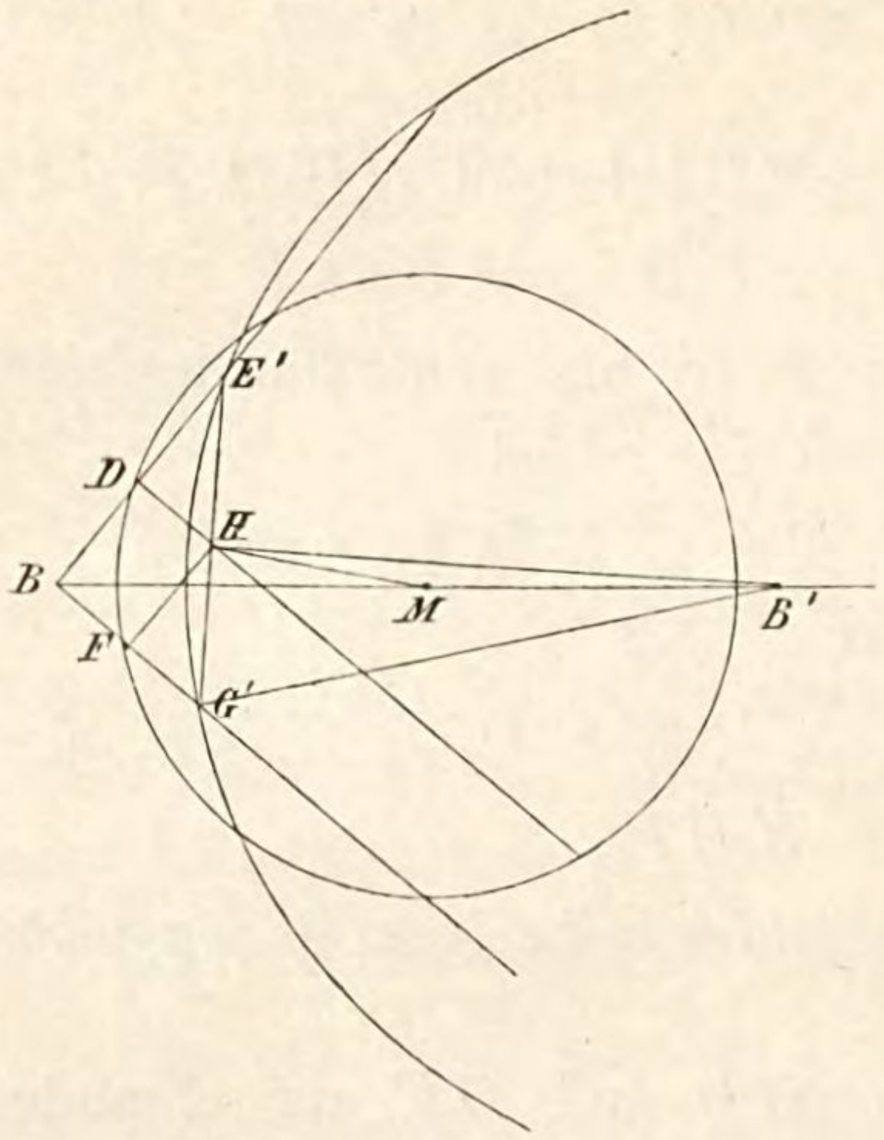


Fig. 80a.

239. Liegt der Brennpunkt B aufserhalb des Leitkreises B', also auch aufserhalb des Scheitelkreises M, so wird der Ort eine Hyperbel. In diesem Falle giebt es nicht immer zwei senkrechte Gerade durch B, die beide den Scheitelkreis schneiden, natürlich dann auch keine rechtwinkligen Tangenten. Der Grenzpunkt für B wird derjenige Punkt sein, von dem aus sich rechtwinklige Tangenten an den Scheitelkreis ziehen lassen.

240. *Die Asymptoten.*

Wenn die Brennpunkte aufserhalb des Scheitelkreises liegen, so lassen sich von ihnen an denselben Tangenten BC und BC_1, ziehen; verbindet man die Berührungspunkte C und C_1 mit M, so stehen die Radien CM und C_1M auf CB und C_1B senkrecht und sind deshalb Tangenten der Hyperbel aus ihrem Mittelpunkte M. Sie heifsen die *Asymptoten* der Hyperbel. Um den Berührungspunkt auf MC zu finden, verlängere man BC über C hinaus um sich selbst

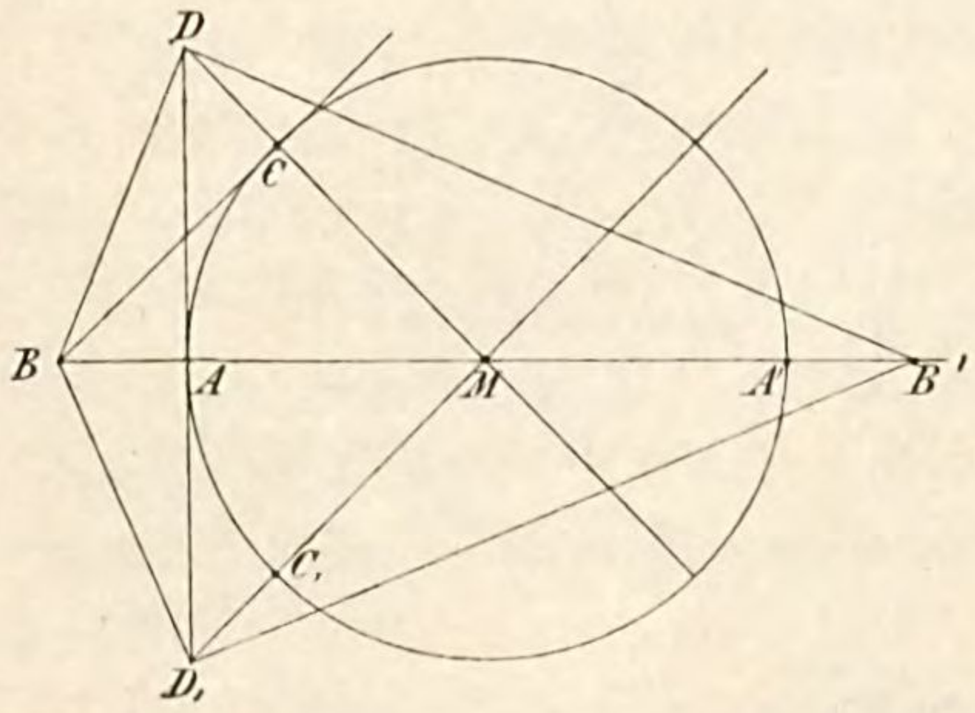


Fig. 81.

bis E und verbinde B' mit E. Die Gerade $B'E$ ist aber parallel zu MC; der Schnittpunkt von MC und $B'E$ ist aber der Berührungspunkt von MC; dieser liegt daher im Unendlichen.

Die Tangenten der Hyperbel aus ihrem Mittelpunkte heifsen Asymptoten; ihre Berührungspunkte liegen im Unendlichen.

241. Die Asymptoten begrenzen auf jeder Tangente ein Stück, welches jedem Brennpunkte unter einem bestimmten Winkel erscheint (234); die Tangente DD_1 im Scheitel A der Hyperbel erscheint daher jedem Brennpunkte unter demselben Winkel, wie irgend eine andere Tangente. Da $\sphericalangle BAD = BCD = 90^0$, so liegen die vier Punkte $ABCD$ auf einen Kreise und es ist

$$MA \cdot MB = MC \cdot MD, \text{ also } MB = MD \text{ und } AB = CD,$$

folglich $\quad \triangle ABD \cong BCD$ und $BC = AD$.

Also $\quad AD^2 = BC^2 = BA \cdot BA' = BA \cdot AB'$

und deshalb

$$\sphericalangle BDB' = BD_1B' = 90^0,$$

$BB'DD_1$ ein Kreisviereck und

$$\sphericalangle DBD_1 + DB'D_1 = 180^0,$$

d. h. a. *Die von den Asymptoten begrenzte Strecke irgend einer Tangente erscheint beiden Brennpunkten unter einer Winkelsumme von 180^0, oder*

b. *Die Schnittpunkte irgend einer Tangente mit den Asymptoten und die beiden Brennpunkte liegen auf einem Kreise.*

c. *Die von den Asymptoten auf der Scheiteltangente begrenzte Strecke ist doppelt so grofs, wie die Tangente von einem Brennpunkte an den Scheitelkreis.*

242. Die Asymptoten begrenzen auf einer Tangente die Strecke CD; es liegen also die Punkte $CDBB'$ auf einem Kreise. Da $MD = MD_1$ ist, so folgt: Fig. 82.

$$MC \cdot MD = MC \cdot MD_1 = MB^2,$$

d. h. a. *Jede Tangente begrenzt auf den Asymptoten Strecken von konstantem Produkte.*

Weil aber zwei Dreiecke mit demselben Winkel sich wie die Produkte der einschliefsenden Seiten verhalten, so läfst sich dem vorigen Satze auch folgende Fassung geben:

b. *Die Hyperpeltangenten begrenzen mit den Asymptoten Dreiecke von konstantem Inhalt.*

Die letzten Sätze lassen sich umkehren. Beschreibt man einen beliebigen Kreis, welcher die Asymptoten in zwei Punkten C und D schneidet, so mufs CD eine Tangente der Hyperbel sein. Denn die Tangente, welche sich von einem Punkte C einer Asymptote an die Hyperbel noch ziehen läfst, mufs die andere Asymptote in einem Punkte schneiden, der mit C und den Brennpunkten auf einem Kreise liegt.

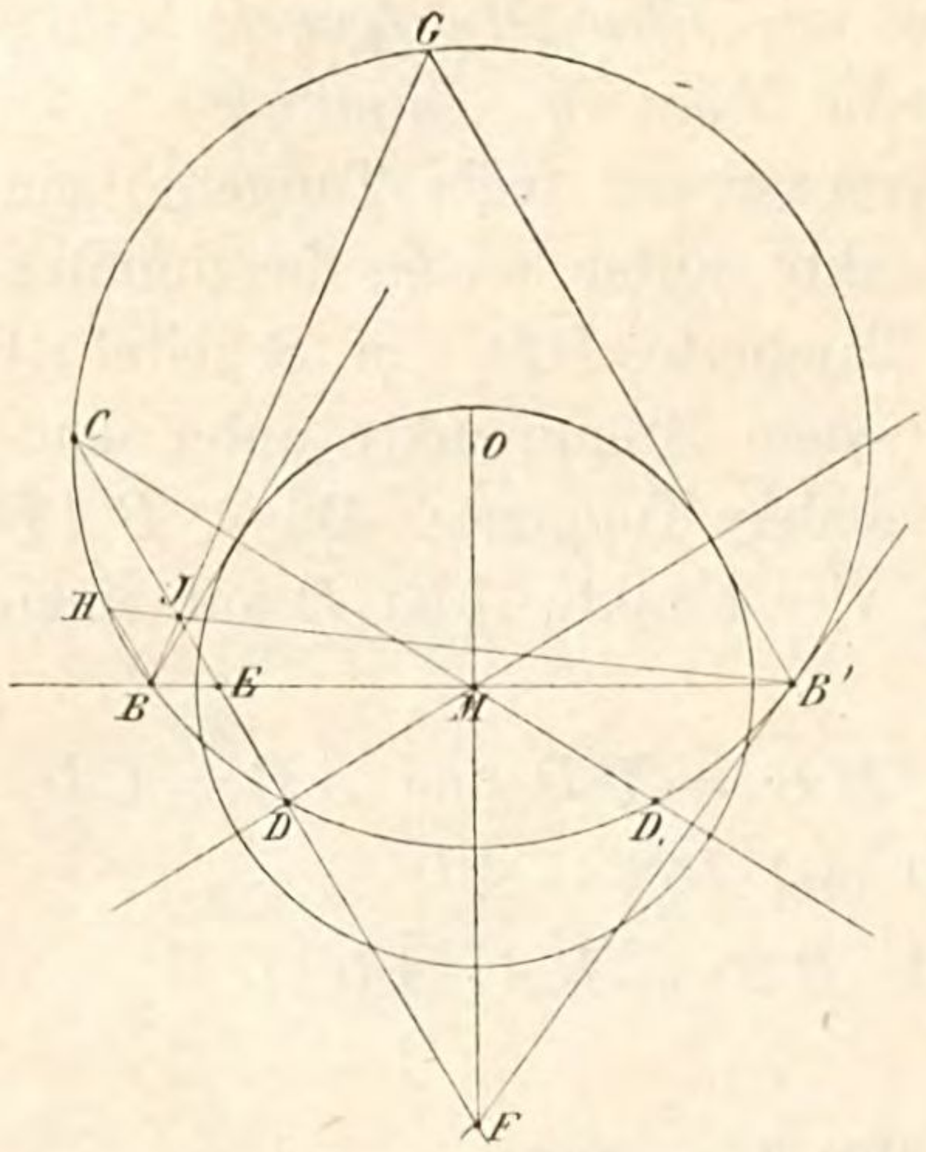


Fig. 82.

Begrenzt ferner eine Gerade CD mit den Asymptoten ein Dreieck von dem konstanten Flächeninhalte, welches jede Tangente begrenzt, so mufs sie aus gleichen Gründen wie vorher auch eine Tangente sein. Man hat also die Sätze:

c. *Wählt man auf der Halbierungslinie zweier Scheitelwinkel zwei vom Scheitel gleichweit entfernte Punkte, so schneiden alle durch dieselben gelegten Kreise die Schenkel eines jeden der beiden Winkel in zwei Punkten, deren Verbindungslinien Tangenten einer Hyperbel sind, welche die beiden Punkte zu Brennpunkten und die Schenkel der Winkel zu Asymptoten hat.*

d. *Alle Geraden, welche mit zwei festen Geraden Dreiecke von konstantem Flächeninhalte begrenzen, die in einem von den beiden Geraden gebildeten Winkel oder seinem Scheitelwinkel liegen, sind Tangenten einer Hyperbel, welche die festen Geraden zu Asymptoten hat.*

243. Die Gerade CD begrenze mit den festen Geraden a und a_1 ein Dreieck MCD von dem konstanten Inhalte J. Es sei G der Halbierungspunkt von CD und es soll untersucht werden, ob sich durch G noch eine zweite Gerade ziehen läfst, welche mit a und a_1 ein Dreieck von demselben Flächeninhalte begrenzt. Wäre EF eine solche Gerade, so wäre auch

$$\triangle CEG = DFG$$

und weil sich verhält

$$\triangle CEG : DFG = CG \cdot EG : DG \cdot FG,$$

so müfste $$EG = FG$$

sein. Durch einen Punkt läfst sich aber zwischen zwei Geraden nur eine Strecke so legen, dafs sie in jenem Punkte halbiert wird, also ist die letzte Gleichung unmöglich. Von dem Halbierungspunkte G der Geraden CD, die man nach dem letzten Satze als eine Hyperbeltangente betrachten kann, läfst sich also keine andere Tangente ziehen, also liegt G auf der Hyperbel. Daraus folgert sich der Satz:

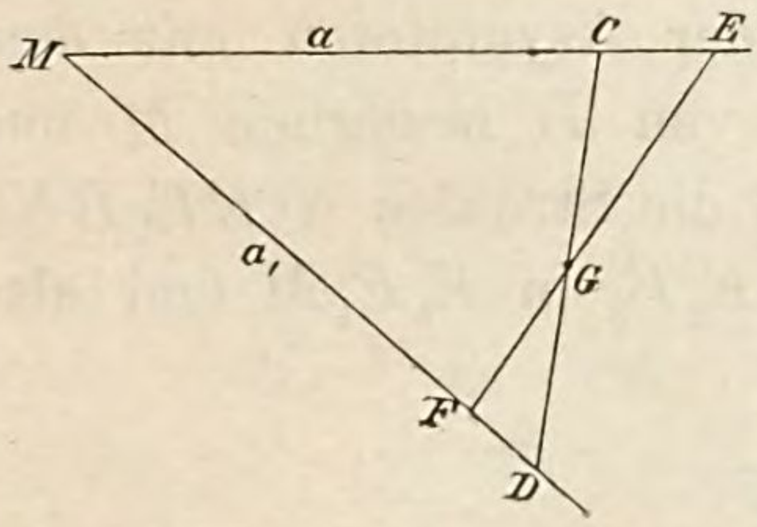


Fig. 83.

Die Strecke einer Tangente zwischen den Asymptoten wird durch den Berührungspunkt halbiert.

Dieser Satz läfst sich auch auf folgende Art beweisen: Fig. 82.

Die Punkte CD, in welchen eine Tangente die beiden Asymptoten schneidet, liegen mit den Brennpunkten BB' auf einem Kreise O. Die Gerade OM treffe CD in F, dann sind die vier Strahlen in M harmonisch (6e.) also auch die Punkte $CDEF$, und daher die Strahlen B' $(FECD)$. Diese treffen den Kreis in $B'BCD$. Zieht man $B'G \parallel CD$ und macht $\overset{\frown}{CH} = \overset{\frown}{BD}$, so sind CD durch GH ebenso wie durch BB' harmonisch getrennt, also sind $B'(CDHG)$ harmonische Strahlen und da $B'G \parallel CD$ ist, so ist (6a.) $CJ = DJ$. Da auch wegen Gleichheit der Bogen CH und BD die Sehne $BH \parallel CD$ ist und BJ durch G geht, so ist $BJ = HJ$, $B'J = GJ$.

Durch J kann daher keine andere Hyperbeltangente gehen, weil sonst der Kreis, der durch ihre Schnittpunkte mit den Asymptoten und durch die Brennpunkte sich legen läfst, auch durch H gehen müfste. Also ist der Halbierungspunkt J ein Hyperbelpunkt.

244. Beide Beweise, von denen der erste dem ersten

Teile der Steinerschen Vorlesungen, herausgegeben von Geiser, entnommen ist, sind indirekt und begründen den Satz nicht unmittelbar genug aus der Erzeugung der Hyperbel. Dies thut in ausreichendem Maſse der folgende Beweis.

Es sei M der Scheitelkreis, B und B' seien die Brennpunkte, BE eine beliebige Gerade, $CD \perp BE$, $EF = BE$. Sind H und J die Schnittpunkte der Asymptoten mit dem Kreise M, so ist HJ die Polare von B bezüglich M und $BKEE_1$ sind harmonisch, also auch die Strahlen $N(EE_1BK)$. Diese schneiden den Durchmesser E_1E_2 in E_2E_1M und also

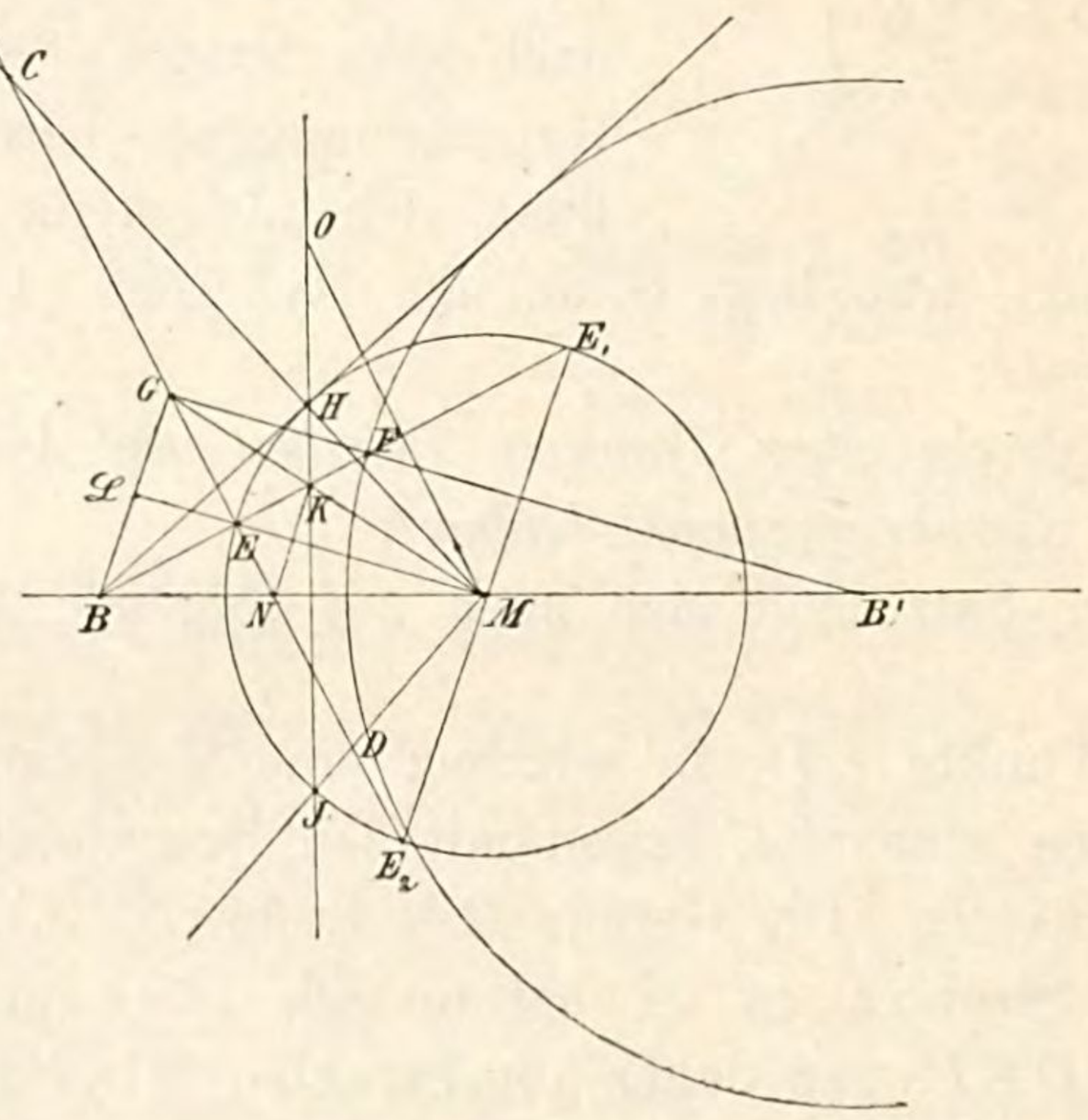


Fig. 84.

noch im Unendlichen, daher ist $NK \parallel E_1E_2$. Die harmonischen Strahlen $M(EE_1BK)$ schneiden CD in den harmonischen Punkten EE_2NG; diese vier harmonischen Punkte haben mit EE_1KB den Punkt E gemein, also schneiden sich E_1E_2, NK und BG in einem Punkte; da $NK \parallel E_1E_2$, so muſs auch BG beiden Geraden parallel sein. Zieht man ME bis L, so muſs $BL = LG$ und $ML \parallel B'G$ sein. Da aber $BE = EF$ und deshalb $ME \parallel B'F$ ist, ME aber mit ML zusammenfällt, so muſs auch $B'G$ mit $B'F$ zusammenfallen, also ist G ein Hyperbelpunkt. — Errichtet man in E die Tangente EO, so sind $JHKO$ harmonisch; O ist der Pol von EE_1, daher ist $MO \perp EE_1$ und $MO \parallel CD$. Die harmonischen Strahlen

$M(JHKO)$ treffen CD in CDG und im Unendlichen, daher ist $CG = DG$.

245. Die Asymptoten begrenzen auf zwei Tangenten die Strecken CD und C_1D_1, dann ist nach (242)

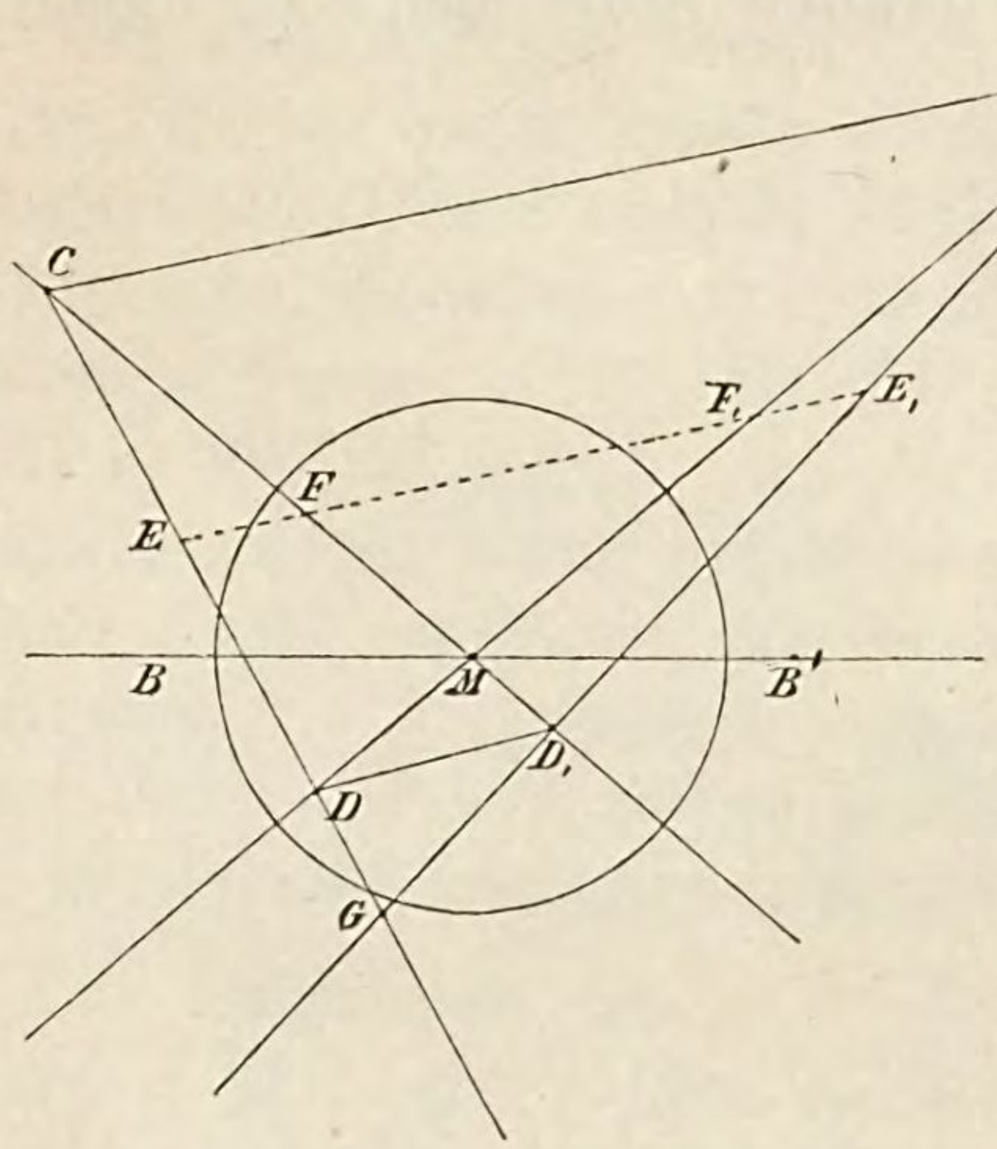


Fig. 85.

$$MC \cdot MD = MC_1 \cdot MD_1 \text{ oder } MC : MC_1 = MD_1 : MD,$$

also $$\triangle MCC_1 \sim MDD_1 \text{ und } CC_1 \parallel DD_1$$

Sind E und E_1 die Mitten von CD und C_1D_1, so ist auch $EE_1 \parallel CC_1$ und wie sich leicht ergiebt

$$EF = E_1F_1 :$$

Die Hyperbel und ihre Asymptoten begrenzen auf jeder Sekante der ersteren gleiche Strecken.

Von diesem Satze ist der vorige nur ein spezieller Fall. Beide sollen später aus einem allgemeineren Gesichtspunkte abgeleitet werden.

246. *Die Leitlinien.*

Um die Abhängigkeit der geometrischen Sätze anschaulich zu erkennen, ist es vorteilhaft, die eine Erzeugungsart auf die andere zurückzuführen. Dieselbe Konstruktion, welche zu dem Satze geführt hat, dafs der Berührungspunkt einer Hyperbeltangente die zwischen den Asymptoten liegende Strecke derselben halbiert, läfst sich benutzen, um die Beziehungen zwischen Brennpunkt und Leitlinie herzustellen und

schafft so eine Verbindung zwischen scheinbar entfernt liegenden geometrischen Sätzen.

Es sei wieder M der Scheitelkreis, es seien B und B' die Brennpunkte, l die Polare von B in Bezug auf den Scheitelkreis M, welche *Leitlinie heifst* und EE_1 irgend eine Sehne

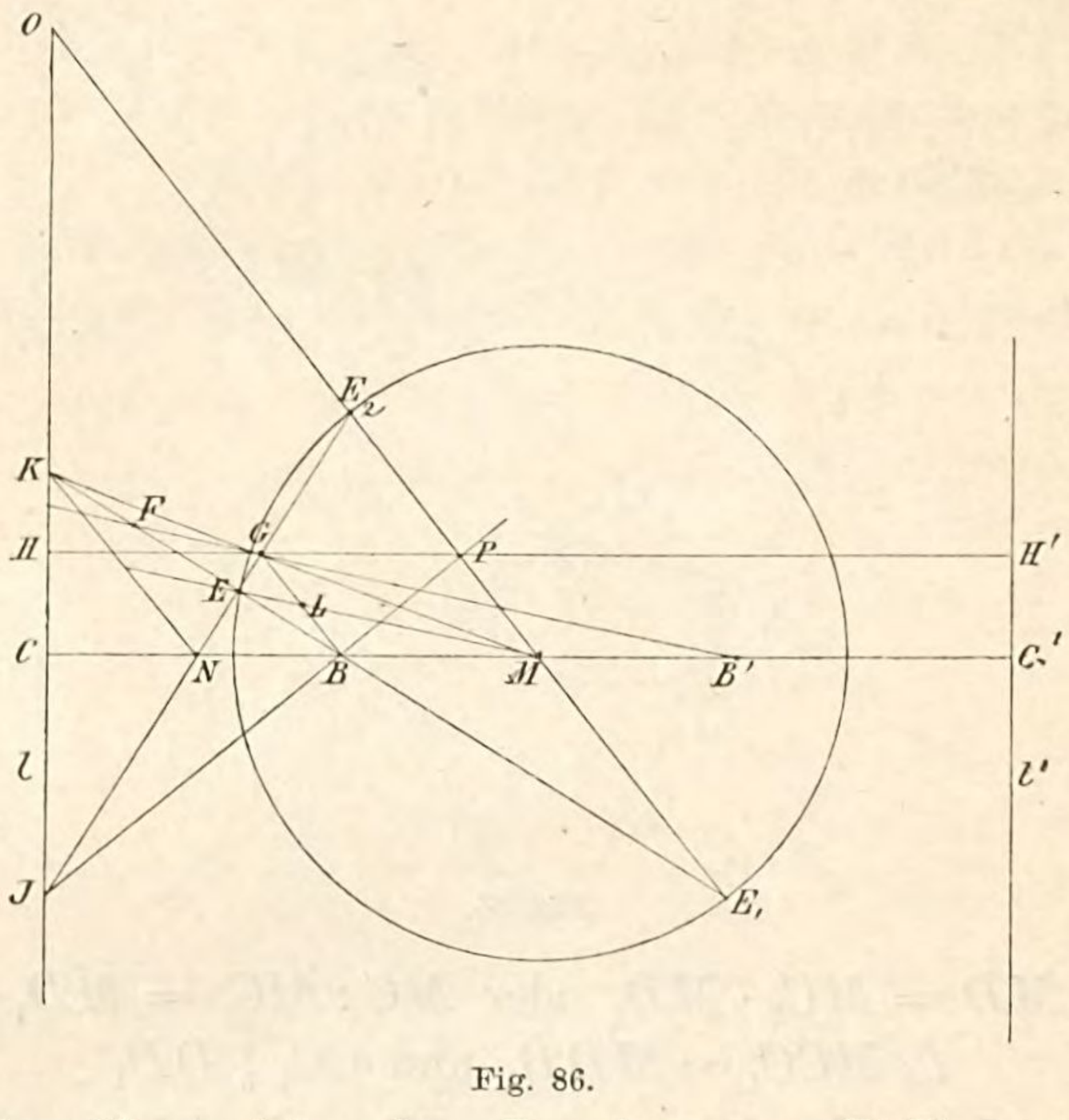


Fig. 86.

durch B. Man ziehe den Durchmesser E_1E_2, verbinde E mit E_2, mache $EF = EB$. Die Punkte EE_1BK sind harmonisch, also auch die Strahlen $N(EE_1BK)$ und daher auch E_2E_1M und P_∞ auf E_1E_2, d. h. $NK \parallel E_1E_2$. Die harmonischen Strahlen $M(EE_1BK)$ treffen EE_2 in den harmonischen Punkten EE_2NG; also müssen sich E_1E_2, NK und GB in einem Punkte schneiden. Da $E_1E_2 \parallel NK$, so ist auch GB zu beiden Geraden parallel. Daher ist auch

$$BL = LG \text{ und } ML \parallel B'G,$$

Aber auch $$BE = EF \text{ und } ME \parallel B'F,$$

also liegen $B'FG$ in einer Geraden. Der Punkt G ist daher ein Punkt der Ellipse oder Hyperbel.

Man findet daher Punkte dieser Kegelschnitte durch die folgende Konstruktion, welche gleichmäfsig den Scheitelkreis, den Brennpunkt und die Leitlinie berücksichtigt. Durch den Brennpunkt B ziehe man eine Sehne EE_1, welche die Leit-

linie l in K schneidet, ziehe den Durchmesser E_1E_2, dann die Sehne EE_2 und schneide letztere mit MK in G, so ist G ein Punkt des Kegelschnittes.

Der Durchmesser E_1E_2 treffe l in O; es seien E_1E_2OP harmonisch. Da auch E_1EKB harmonisch sind, so müssen sich EE_2, BP, KO in einem Punkte J treffen. Die Gerade JP ist die Polare von O, denn sie geht durch den Pol B von l und teilt mit O den Durchmesser E_1E_2 harmonisch. Sie steht also auf diesem senkrecht. (12.) Da $BG \parallel E_1E_2$ ist, so ist auch $\sphericalangle JBG = 90^0$.

Symmetrisch zu l in Bezug auf M konstruiere man die zweite Leitlinie l' und verlängere JG, bis sie dieselbe in J' trifft, dann ist auch $\sphericalangle J'B'G = 90^0$ und da $\sphericalangle JGB = J'GB'$, (237) so ist $\triangle JGB \sim J'GB'$ und es verhält sich

$$BG : B'G = JG : J'G = HG : H'G,$$

wenn $HH' \perp l$. Daher auch

$$BG + B'G : HG + H'G = BG : HG$$

oder

$$BG : HG = 2a : CC',$$

d. h. *Die Entfernungen eines Kegelschnittpunktes von einem Brennpunkte und seiner Leitlinie stehen im konstanten Verhältnisse der Hauptaxe zum Abstande der Leitlinie.*

247. *Die Erzeugung des Kegelschnittes durch Brennpunkt und Leitlinie.*

Gegeben sei ein fester Punkt B und eine feste Gerade l.

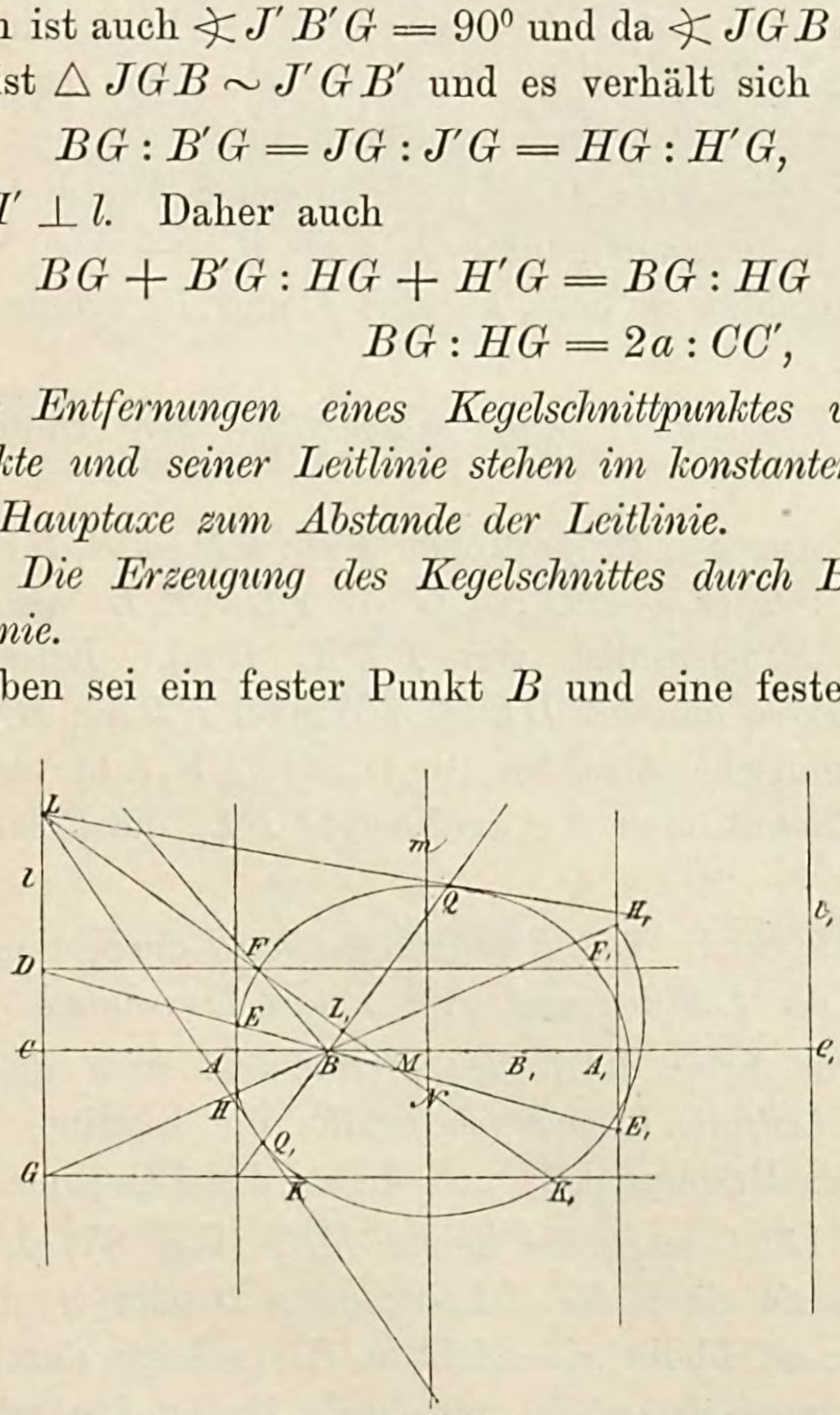


Fig. 87.

Es soll der Ort eines Punktes gesucht werden, dessen Abstände von B und l das konstante Verhältnis μ haben. Man konstruiere auf der Senkrechten BC die Punkte A und A_1 so, dafs $AB : AC = A_1B : A_1C = \mu$; diese Punkte gehören dem Orte an, sie heifsen die *Scheitel*, AA_1 heifst die *Hauptaxe*, die Mittelsenkrechte m von AA_1 die *Nebenaxe*. Sind BB_1 sowie ll_1 symmetrisch zu M, so heifsen die Punkte BB_1 die *Brennpunkte*, die Geraden ll_1 die *Leitlinien* des Ortes; dieser selbst heifst ein *Kegelschnitt*.

Um Punkte desselben zu konstruieren, ziehe man durch Brennpunkt B beliebig eine Gerade BD, errichte in A und A_1 Senkrechte, welche jene in E und E_1 schneiden, und beschreibe um N mit NE einen Kreis, welcher die Parallele durch D zur Hauptaxe in F und F_1 schneiden mag, dann gehören diese Schnittpunkte dem Kegelschnitte an, denn $FB : FD = EB : ED = AB : AC$ (7). In gleicher Weise konstruiere man die Kegelschnittpunkte K und K_1. — Da N auf der Mittelsenkrechten m liegt, so sind F und F_1 symmetrisch zur Nebenaxe:

Der Kegelschnitt liegt symmetrisch zur Hauptaxe und Nebenaxe.

248. Aus den Proportionen $FB : FD = K_1B : K_1G = \mu$ folgt $FB : K_1B = FD : K_1G = FL : K_1L$ also halbiert BL den Nebenwinkel von FBK_1 (6c.). Errichtet man $BL_1 \perp BL$, so halbiert BL_1 den Winkel FBK_1; $B(FK_1LL_1)$ sind harmonische Strahlen (6e.) und FK_1LL_1 harmonische Punkte. Nennt man die Senkrechte BL_1 die Polare von L, so folgt:

a. *Jede Sehne eines Kegelschnittes wird durch ihren Schnittpunkt mit der Leitlinie und seine Polare harmonisch geteilt.*

b. *Jede Sehne durch den Brennpunkt wird durch diesen und seine Leitlinie harmonisch geteilt;* die Leitlinie heifst die Polare ihres Brennpunktes und dieser der Pol jener.

249. Läfst man die Sehne FK_1 (Fig. 87) L um sich drehen bis sie einen der Schnittpunkte Q oder Q_1 der Polare BL_1 trifft, so bleibt sie auch in dieser Lage durch letztere und L harmonisch geteilt und beide Endpunkte müssen mit

Q zusammenfallen (4d), also sind LQ und LQ_1 Tangenten in Q und Q_1.

Ist $F'K_1'$ irgend eine andere Lage der Sehne FK_1 durch L, so müssen sich die Sehnenpaare FK_1' und $F'K_1$ sowie FF' und K_1K_1' (10) auf QQ_1 schneiden. Wenn $F'K_1'$ unendlich nahe an FK_1 liegt, so gehen die Geraden FF' und K_1K_1' in die Tangenten der Punkte F und K_1 über. Also:

a. *Die Polare eines Punktes der Leitlinie ist seine Berührungssehne.*

b. *Die Tangenten in den Endpunkten einer Sehne schneiden sich auf der Polare ihres Durchschnittspunktes mit der Leitlinie; von keinem Punkte lassen sich mehr als zwei Tangenten an den Kegelschnitt ziehen.*

250. Die Sehne FK_1 kann keinen weiteren Punkt mit dem Kegelschnitte gemein haben; denn wäre X ein solcher, so müfste auch FX durch L und QQ_1 harmonisch geteilt werden:

Keine Gerade hat mehr als zwei Punkte mit dem Kegelschnitte gemein.

251. Die Sehne FK_1 wird durch L und seine Polare

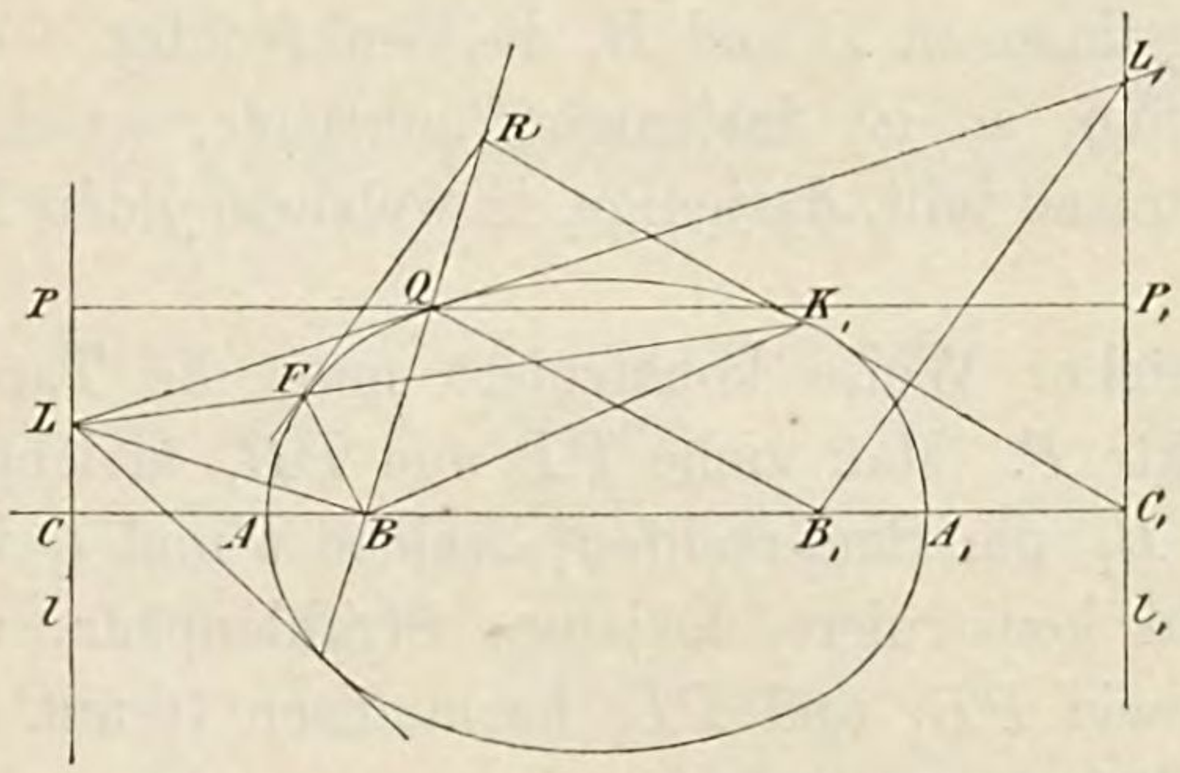


Fig. 88.

harmonisch geteilt, also sind $B(LQFK_1)$ harmonische Strahlen und da $BL \perp BQ$, so ist $\sphericalangle FBR = K_1BR$:

Verbindet man einen Brennpunkt mit den Berührungspunkten und dem Schnittpunkte zweier Tangenten, so halbiert die letzte Verbindungslinie den von den beiden ersten gebildeten Winkel.

252. Aus den Proportionen $QB : QP = QB_1 : QP_1$ folgt $QB : QB_1 = QP : QP_1 = QL : QL_1$ und da

$$\sphericalangle LBQ = L_1B_1Q = 90^0, \text{ so ist } \triangle BLQ \sim B_1L_1Q \text{ und}$$

$$\sphericalangle LQB = L_1QB_1$$

also: *Jede Tangente bildet mit den Brennpunktsstrahlen des Berührungspunktes gleiche Winkel.*

253. Aus der Proportion $QB : QP = QB_1 : QP_1$ folgt ferner $QB \pm QB_1 : QP \pm QP_1 = QB : QP$.

In gleicher Weise folgt aus $AB : AC = A_1B : A_1C$ die neue Proportion $AB \pm A_1B : AC \pm A_1C = AB : AC$.

Da $QP \pm QP_1 = PP_1 = CC_1 = AC \pm A_1C$ und $QB : QP = AB : AC$, so ist

$$QB \pm QB_1 = AB \pm A_1B = AA_1,$$

also: *Bei einer Ellipse ist die Summe, bei einer Hyperbel die Differenz der Brennpunktsstrahlen eines ihrer Punkte gleich der Hauptaxe.*

254. *Konstruktion der Schnittpunkte einer Geraden und der Tangenten eines Punktes.*

Um die Schnittpunkte einer Geraden g mit dem Kegelschnitte zu bestimmen, schneide man mit ihr die Leitlinien in L und L_1, verbinde L mit B und L_1 mit B_1, errichte auf den Verbindungslinien in B und B_1 die Senkrechten, welche g in J und J_1 treffen, so ist dasjenige Punktpaar, welches LJ und L_1J_1 harmonisch teilt, dasjenige, in welchem g den Kegelschnitt trifft.

In gleicher Weise konstruiert man die Tangenten von einem Punkte P. Man ziehe PB und PB_1, errichte auf ihnen in B und B_1 die Senkrechten, welche l und l_1 in L und L_1 treffen, und konstruiere dasjenige Strahlenpaar, welches PB und PL, sowie PB_1 und PL_1 harmonisch trennt.

255. *Polareigenschaften.*

Eine beliebige Gerade g schneide die Hauptaxe AA_1 in Q; man mache AA_1QQ_1 harmonisch, fälle von einem beliebigen Punkte P der Geraden g die Senkrechte PO auf AA_1, mache AA_1OO_1 harmonisch, $BR \perp BP$, dann ist

$$\triangle BCR \sim BOP, \text{ also } CR : CB = BO : PO$$

$$CR : Q_1S = O_1C : O_1Q_1$$

und aus ihnen durch Division I.) $1 : \frac{CB}{Q_1 S} = \frac{BO}{O_1 C} : \frac{PO}{O_1 Q_1}$.

Aus 4c. folgt $MA^2 = MB \cdot MC = MO \cdot MO_1 = MQ \cdot MQ_1$,

also $$MB : MO = MO_1 : MC$$
$$MQ : MO = MO_1 : MQ_1$$

hieraus $$MB - MO : MO_1 - MC = MB : MO_1$$
$$MQ - MO : MO_1 - MQ_1 = MQ : MO_1$$

oder $$OB : O_1 C = MB : MO_1$$
$$OQ : O_1 Q_1 = MQ : MO_1,$$

folglich auch durch Substitution in I.)

$$1 : \frac{CB}{Q_1 S} = \frac{MB}{MO_1} : \frac{PO}{QO} \cdot \frac{MQ}{MO_1}$$

oder $$\frac{CB}{Q_1 S} = \frac{PO}{QO} \cdot \frac{MQ}{MB}$$

und endlich $$Q_1 S = \frac{QO}{PO} \cdot \frac{MB}{MQ} \cdot CB$$

Die Verhältnisse $\frac{QO}{PO}$ und $\frac{MB}{MQ}$ sind konstant, also bleibt auch $Q_1 S$ für jeden Punkt P von g konstant.

Nimmt man statt B und l den anderen Brennpunkt

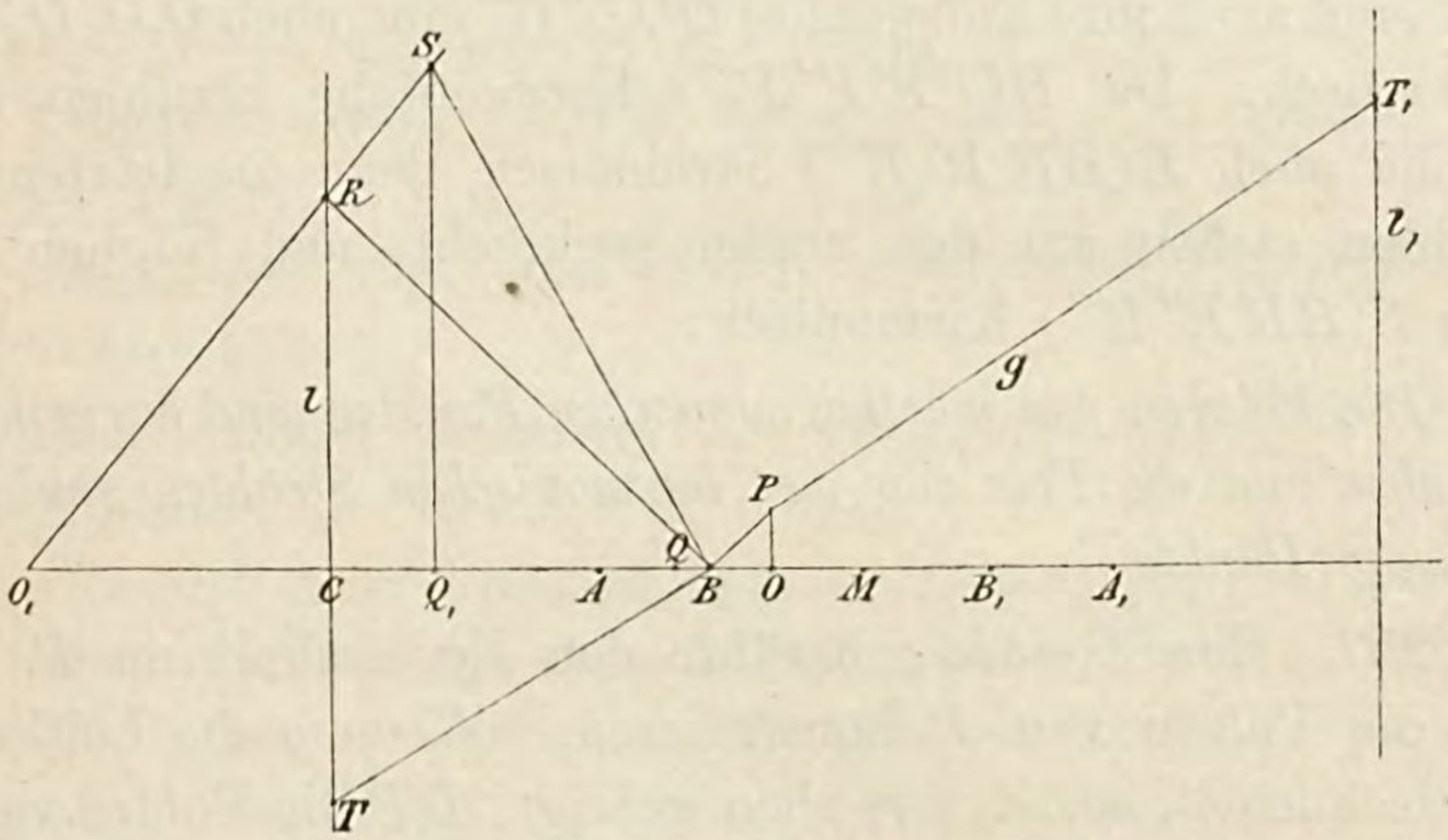


Fig. 89.

B_1 und dessen Leitlinie l_1, so bleibt doch $Q_1 S$ ungeändert, denn $MB_1 = MB$ und $C_1 B_1 = CB$, wenn $C_1 = (AA_1, l_1)$.

Die Gerade $O_1 R$, die in eindeutiger Weise aus dem Punkte P abgeleitet wird, nennt man die *Polare* von P und P ihren *Pol*.

Man konstruiert also die Polare eines Punktes P, indem man PO senkrecht auf die Hauptaxe fällt, diese durch OO_1 harmonisch teilt, darauf P mit dem Brennpunkte B verbindet, auf BP in B die Senkrechte errichtet und ihren Durchschnitt R mit der Leitlinie bestimmt; die Gerade O_1R ist die Polare von P. — Es ist leicht ersichtlich, wie man den Pol P von O_1R konstruiert.

Wenn g durch den Brennpunkt B geht, so fällt Q mit B, Q_1 mit C, S mit R zusammen, also liegt der Pol jeder Geraden, die durch einen Brennpunkt gezogen wird, auf der Leitlinie.

Fällt P mit T zusammen, also O mit C, O_1 mit B, so ist BS die Polare von T und mufs wegen der allgemeinen Konstruktion auf TB senkrecht stehen.

Hieraus aber folgt, dafs g die Polare von S ist und P der Pol von O_1S. Somit ist der Hauptsatz der Polarentheorie erwiesen:

Durchläuft ein Punkt eine Gerade, so dreht sich seine Polare um den Pol der Geraden und umgekehrt.

256. Auf g seien $PP'P''P'''$ vier harmonische Punkte, dann sind auch ihre Fufspunkte $OO'O''O'''$ und auch $O_1O_1'O_1''O_1'''$ harmonisch. Da $B(PP'P''P''')$ harmonische Strahlen sind, so sind auch $B(RR'R''R''')$ harmonisch, denn die letzten vier Strahlen stehen auf den ersten senkrecht, und folglich sind auch $S(RR'R''R''')$ harmonisch:

Die Polaren von vier harmonischen Punkten sind harmonische Strahlen und die Pole von vier harmonischen Strahlen sind harmonische Punkte.

257. Eine Gerade g berühre den Kegelschnitt in P, man soll die Polare von P konstruieren. Wenn g die Leitlinie l in R schneidet, so ist, wie eben gezeigt, BP die Polare von R, also mufs die Polare von P durch R gehen. In gleicher Weise folgt, dafs diese Polare auch durch R_1 geht, wenn man in B_1 auf PB_1 die Senkrechte errichtet und mit ihr die andere Leitlinie l_1 in R_1 schneidet. Also:

a. *Die Polare eines Kegelschnittpunktes ist die Tangente in ihm.*

Umkehrung: *Geht eine Gerade g durch ihren Pol P, so ist sie eine Tangente und ihr Pol ein Punkt des Kegelschnittes*

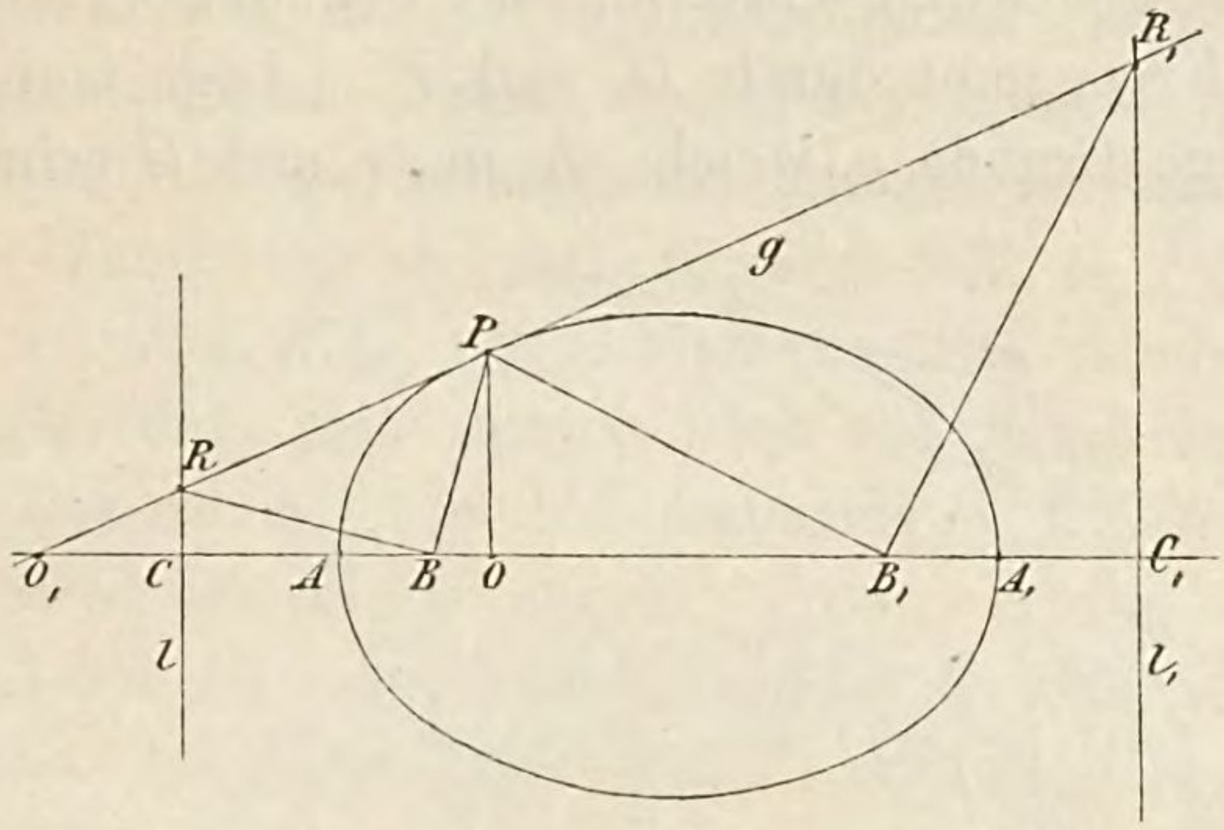


Fig. 90.

denn schneidet g die Leitlinie in R und R_1, so müssen sich die Senkrechten in R und R_1 auf BR und B_1R_1 in P treffen.

258. Sind PP' die Schnittpunkte einer Geraden g mit dem Kegelschnitte, ist Q ein beliebiger Punkt von g, q seine Polare und Q' ihr Schnittpunkt mit g, sind $QQ'PX$ harmonische Punkte und $qq'px$ ihre Polaren, so sind auch diese harmonische Strahlen. Da q durch Q', also q' durch Q und p durch P geht, so mufs auch x durch X gehen und es ist x die Tangente in X. Daher mufs X mit P' zusammenfallen und es folgt:

Jede Sehne eines Kegelschnittes wird durch Pol und Polare harmonisch geteilt.

259. *Andere Ableitung der Polareigenschaften der Ellipse und Hyperbel.*

Der Ort eines Punktes, der von einem festen Punkte B, dem Brennpunkte, und einem festen Kreise K', dem Leitkreise von B, gleiche Entfernungen hat, ist eine Ellipse oder Hyperbel. Sie heifst K. Sind D und E zwei Punkte von K, so berühren die mit DB und EB um D und E beschriebenen Kreise den Leitkreis K' in D' und E', die mit DB' und EB' je in einer Geraden liegen. Diese Punkte D' und E' heifsen, die *Bilder* von D und E; man erhält also das Bild X' eines Punktes X von K als Schnittpunkt von $B'X$ mit K' und den Leitkreis K' selbst als Bild von K.

Die Tangenten in D und E an K sind die Mittelsenkrechten von BD' und BE'; ihr Schnittpunkt F ist demnach von $D'E'B$ gleichweit entfernt und der um F mit FB beschriebene Kreis geht durch D' und E'. Legt man durch F eine beliebige Gerade g, welche K in G und H schneidet und

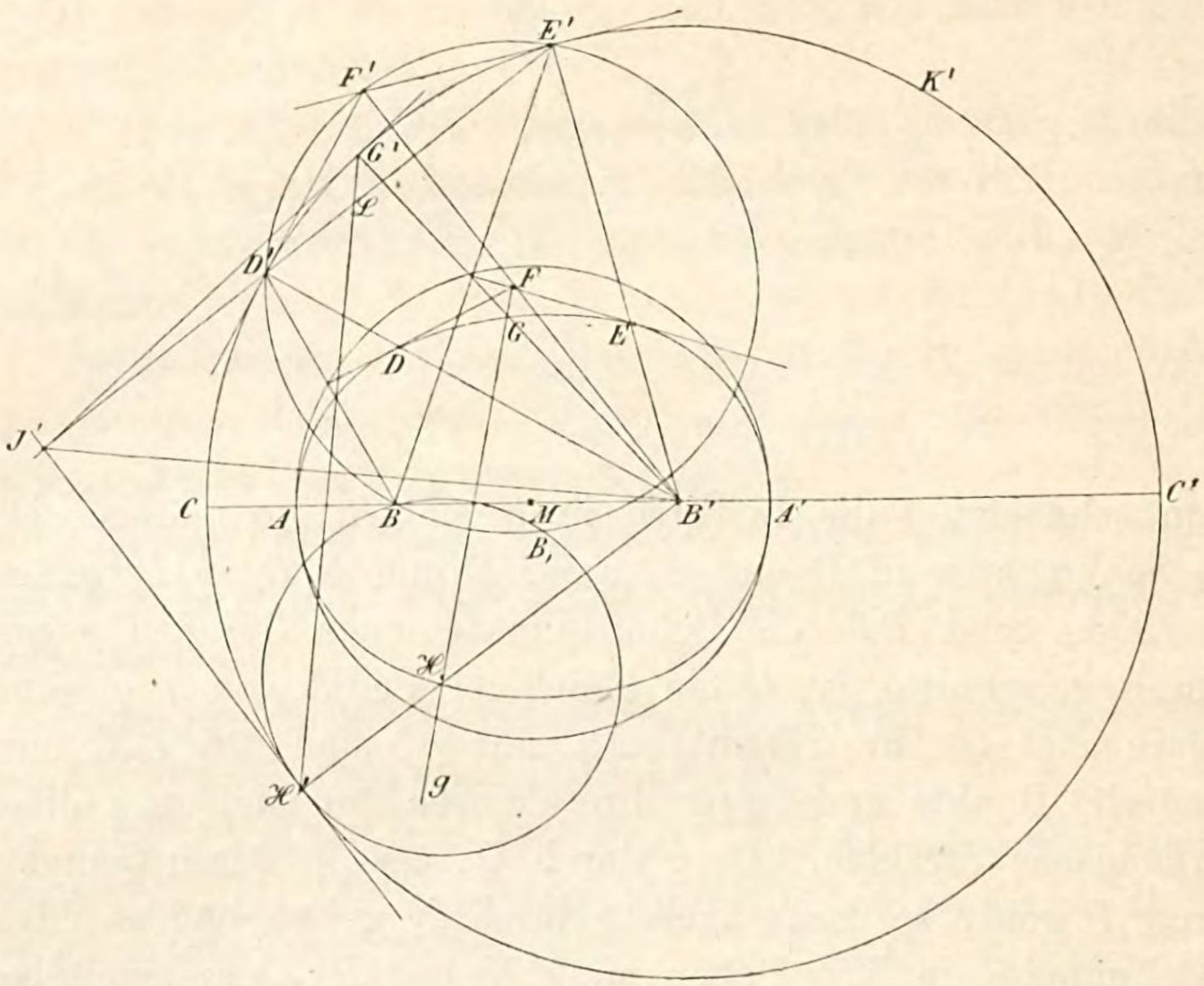


Fig. 91.

beschreibt um F, G, H mit FB, GB, HB Kreise, so gehören diese einem Büschel an, dessen zweiter Grundpunkt der Gegenpunkt B_1 von B in Bezug auf g ist. Die Punkte $D'E'$ sind aber durch $G'H'$ harmonisch getrennt. Denn die Tangenten in G' und H' und die Gerade $D'E'$ schneiden sich in einem Punkte J dem Potenzcentrum der Kreise $FGHK'$ und dem Pole von $G'H'$; es sind also $J'LD'E'$ harmonische Punkte und $G'(J'LD'E')$ harmonische Strahlen und $G'H'D'E'$ harmonische Punkte des Kreises K'. Dies giebt den Satz:

a. *Zieht man durch den Schnittpunkt zweier Tangenten eines Kegelschnittes eine Sehne so sind die Bilder ihrer Endpunkte durch diejenigen der Berührungspunkte harmonisch getrennt.*

Die Tangente in G an K schneide DE in J; zieht man von J die zweite Tangente JZ an K, so sind die Bilder $D'E'$

durch $G'Z'$, aber auch durch $G'H'$ harmonisch getrennt, also fällt Z' mit H' und Z mit H zusammen:

b. *Zieht man durch den Schnittpunkt zweier Tangenten eines Kegelschnitts eine Sehne, so treffen sich die Tangenten ihrer Endpunkte auf der Berührungssehne des ersten Punktes.*

260. Wenn man K und K' mit FB' in PQ und $P'Q'$ schneidet, so sind $P'Q'$, die Bilder von PQ, durch $D'E'$ harmonisch getrennt, also müssen sich die Tangenten in $D'E'$ in einem Punkte F' von FB' schneiden. Dieser Punkt F' *heifst das Bild von* F.

Man kann also zu jedem Punkte der Ebene sein Bild konstruieren. Ist F ein beliebiger Punkt, so ziehe man an K die Tangenten FD und FE, schneide den Leitkreis K' mit $B'D$ und $B'E$ in D' und E' und ziehe endlich in diesen Punkten die Tangenten an K', so ist ihr Schnittpunkt F' das Bild von F.

In G und H denke man sich an K die Tangenten konstruiert, sie mögen sich in J schneiden, dann ist J' das Bild von J; der letztere Punkt liegt auf DE. Man schliefst also:

Die Bilder aller Punkte, von denen sich Tangenten an K *ziehen lassen und die auf einer Geraden* l *liegen, welche* K *in* D *und* E *schneidet, liegen wieder auf einer Geraden* l', *welche* K' *in den Bildern* D' *und* E' *von* D *und* E *schneidet. Man nennt* l' *das Bild von* l.

261. Durch F lege man eine Gerade p, welche K in PQ trifft, schneide K mit JP und JQ in P_1 und Q_1, so müssen FP_1Q_1 in einer Geraden liegen. Sind nämlich $P'Q'P_1'Q_1'$ die Bilder von PQP_1Q_1, so liegen nach dem letzten Satze die Punkte $F'P'Q'$, $J'P'P_1'$, $J'Q'Q_1'$ je in einer Geraden, also müssen auch $F'P_1'Q_1'$ und deshalb FP_1Q_1 in einer Geraden liegen.

Der Schnittpunkt von PQ_1 und QP_1 sei R; man nenne R und FJ, F und RJ, J und FR *Pol und Polare* bezüglich K.

Die Gerade JR schneide PQ in U, dann sind $FUPQ$ harmonisch. Hält man PQ fest, läfst aber J die Gerade DE durchlaufen, so ändert sich auch R, aber so, dafs JR stets durch U geht, daher mufs R auf der Geraden JU liegen.

Rückt J nach D oder E, so thut dies auch R, also liegt R auf der Geraden DE und ebenso U. Die beliebige Sehne PQ wird also durch F und DE, durch Pol und Polare, harmonisch geteilt. In gleicher Weise folgt, dafs R auch auf GH liegt.

Die Geraden $P'Q_1'$ und $P_1'Q'$ mögen sich in R' schneiden; es sind dann $B'(GHFR)$ und $B'(G'H'F'R')$ harmonisch. Es fallen aber die Strahlenpaare $B'G$ und $B'G'$, $B'H$ und $B'H'$, $B'F$ und $B'F'$ zusammen, also auch $B'R$ und $B'R'$. Folglich liegen die Punkte $B'RR'$ in einer Geraden; man nennt R' *das Bild von* R. *Hierdurch sind auch die innerhalb* K *liegenden Punkte abgebildet, von denen sich Tangenten nicht ziehen lassen.*

Hieraus folgt: *Liegen auf einer Geraden* l, *welche* K *schneidet, vier harmonische Punkte, so sind ihre Bilder auch vier harmonische Punkte auf dem Bilde* l' *der Geraden* l.

262. Die Sehnen QP_1 und PQ_1 werden durch R und FJ, wie sich aus den Eigenschaften des vollständigen Vierseits ergiebt, harmonisch geteilt. Da R fest bleibt, als Schnittpunkt von DE und GH, auch wenn P sich ändert, so folgt:

Jede Sehne von K *wird durch einen auf ihr, innerhalb* K, *liegenden Punkt und seine Polare harmonisch geteilt.*

263. Die Bilder aller Punkte der Geraden FJ müssen also auf $F'J'$ liegen; *das Bild einer Geraden, welche* K *nicht schneidet, ist somit wieder eine Gerade.*

Ganz allgemein gelten also die Sätze:

Die Bilder aller Punkte einer Geraden liegen wieder auf einer Geraden, dem Bilde der ersten; die Bilder aller Geraden durch einen Punkt schneiden sich im Bilde des Punktes; die Bilder von vier harmonischen Elementen sind wieder harmonisch diejenigen von Pol und Polare auch Pol und Polare.

Hieraus folgen für den Kegelschnitt K, sofern man sie als bewiesen für den Kreis annimmt,

1. *Die Polareigenschaften,*
2. *Die Sätze von Pascal und Brianchon.*

264. *Dritte Ableitung der Polareigenschaften.*

Eine andere einfache Methode zur Ableitung der Polareigenschaften beruht auf der oben mitgeteilten Konstruktion der Tangenten von einem Punkte an einen Kegelschnitt K.

(233) Letzterer sei gegeben durch den Scheitelkreis M und die Brennpunkte BB'. Man beschreibe über BC als Durchmesser einen Kreis γ, welcher den Scheitelkreis M in $C_1 C_2$ schneidet; die gemeinschaftliche Sehne $C_1 C_2$ ist die Potenzlinie der Kreise M und γ; ihr Pol C' in Bezug auf M heifse das *Bild von* B.

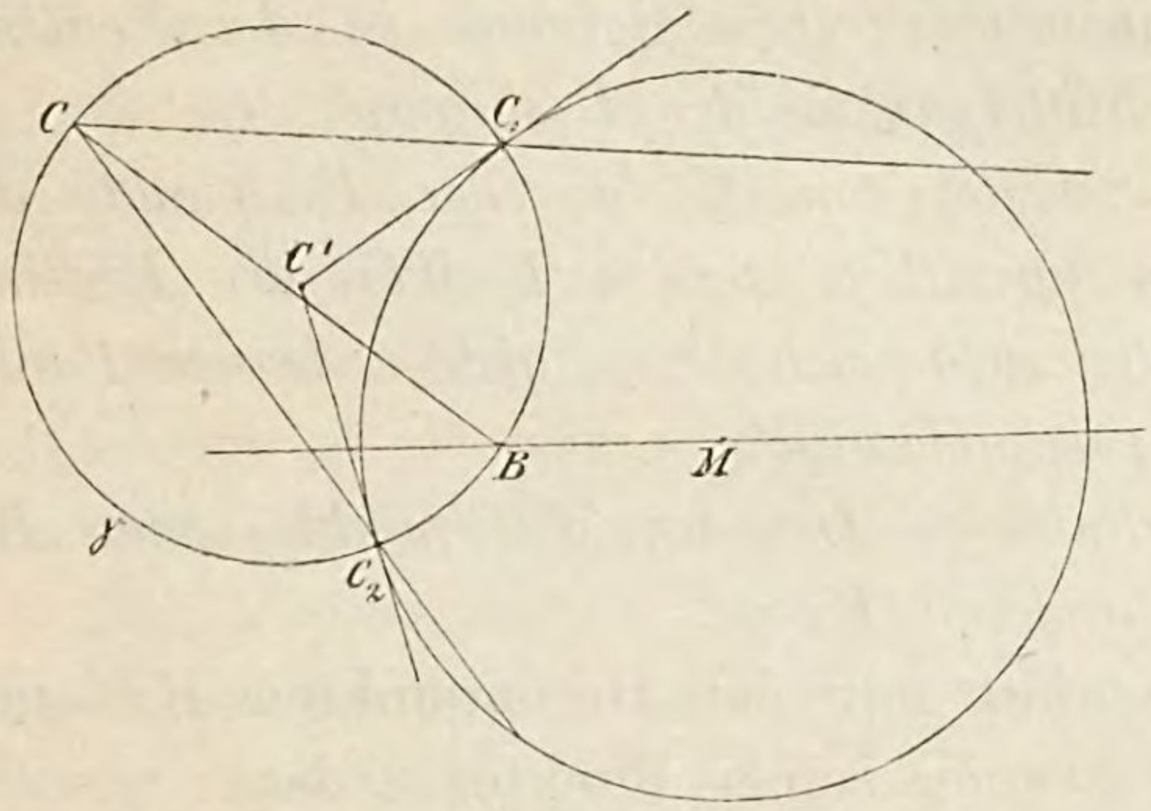


Fig. 92.

Liegt C innerhalb des Kegeschnittes K, so schneidet der Kreis γ zwar den Scheitelkreis M nicht, aber die Potenzlinie bleibt reell und ihr Pol C' bezüglich M heifst auch in diesem Falle das Bild von C.

Wenn C auf K liegt, so berührt der Kreis γ den Scheitelkreis in C'; dieser Berührungspunkt ist somit das Bild von C. Also:

Das Bild von K ist der Scheitelkreis M.

Der Punkt C bewege sich auf einer Geraden g; die Kreise γ durchlaufen ein Kreisbüschel, dessen Grundpunkte B und der Gegenpunkt B_1 von B bezüglich g sind. Daher laufen die Potenzlinien der Kreise dieses Büschels und des Kreises M durch einen Punkt G' und die Pole dieser Potenzlinien bezüglich des Kreises M, d. i. die Bilder der Punkte C, liegen auf der Polare g' von G' bezüglich M. *Man nennt g' das Bild von g.*

Auf g seien $CDEF$ vier harmonische Punkte, also $B(CDEF)$ vier harmonische Strahlen. Die Mitten $\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{E}\mathfrak{F}$ der Strecken BC, BD, BE, BF, also die Mittelpunkte der über ihnen beschriebenen Kreise γ, δ, ε, φ liegen auf einer Geraden, der Centrale des Büschels $(\gamma\delta\varepsilon\varphi)$ und sind harmonisch, daher sind auch $M(\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{E}\mathfrak{F})$ harmonische Strahlen. Diese stehen auf den vier Potenzlinien der Kreise $\gamma\delta\varepsilon\varphi$ mit dem Kreise M senkrecht, also sind auch diese Potenzlinien harmonische Strahlen und ihre Pole $C'D'E'F'$ bezüglich M harmonische Punkte. Es folgt:

Die Bilder von vier harmonischen Punkten oder Strahlen sind wieder harmonisch,

Aus diesem Satze aber ergeben sich die Polareigenschaften und die Sätze von Pascal und Brianchon.

Das Bild der unendlich fernen Geraden ist die Leitlinie von B, das Bild des Mittelpunktes der Brennpunkt B.

Die Bilder der Scheitel von K, die der Endpunkte der grofsen Axe, und des unendlich fernen Punktes der Leitlinie fallen mit diesen Punkten zusammen; sonst giebt es keinen Punkt, der mit seinem Bilde zusammenfällt.

265. *Der Kegelschnitt als Ort des Mittelpunktes eines Berührungskreises zweier anderen Kreise.*

Ist $\mathfrak{K}$ ein Kegelschnitt mit den Brennpunkten BB' und der Hauptaxe $2a$, ist $\mathfrak{C}$ einer seiner Punkte, so ist

$$\mathfrak{C}B + \mathfrak{C}B' = 2a.$$

Beschreibt man um $\mathfrak{C}$ irgend einen Kreis γ und um B und B'

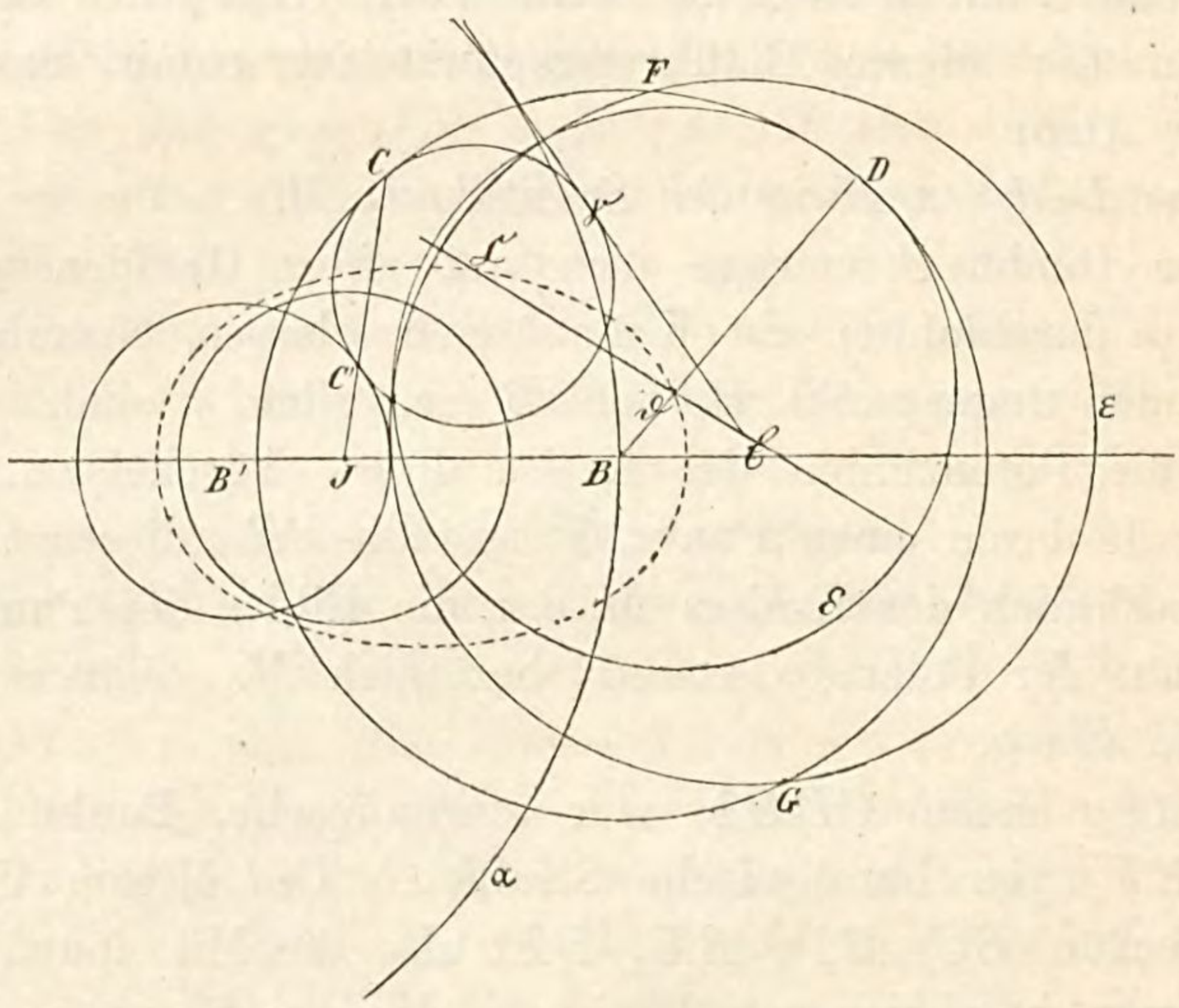


Fig. 93.

zwei Kreise, die ihn in C und C' berühren, so ist $BC - C\mathfrak{C} + B'C' + C'\mathfrak{C} = 2a$, da $C\mathfrak{C} = C'\mathfrak{C}$, also:

Jeder Kegelschnitt ist der Ort des Mittelpunktes eines Berührungskreises zweier festen Kreise; die Mittelpunkte der letzteren sind die Brennpunkte.

266. Um einen anderen Punkt $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{K}$ beschreibe man auch denjenigen Kreis δ, welcher die beiden Kreise B und B' berührt; die Berührungspunkte seien D nnd D'. *Man nennt C und D die Bilder von $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$.* Demnach erhält man das Bild eines Punktes $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{K}$, wenn man B mit $\mathfrak{D}$ verbindet und die Verbindungslinie über $\mathfrak{D}$ hinaus bis zum Durchschnitte mit dem Kreise B verlängert.

Die Verbindungslinie CC' treffe die Hauptaxe in J, dann ist J ein Ähnlichkeitspunkt der Kreise B und B', 54a; der Potenzkreis um J schneidet also die Berührungskreise γ und δ rechtwinklig und daraus ergiebt sich:

Der Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ ist der Ort des Mittelpunktes eines Kreises, welcher einen von zwei festen Kreisen berührt und einen anderen rechtwinklig schneidet.

267. Auf der Geraden $\mathfrak{CD}$, die mit $\mathfrak{g}$ bezeichnet werden soll, sei $\mathfrak{E}$ ein beliebiger Punkt, so läfst sich um ihn ein Kreis ε beschreiben, welcher dem durch γ und δ bestimmten Büschel angehört, also auch den Potenzkreis J rechtwinklig schneidet. Er treffe den Kreis B' in den Punkten FG, so sind diese durch CD harmonisch getrennt (36. 37.). Durch $\mathfrak{E}$ ziehe man eine beliebige Gerade $\mathfrak{g}_1$, welche $\mathfrak{K}$ in $\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1$ schneiden mag; die Bilder C_1D_1 dieser Punkte werden auch durch FG harmonisch getrennt. Dreht sich $\mathfrak{g}$ um $\mathfrak{E}$ und wird Tangente an $\mathfrak{K}$ in $\mathfrak{F}$, dessen Bild H sein mag, so wird H auch durch FG harmonisch getrennt, es mufs also H mit einem der Punkte FG, etwa mit F, zusammenfallen. In gleicher Weise folgt, dafs G das Bild des Berührungspunktes $\mathfrak{G}$ der zweiten von $\mathfrak{E}$ an $\mathfrak{K}$ gezogenen Tangente ist. Die Geraden CD, C_1D_1, ... schneiden sich in einem Punkte E, dem Pole der Geraden FG in Bezug auf den Kreis B, weil je zwei Punkte, wie C und D, C_1 und D_1, ... durch F und G harmonisch getrennt werden. *Man nennt E das Bild von $\mathfrak{E}$.*

Unmittelbar folgt: *Zieht man durch einen Punkt $\mathfrak{E}$ an $\mathfrak{K}$ die Tangenten $\mathfrak{EF}$ und $\mathfrak{EG}$ und eine Sekante $\mathfrak{ECD}$, so werden die Bilder FG der Berührungspunkte durch diejenigen CD der Schnittpunkte harmonisch getrennt.*

Da die Tangenten in F und G an den Kreis B sich auf der Geraden CD schneiden müssen, so vertauschen die Punkte

CD ihre Bedeutung mit den Punkten FG, also auch $\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ die ihrige mit $\mathfrak{F}\mathfrak{G}$, woraus sich ergiebt:

Die Tangenten in den Punkten $\mathfrak{C}$ *und* $\mathfrak{D}$ *schneiden sich auf* $\mathfrak{F}\mathfrak{G}$.

268. Der Punkt $\mathfrak{E}_1$ liege innerhalb des Kegelschnittes $\mathfrak{K}$ auf $\mathfrak{C}\mathfrak{D}$; auch um ihn läfst sich ein Kreis ε_1 beschreiben, der dem von γ und δ bestimmten Büschel angehört. Dieser Kreis schneidet den Kreis B nicht, aber seine Potenzlinie p mit B geht durch den Schnittpunkt S der Tangenten in C und D an den Kreis B, weil diese die Potenzlinien des Kreises B und der Kreise γ und δ sind. Dreht sich nun die Gerade $\mathfrak{g}$ und kommt in eine Lage $\mathfrak{g}'$, in welcher sie $\mathfrak{K}$ in $\mathfrak{C}'\mathfrak{D}'$ schneidet, und sind $C'D'$ die Bilder dieser Punkte auf dem Kreise B, so müssen auch die Tangenten in C' und D' sich in einem Punkte S' von p schneiden. Da S und S' die Pole von CD und $C'D'$ in Bezug auf den Kreis B sind, so müssen CD und $C'D'$ sich im Pole E_1 von p schneiden. *Es soll* E_1 *das Bild von* $\mathfrak{E}_1$ *heifsen.*

Um also das Bild E eines Punktes $\mathfrak{E}$ zu finden, ziehe man durch $\mathfrak{E}$ eine Sekante von $\mathfrak{K}$, welche diesen Kegelschnitt in $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ schneidet, konstruiere um $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ die Kreise γ und δ, welche B und B' in C und D berühren, konstruiere um $\mathfrak{E}$ denjenigen Kreis ε, welcher dem Büschel $(\gamma\delta)$ angehört, seine Potenzlinie p mit dem Kreise B und endlich den Pol E von p bezüglich dieses Kreises.

269. Wenn der Punkt $\mathfrak{E}$ die Gerade $\mathfrak{g}$ durchläuft so durchläuft der Kreis ε das Büschel $(\gamma\delta)$, seine Potenzlinie p mit dem Kreis B dreht sich also um einen Punkt der Potenzlinie des Büschels $(\gamma\delta)$ und der Pol E dieser Potenzlinie, das Bild von $\mathfrak{E}$, durchläuft die Polare g von E in Bezug auf den Kreis B. *Man nennt* g *das Bild von* $\mathfrak{g}$.

Man erhält nun leicht die Sätze:

a. *Durchläuft ein Punkt* $\mathfrak{E}$ *eine Gerade* $\mathfrak{g}$, *so durchläuft sein Bild* E *eine andere Gerade* g, *das Bild von* $\mathfrak{g}$ — *und dreht sich eine Gerade* $\mathfrak{g}$ *um einen Punkt* $\mathfrak{E}$, *so dreht sich ihr Bild* g *um das Bild* E *von* $\mathfrak{E}$.

Sind $\mathfrak{E}\mathfrak{E}_1\mathfrak{E}_2\mathfrak{E}_3$ vier harmonische Punkte von g, so sind

die Potenzlinien $pp_1p_2p_3$ harmonische Strahlen und ihre Pole $EE_1E_2E_3$ harmonische Punkte, also:

b. *Die Bilder von vier harmonischen Punkten sind wieder harmonisch.*

Vier harmonische Strahlen $\mathfrak{g}\mathfrak{g}_1\mathfrak{g}_2\mathfrak{g}_3$ schneide man mit einer Geraden in vier harmonischen Punkten $\mathfrak{E}\mathfrak{E}_1\mathfrak{E}_2\mathfrak{E}_3$. Durch die vier harmonischen Bilder der letzteren, $EE_1E_2E_3$, gehen die vier Bilder $gg_1g_2g_3$ von $\mathfrak{g}\mathfrak{g}_1\mathfrak{g}_2\mathfrak{g}_3$ und sind demnach auch harmonisch:

c. *Die Bilder von vier harmonischen Strahlen sind auch harmonisch.*

270. *Vierte Ableitung der Polareigenschaften.*

Durch 265—269 ergeben sich die Polareigenschaften und die Sätze von Pascal und Brianchon für den Kegelschnitt aus den entsprechenden vom Kreise und zwar für jede Art des Kegelschnittes. Denn läfst man B' ins Unendliche rücken, so wird der Kreis B' eine Gerade und der Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ eine Parabel.

271. *Die Polarisationsfigur eines Kegelschnittes.*

In engem Zusammenhange mit der eben besprochenen Abbildung steht der folgende Satz:

Die Polarisationsfigur eines Kegelschnittes in Bezug auf irgend einen Kreis um einen Brennpunkt ist ein Kreis. Cf. 175.

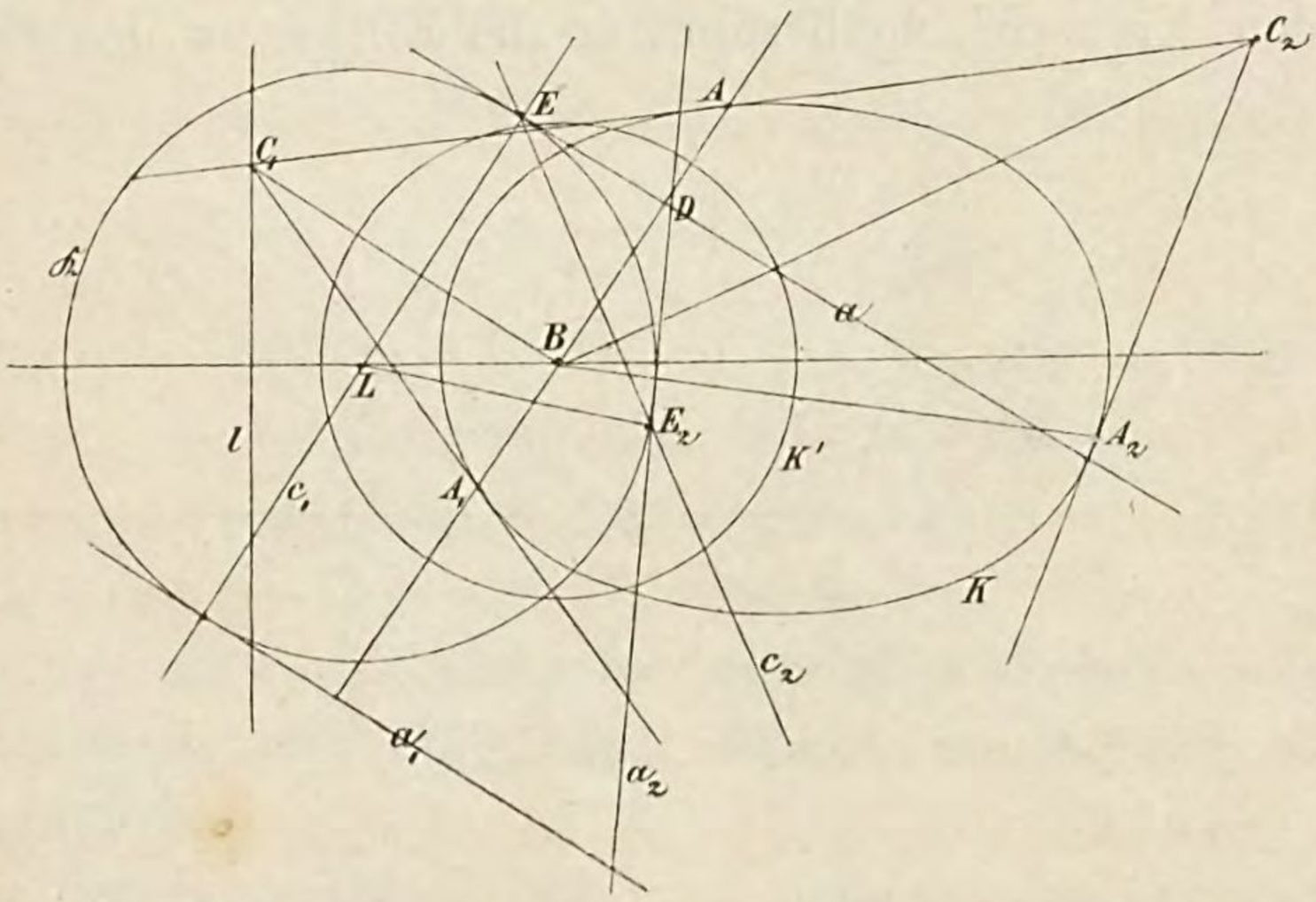


Fig. 94.

Um den Brennpunkt B des Kegelschnittes K beschreibe man einen Kreis K'. Es sei AA_1 eine Brennpunktssehne,

A_2 irgend ein Punkt von K, C_1 der Schnittpunkt der Tangenten in A und A_1, C_2 derjenige der Tangenten in A und A_2; die Polaren der Punkte $A A_1 A_2 C_1 C_2$ in Bezug auf den Kreis K' seien $a a_1 a_2 c_1 c_2$. Da $\sphericalangle A B C_1 = A_1 B C_1 = 90^0$ ist, so ist auch $\sphericalangle (c_1 a) = (c_1 a_1) = 90^0$; da ferner $\sphericalangle A B C_2 = A_2 B C_2$ ist, so ist auch $\sphericalangle (c_2 a) = (c_2 a_2)$. Dreht sich $A A_1$ um B, so durchläuft C_1 die Leitlinie l, also dreht sich c_1 um einen festen Punkt L, den Pol von l in Bezug auf den Kreis K'. Die Geraden $a a_1 a_2$ werden Tangenten der Polarisationsfigur $\mathfrak{K}$; diese hat also die Eigenschaft, dafs die Tangenten in den Endpunkten jeder durch L gelegten Sehne auf dieser Sehne senkrecht stehen, denn die Schnittpunkte von a und c_1, sowie a_1 und c_1 sind die Pole der Tangenten $A C_1$ und $A_1 C_1$, also Punkte von $\mathfrak{K}$. Die Polare c_2 schneidet $\mathfrak{K}$ in den Berührungspunkten mit den Tangenten a und a_2, also bildet jede Sehne der Polarisationsfigur gleiche Winkel mit den Tangenten in ihren Endpunkten. Also ist $\mathfrak{K}$ ein Kreis mit dem Mittelpunkte L. Denn sind D_1 E_1 E_2 die Schnittpunkte von a und a_2, a und c_2, a_2 und c_2, so ist $\sphericalangle D E E_2 = D E_2 E$ und da $L E \perp a$, $L E_2 \perp a_2$ auch $\sphericalangle L E E_2 = L E_2 E$, also $L E = L E_2$.

272. *Der Scheitelkreis.*

Ueber der Hauptaxe $A A_1$ einer Ellipse K beschreibe man den Kreis K', so berührt er die Ellipse in den Scheiteln

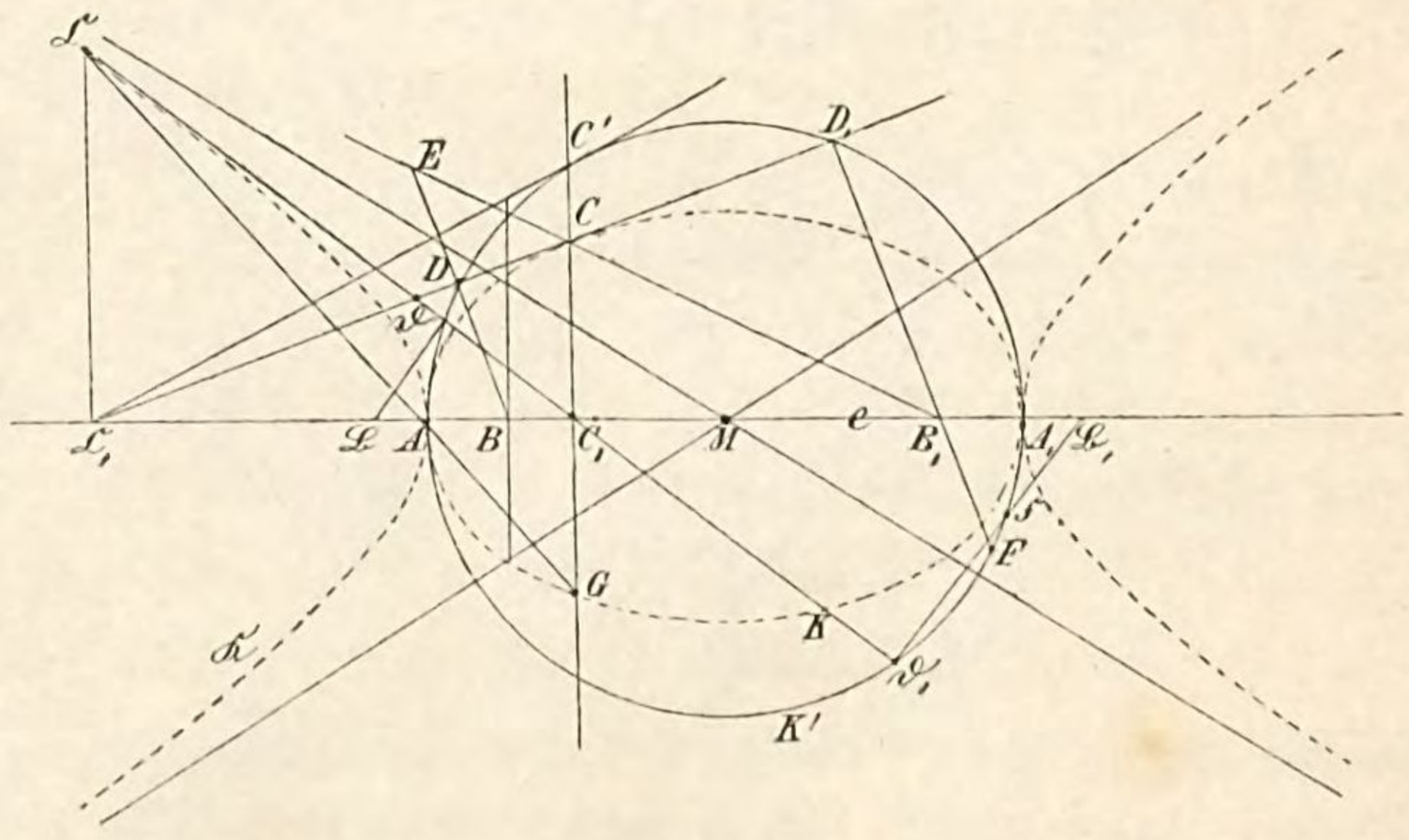


Fig. 95.

$A A_1$ und heifst daher der Scheitelkreis. Auf ihm liegen die Fufspunkte der Senkrechten, die man aus den Brennpunkten

BB_1 auf die Tangenten fällt. Eine Tangente berühre K in C, schneide K' in DD_1 und die Hauptaxe in $\mathfrak{C}_1$. Verlängert man BD und B_1C bis zum Durchschnitte E, so ist $BD = DE$ (3) also sind $C\mathfrak{C}_1DD_1$ harmonisch.

Ist $\mathfrak{K}$ eine Hyperbel mit derselben Hauptaxe AA_1, so hat sie denselben Scheitelkreis K'; eine Hyperbeltangente in $\mathfrak{C}$ treffe die Hauptaxe in C_1 und den Scheitelkreis in $\mathfrak{D}\mathfrak{D}_1$, so sind auch $\mathfrak{C}C_1\mathfrak{D}\mathfrak{D}_1$ harmonisch:

a. *Die Strecke einer Kegelschnitttangente zwischen dem Berührungspunkte und der Hauptaxe wird durch den Scheitelkreis harmonisch geteilt.*

Die Senkrechte CC_1 auf die Hauptaxe treffe den Scheitelkreis in C'; da CC_1 die Polare von $\mathfrak{C}_1$ bezüglich K' ist (12), so ist $C'\mathfrak{C}_1$ Tangente von K'.

Bei der Hyperbel ziehe man $\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$ senkrecht auf die Hauptaxe und die Tangente $\mathfrak{C}_1C'$ an K', so steht $C'C$ auf der Hauptaxe senkrecht.

Aus ähnlichen Dreiecken folgt:

$$\mathfrak{C}_1D : BD = \mathfrak{C}_1C_1 : CC_1$$
$$\mathfrak{C}_1D_1 : B_1D_1 = \mathfrak{C}_1C_1 : CC_1$$

und hieraus durch Zusammensetzen

$$\mathfrak{C}_1D \,.\, \mathfrak{C}_1D_1 : BD \,.\, B_1D_1 = \mathfrak{C}_1C_1^{\,2} : CC_1^{\,2}.$$

Aber $$\mathfrak{C}_1D \,.\, \mathfrak{C}_1D_1 = C'\mathfrak{C}_1^{\,2}$$

$$BD \,.\, B_1D_1 = B_1D_1 \,.\, B_1F = AB_1 \,.\, A_1B_1 = (a + e)\,(a - e)$$
$$= a^2 - e^2 = b^2$$

also: $$C'\mathfrak{C}_1 : b = \mathfrak{C}_1C_1 : CC_1.$$

Aus den ähnlichen Dreiecken $\mathfrak{C}_1C_1C'$ und $\mathfrak{C}_1C'M$ folgt

$$C'\mathfrak{C}_1 : \mathfrak{C}_1C_1 = C'M : C'C_1 = a : C'C_1,$$

also: $$a : C'C_1 = b : CC_1,$$

oder $$C'C_1 : CC_1 = a : b,$$ d. h.

b. *Auf jeder zur Hauptaxe senkrechten Geraden schneiden der Scheitelkreis und die Ellipse Sehnen ab, die sich wie die Axen verhalten.*

Bei der Hyperbel $\mathfrak{K}$ hat man zunächst die Proportionen

$$C_1\mathfrak{D} : \mathfrak{B}\mathfrak{D} = C_1\mathfrak{C}_1 : \mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$$
$$C_1\mathfrak{D}_1 : \mathfrak{B}_1\mathfrak{D}_1 = C_1\mathfrak{C}_1 : \mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$$

und $$C_1\mathfrak{D} \,.\, C_1\mathfrak{D}_1 : \mathfrak{B}\mathfrak{D} \,.\, \mathfrak{B}_1\mathfrak{D}_1 = C_1\mathfrak{C}_1^{\,2} : \mathfrak{C}\mathfrak{C}_1^{\,2}$$

Es ist aber $C_1\mathfrak{D}.C_1\mathfrak{D}_1 = C'C_1^2$

$\mathfrak{B}\mathfrak{D}.\mathfrak{B}_1\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{B}_1\mathfrak{F}.\mathfrak{B}_1\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{B}_1A.\mathfrak{B}_1A_1 = (\mathfrak{e}+a)(\mathfrak{e}-a) = \mathfrak{e}^2 - a^2 = b^2$,

wenn man die Excentricität $\mathfrak{B}_1M = \mathfrak{e}$ setzt; also:

$$C'\mathfrak{C}_1 : \quad b \quad = C_1\mathfrak{C}_1 : \mathfrak{C}\mathfrak{C}_1.$$

Aber $C'C_1 : C_1\mathfrak{C}_1 = C'M : C'\mathfrak{C}_1 = a : C'\mathfrak{C}_1$

und daher $a \quad : C'\mathfrak{C}_1 = \quad b \quad : \mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$

oder $C'\mathfrak{C}_1 : \mathfrak{C}\mathfrak{C}_1 = \quad a \quad : b$, d. h.

c. *Zieht man von einem Punkte der Hauptaxe einer Hyperbel die Tangente an den Scheitelkreis und die halbe senkrechte Hyperbelsehne, so verhalten sich diese Geraden wie die Hauptaxe zur Nebenaxe.*

Beide Sätze gestatten die Umkehrung:

d. *Fällt man aus den Punkten eines Kreises Senkrechte auf einen Durchmesser und teilt dieselben in einem bestimmten Verhältnisse, so liegen die Teilpunkte auf einer Ellipse.*

Zieht man in den Punkten eines Kreises Tangenten bis zu ihrem Durchschnitte mit einem Durchmesser und errichtet in den Durchschnittspunkten Senkrechte, welche zu den Tangenten in einem bestimmten Verhältnisse stehen, so liegen die Endpunkte auf einer Hyperbel.

273. Ist C ein beliebiger Punkt der Ellipse K und $CG \perp AA_1$, so mache man $AA_1C_1\mathfrak{C}_1$ harmonisch, errichte in $\mathfrak{C}_1$ die Senkrechte und schneide sie mit GA in $\mathfrak{C}$, dann ist

$$MC_1 . M\mathfrak{C}_1 = MA^2 \text{ oder } MA : MC_1 = M\mathfrak{C}_1 : MA.$$

Hieraus

$$MA - MC_1 : M\mathfrak{C}_1 - MA = MC_1 : MA$$

oder $AC_1 : A\mathfrak{C}_1 = MC_1 : MC' = C'C_1 : C'\mathfrak{C}_1$.

Aber $AC_1 : A\mathfrak{C}_1 = C_1G : \mathfrak{C}\mathfrak{C}_1 = C_1C : \mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$,

also $C_1C : \mathfrak{C}\mathfrak{C}_1 = C'C_1 : C'\mathfrak{C}_1$

oder $C'\mathfrak{C}_1 : \mathfrak{C}\mathfrak{C}_1 = C'C_1 : C_1C = a : b$.

Wenn also C die Ellipse K durchläuft, so bewegt sich $\mathfrak{C}$ auf einer Hyperbel $\mathfrak{K}$ und umgekehrt. Beide Kegelschnitte haben demnach dieselben Axen. Degeneriert K in den Scheitelkreis K', so degeneriert $\mathfrak{K}$ in die gleichseitige Hyperbel $\mathfrak{K}'$, die hierdurch in eine einfache Beziehung zum Kreise gesetzt ist.

Um aus der entwickelten Eigenschaft der Ellipse weitere Folgerungen zu ziehen, *nenne man C das elliptische Bild von C′ und 𝔖 das hyperbolische Bild von C′.*

274. Ist nun P' ein beliebiger Punkt der Ebene, $P'P_1 : PP_1 = a : b$, PP_1 senkrecht zu AA_1, P_2 der Gegenpunkt von P in Bezug auf AA_1, ist ferner $AA_1P_1\mathfrak{P}_1$ harmonisch, so errichte man in $\mathfrak{P}_1$ die Senkrechte und schneide sie mit P_2A in $\mathfrak{P}$, *dann nennt man P das elliptische Bild von P′ und* $\mathfrak{P}$ *das hyperbolische Bild desselben Punktes.*

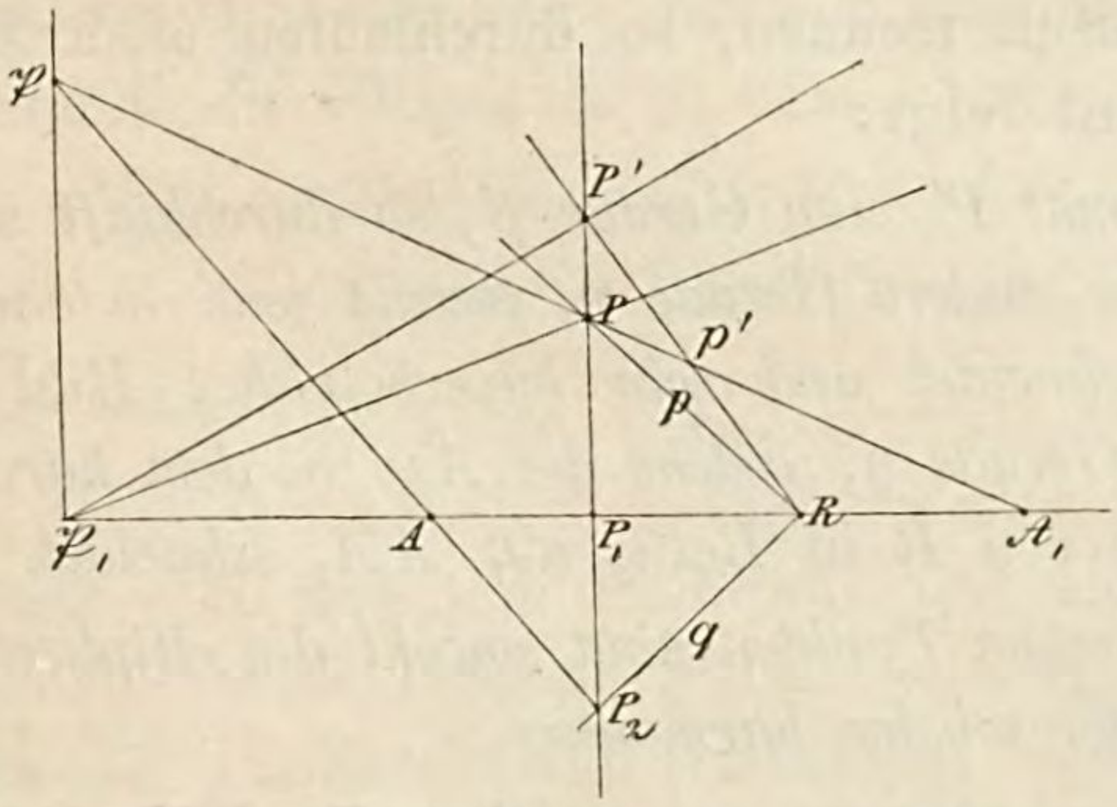


Fig. 96.

Dadurch aber ist zwischen den Punkten jeder Halbebene eine doppelte Beziehung hergestellt, welche der Kürze wegen *elliptische und hyperbolische Abbildung* genannt werden soll.

Man erhält den Punkt $\mathfrak{P}$ auch als Durchschnitt mit der Geraden A_1P.

Der Punkt P' durchlaufe eine Gerade p', dann durchläuft sein elliptisches Bild P eine Gerade p, welche die andere p' in einem Punkte R von AA_1 schneidet. Sind $RP'T'S'$ vier harmonische Punkte von p', so sind die elliptischen Bilder $RPTS$ auch harmonisch und ebenfalls die Gegenpunkte $RP_2T_2S_2$. Daher sind auch harmonisch die Strahlenbüschel $A\,(RP_2T_2S_2)$ und $A_1\,(RPTS)$. Diese haben einen Strahl AR gemeinsam, also schneiden sich die anderen Strahlenpaare in drei Punkten $\mathfrak{P}\mathfrak{T}\mathfrak{S}$ einer Geraden. Diese Punkte sind aber nach der Konstruktion die hyperbolischen Bilder von PTS. Macht man noch $AA_1R\mathfrak{R}$ harmonisch, so ist auch $\mathfrak{R}$ das hyperbolische Bild von R.

Konstruiert man zu den Fufspunkten $RP_1T_1S_1$ der von $RPTS$ auf AA_1 herabgelassenen Senkrechten in Bezug auf AA_1 die zugeordneten harmonischen Punkte $\mathfrak{R}\mathfrak{P}_1\mathfrak{T}_1\mathfrak{S}_1$ und

errichtet in ihnen die Senkrechten $\mathfrak{r}\mathfrak{p}_1\mathfrak{t}_1\mathfrak{s}_1$, so sind diese auch harmonisch. Man findet nun die hyperbolischen Bilder $\mathfrak{R}\mathfrak{P}\mathfrak{T}\mathfrak{S}$ auch als Durchschnitte von $A\,(RP_2T_2S_2)$ mit $\mathfrak{r}\mathfrak{p}_1\mathfrak{t}_1\mathfrak{s}_1$ und es liegen also $\mathfrak{R}\mathfrak{P}\mathfrak{T}\mathfrak{S}$ auf einer durch $\mathfrak{R}$ gehenden Geraden und sind harmonische Punkte.

Hält man P fest, läfst aber TS sich so verändern, dafs sie stets PR harmonisch trennen, so durchlaufen auch $\mathfrak{T}\mathfrak{S}$ die Gerade $\mathfrak{P}\mathfrak{R}$. Somit folgt:

Durchläuft ein Punkt P' eine Gerade p', so durchläuft sein elliptisches Bild P eine andere Gerade p, welche jene in einem Punkte R der Axe schneidet und sein hyperbolisches Bild $\mathfrak{P}$ durchläuft eine dritte Gerade $\mathfrak{p}$, welche die Axe in dem harmonischen Gegenpunkte $\mathfrak{R}$ von R in Bezug auf AA_1 schneidet.

Von vier harmonischen Punkten sind sowohl die elliptischen wie hyperbolischen Bilder wieder harmonisch.

Diejenige Gerade p oder $\mathfrak{p}$, auf welcher die Bilder aller Punkte einer anderen Geraden p' liegen, nennt man das Bild der letzteren. Unmittelbar folgt:

Dreht sich eine Gerade um einen Punkt, so dreht sich ihr Bild um das Bild des Punktes.

Die Bilder von vier harmonischen Geraden sind wieder harmonisch.

275. *Fünfte Ableitung der Polareigenschaften.*

Aus diesen Sätzen folgen wieder die Polareigenschaften und die Sätze von Pascal und Brianchon für Ellipse und Hyperbel aus den entsprechenden für den Kreis.

276. *Gleichung der Ellipse.*

Ist C ein variabler Punkt (Fig. 95) von K, $C_1M = x$, $CC_1 = y$, so ist $CC_1 : C'C_1 = b : a$. Aber $C'C_1{}^2 = a^2 - x^2$, also

$$y^2 : a^2 - x^2 = b^2 : a^2$$

und

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

277. *Gleichung der Hyperbel.*

Ist (Fig. 95) $\mathfrak{C}$ ein beliebiger Hyperbelpunkt, $\mathfrak{C}_1M = x$, $\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1 = y$, so ist

$$\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1 : C'\mathfrak{C}_1 = b : a$$

aber $C'\mathfrak{C}_1{}^2 = x^2 - a^2$, also

$$y^2 : x^2 - a^2 = b^2 : a^2$$

und

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

278. *Fläche der Ellipse.*

Unendlich nahe an C' wähle man den Punkt P' und fälle $P'P_1$ senkrecht auf die Hauptaxe; diese Senkrechte schneide die Ellipse in P. Dann ist

$$\text{Trapez } C'C_1P_1P' = \tfrac{1}{2}\, C_1C' \,.\, C_1P_1.$$
$$\text{Trapez } CC_1P_1P \;\; = \tfrac{1}{2}\, C_1C \;\; .\, C_1P_1,$$

also verhält sich

$$C'C_1P_1P' : CC_1P_1P = C_1C' : C_1C = a : b.$$

Denkt man sich nun Halbkreis und Halbellipse in lauter unendlich kleine Trapeze geteilt, so folgt durch Addition, dafs sich der Halbkreis zur Halbellipse verhält wie $a : b$. Da die Fläche des Halbkreises $\frac{1}{2}\pi a^2$ ist, so mufs diejenige der Halbellipse $\frac{1}{2}\pi ab$ sein. Demnach ist die

$$\textit{Fläche der Ellipse} = \pi ab.$$

279. *Konjugierte Durchmesser.*

Der Pol der unendlich fernen Geraden heifst der *Mittelpunkt* des Kegelschnittes; er halbiert jede durch ihn gezogene Sehne, die man *Durchmesser* nennt.

Zwei senkrechte Kreisdurchmesser haben die Eigenschaft, dafs der Pol des einen auf dem anderen liegt; diese Eigenschaft behalten auch ihre Bilder, die ebenfalls durch den

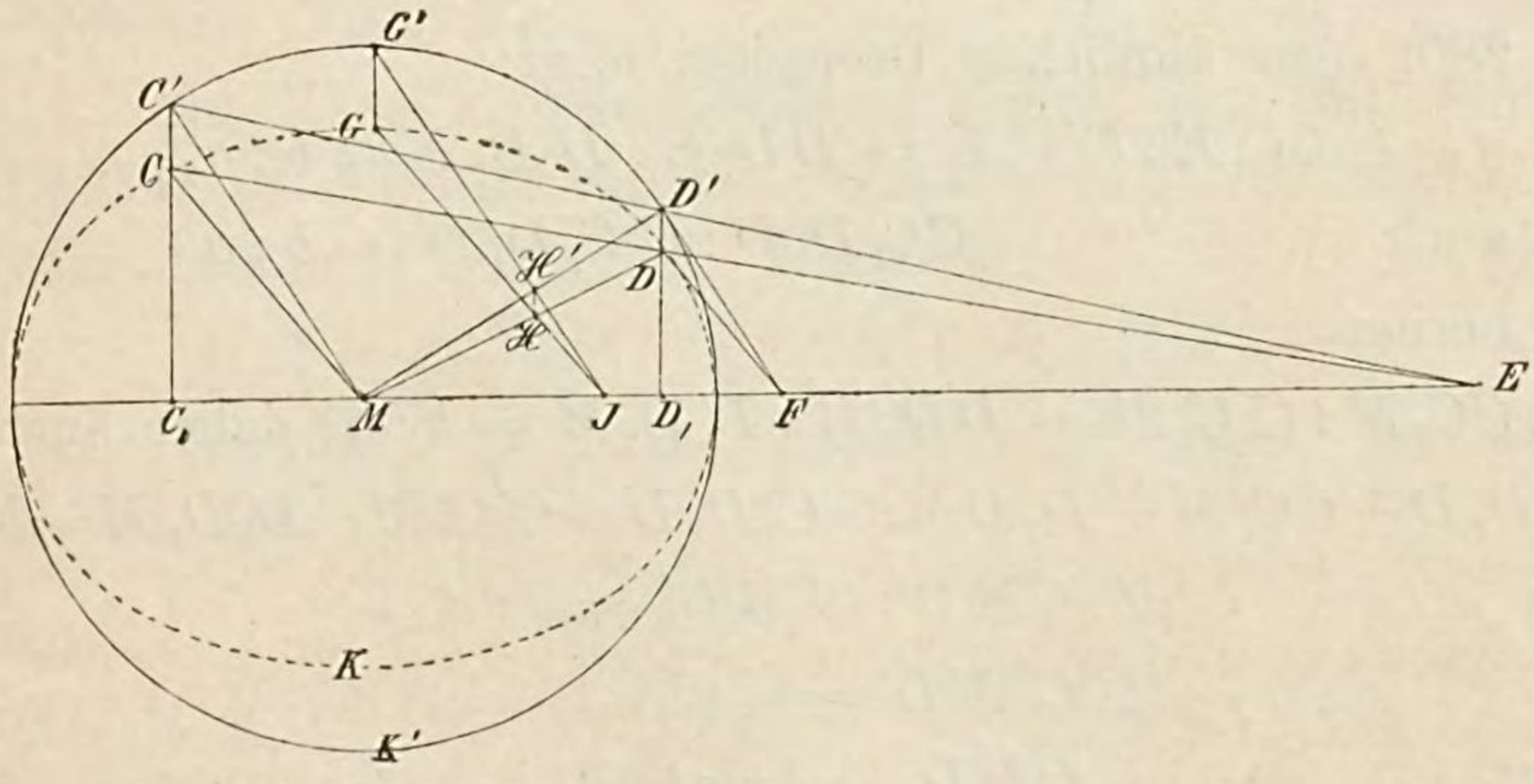


Fig. 97.

Mittelpunkt des Kegelschnittes gehen. Solche Durchmesser nennt man *konjugierte Durchmesser*.

Um zwei konjugierte Durchmesser oder Halbmesser der Ellipse K zu konstruieren, zeichne man zwei senkrechte Radien MC' und MD' des Scheitelkreises und ihre Bilder C und D, so sind MC und MD konjugierte Halbmesser der Ellipse.

Zieht man in D' an K' die Tangente $D'F$, so ist $D'F \parallel C'M$ also $\triangle D'D_1F \sim C'C_1M$ und da $C'C_1 : CC_1 = D'D_1 : DD_1 = a : b$, so ist auch $\triangle DD_1F \sim CC_1M$ und $DF \parallel CM$:

a. *Die Tangente in dem Endpunkte eines von zwei konjugierten Durchmessern ist dem andern parallel.*

In gleicher Weise ergiebt sich mittelst ähnlicher Dreiecke der allgemeinere Satz:

b. *Jeder von zwei konjugierten Durchmessern halbiert die dem anderen parallelen Sehnen.*

Jedes einem Kreise umgeschriebene Parallelogramm ist ein Rhombus, dessen Diagonalen sich im Kreismittelpunkte senkrecht schneiden; das Bild des Rhombus ist ein der Ellipse umgeschriebenes Parallelogramm, die Bilder der Diagonalen sind konjugierte Durchmesser, also:

c. *Die Diagonalen jedes einem Kegelschnitte umgeschriebenen Parallelogramms sind konjugierte Durchmesser.*

In gleicher Weise leitet man ab:

d. *Die Sehnen, welche einen Kegelschnittpunkt mit den Endpunkten eines Durchmessers verbinden, sind konjugierten Durchmessern parallel.*

280. Aus ähnlichen Dreiecken folgt:

$$\triangle CC_1E : C'C_1E = DD_1E : D'D_1E = b : a,$$

also auch $$CC_1D_1D : C'C_1D_1D' = b : a$$

Ferner

$\triangle CC_1M : C'C_1M = DD_1M : D'D_1M = b : a$, daher auch

$$CC_1D_1D - CC_1M - D_1DM : C'C_1D_1D' - C'C_1M - D'D_1M = b : a$$

oder $\triangle CMD : C'MD' = b : a$

Da $\triangle C'MD' = \frac{1}{2}a^2$,

so ist $\triangle CMD = \frac{1}{2}ab$, d. h.

a. *Der Flächeninhalt eines von zwei konjugierten Halbmessern gebildeten Dreiecks ist konstant gleich dem Dreiecke zweier Halbaxen.*

Da die Tangenten in den Endpunkten konjugierter Durchmesser parallel sind, so nimmt der vorige Satz auch folgende Fassung an:

b. *Der Flächeninhalt eines umgeschriebenen Parallelogramms, dessen Seiten konjugierten Durchmessern parallel sind, ist konstant gleich dem Rechtecke aus den Axen.*

Aus rechtwinkligen Dreiecken folgt:

$$CM^2 = CC_1^2 + C_1M^2, \qquad DM^2 = DD_1^2 + D_1M^2$$

$$= \frac{b^2}{a^2} \cdot C'C_1^2 + C_1M^2, \qquad = \frac{b^2}{a^2} D'D_1^2 + D_1M^2.$$

Aus den kongruenten Dreiecken $C'C_1M$ und $D'D_1M$ ergiebt sich $C'C_1 = D_1M$, $D'D_1 = C_1M$, also

$$CM^2 + DM^2 = \frac{b^2}{a^2}(C_1M^2 + D_1M^2) + C_1M^2 + D_1M^2$$

$$= (C_1M^2 + D_1M^2)\left(\frac{a^2 + b^2}{a^2}\right)$$

Aber $C_1M^2 + D_1M^2 = C_1M^2 + C'C_1^2 = a^2$, also

$$CM^2 + DM^2 = a^2 + b^2$$

folglich:

c. *Die Summe der Quadrate zweier konjugierten Halbmesser ist konstant gleich der Summe der Quadrate der Halbaxen.*

281. *Gleichung der Ellipse in Bezug auf zwei konjugierte Durchmesser.* (Fig. 97.)

I. Auf K sei G ein beliebiger Punkt, das Bild von G', $GH \parallel CM$, H das Bild von H', so müssen sich GH und $G'H'$ auf der Axe in J schneiden. Man setze

$$GH = x,\ MH = y,\ CM = a_1,\ DM = b_1.$$

Die Gerade $C'M$ mufs parallel zu $G'J$ sein, also senkrecht auf MD', daher

$$G'H'^2 + H'M^2 = G'M^2 = a^2.$$

Aber $G'H' : GH = G'J : GJ = C'M : CM = a : a_1$

$$MH' : MH = MD' : MD = a : b_1,$$

also $$G'H' = a \cdot \frac{GH}{a_1}, \quad MH' = a \cdot \frac{MH}{b_1}$$

$$= a \cdot \frac{x}{a_1}, \qquad = a \cdot \frac{y}{b_1}$$

und durch Substitution

$$\frac{x^2}{a_1^{\,2}} + \frac{y^2}{b_1^{\,2}} = 1.$$

II. Eine andere Ableitung der Ellipsengleichung geben die Polareigenschaften.

Es seien $C\mathfrak{C}$ und $D\mathfrak{D}$ konjugierte Durchmesser; durch

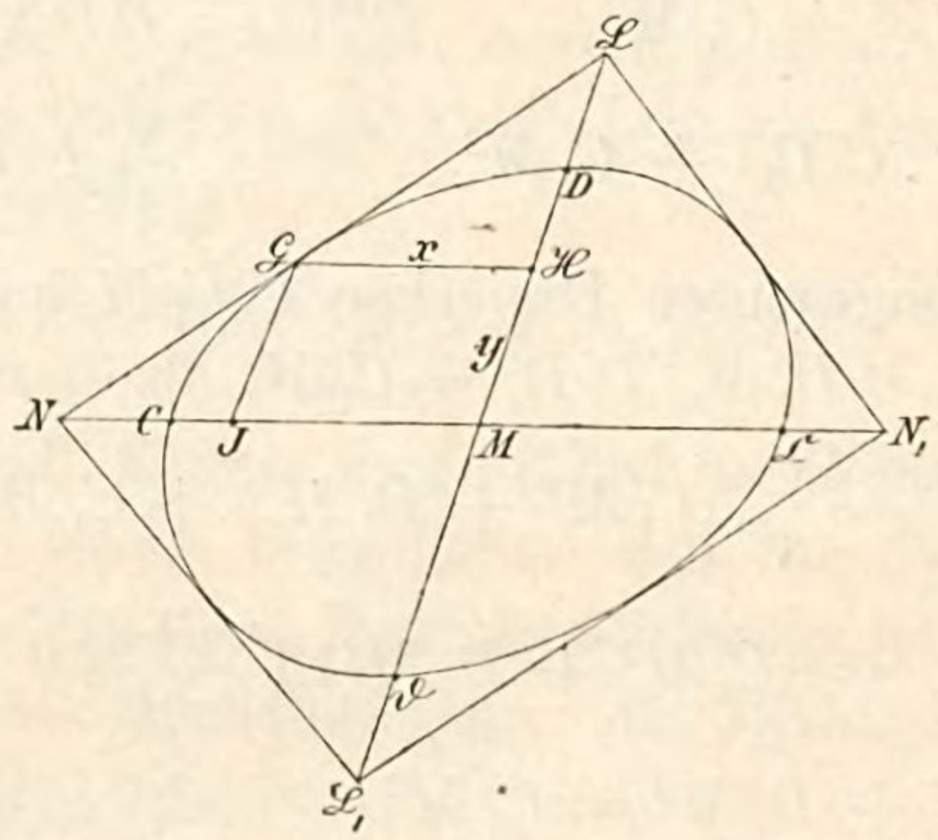


Fig. 98.

einen beliebigen Punkt G ziehe man $GH \parallel C\mathfrak{C}$, $GJ \parallel D\mathfrak{D}$ und in G die Tangente NL, setze

$$GH = x, \; MH = y, \; MC = a_1, \; MD = b_1,$$

so sind $LHD\mathfrak{D}$ und $NJC\mathfrak{C}$ harmonisch, also

$$y \cdot ML = b_1^{\,2}, \quad x \cdot MC = a_1^{\,2}.$$

Aber $$x : HL = NM : ML$$

und $$x : ML - y = NM : ML$$

$$x \cdot ML + y \cdot MN = ML \cdot MN$$

und $$\frac{x}{MN} + \frac{y}{ML} = 1$$

oder durch Substitution

$$\frac{x^2}{a_1^{\,2}} + \frac{y^2}{b_1^{\,2}} = 1.$$

Die letzte Methode läfst sich auch zur Ableitung der Hyperbelgleichung anwenden. Man erhält

$$\frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{b_1^2} = 1.$$

Setzt man $ML = MN$, so geht das Parallelogramm NLN_1L_1 in ein Rechteck über, also wird

$$x = \frac{a_1^2}{MN},\ y = \frac{b_1^2}{MN}.$$

Substituiert man diese Werte in die Gleichung

$$\frac{x}{MN} + \frac{y}{ML} = 1,$$

so erhält man

$$a_1^2 + b_1^2 = MN^2.$$

Da aber nach einem vorigen Satze

$a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2$ ist, so folgt:

Die Scheitel aller einer Ellipse umgeschriebenen rechten Winkel liegen auf einem konzentrischen Kreise, dessen Radius gleich der Geraden ist, welche zwei Endpunkte einer Haupt- und Nebenaxe verbindet. Cf. 199. 200.

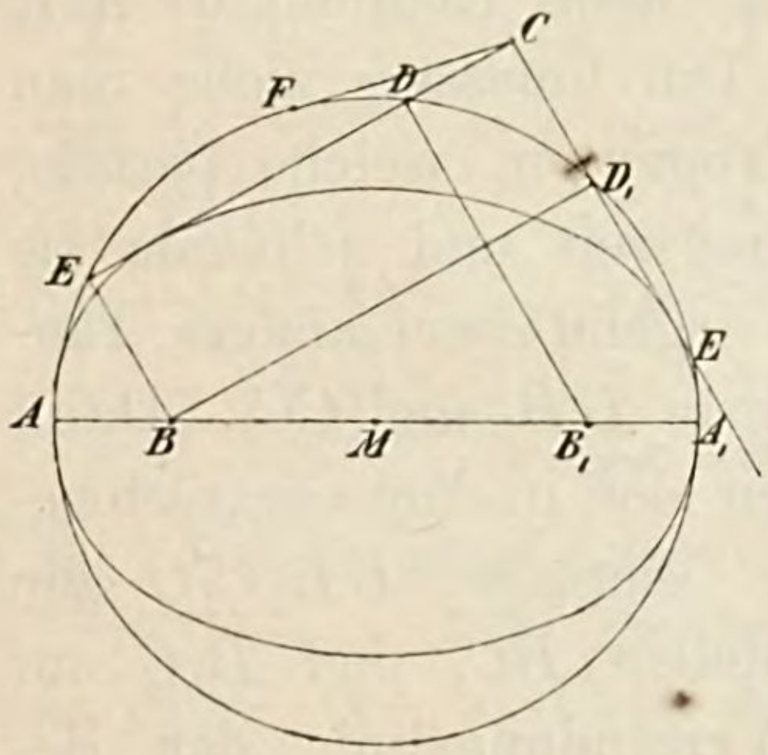


Fig. 99.

282. Eine andere einfache Ableitung dieses Satzes ist folgende*). Im Punkte C schneiden sich zwei rechtwinklige Tangenten, die den Scheitelkreis in DE und D_1E_1 treffen. Dann ist Fig. 99 u. 100

$$CF^2 = CD \,.\, CE = CD_1 \,.\, CE_1$$
$$= BE \,.\, B_1D = BA \,.\, BA_1$$
$$= (BD \,.\, B_1E \text{ in Fig. 100.})$$

Ferner: $MC^2 = MF^2 \mp CF^2$
$$= a^2 \mp BA \,.\, BA_1 = a^2 \mp b^2$$

also MC konstant.

Mit Hilfe des Scheitelkreises findet man übrigens eine leichte Auflösung der Aufgabe:

---

*) Taylor. Ancient and moderne Geometrie S. 88.

„Zu einer Tangente eines Kegelschnittes eine senkrechte Tangente zu konstruieren.“

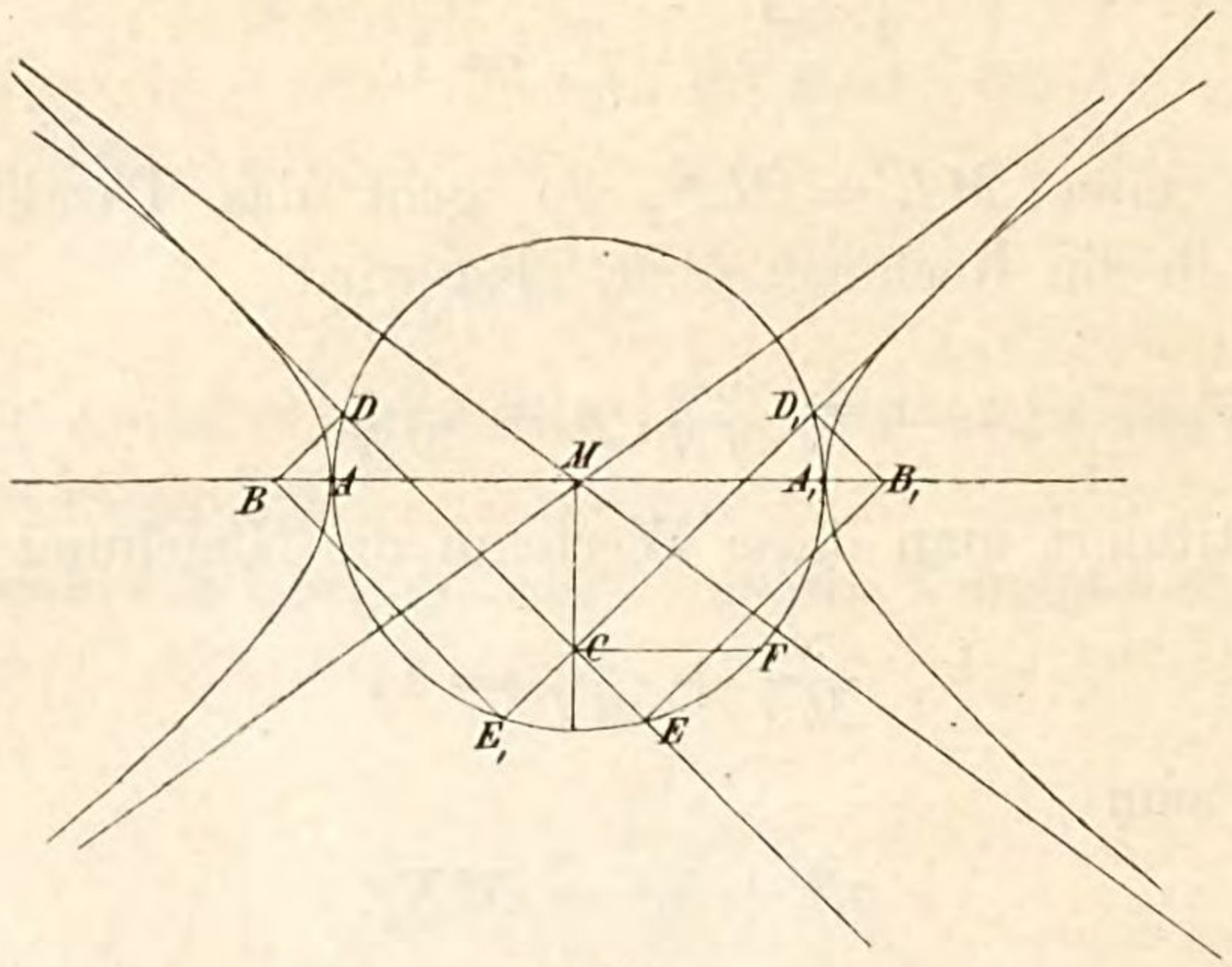


Fig. 100.

Eine Tangente schneide den Scheitelkreis in D und E; man ziehe BD_1 parallel zu ihr und $D_1C \perp DC$.

283. Zu ganz allgemeinen metrischen Beziehungen, welche die Gleichungen der Kegelschnitte in sich enthalten, gelangt man auf folgendem Wege mit Hilfe der Polareigenschaften.

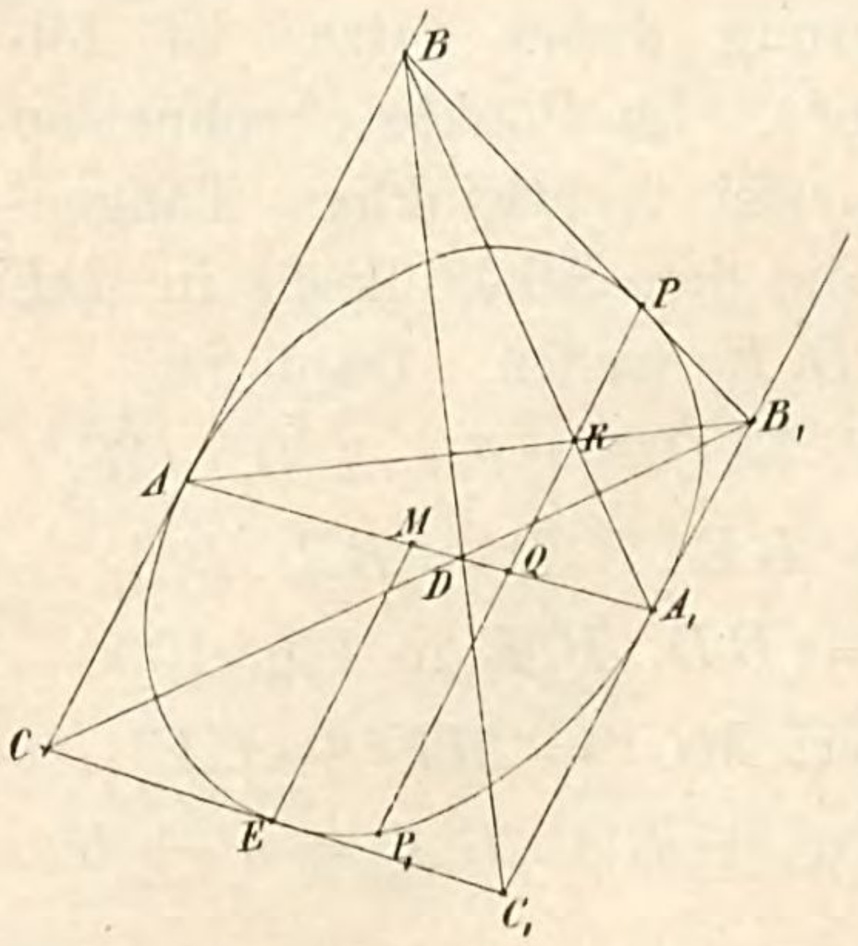


Fig. 101.

In dem Endpunkte AA_1 eines Durchmessers ziehe man die Tangenten, welche parallel sein müssen und schneide sie durch irgend zwei andere Tangenten in BB_1 und CC_1. Dann müssen sich in dem umgeschriebenen Vierseite BB_1C_1C die Diagonalen BC_1 und B_1C auf der Verbindungslinie der Berührungspunkte AA_1 in D schneiden. Aus ähnlichen Dreiecken folgt $AB : A_1C_1 = AD : A_1D = AC : A_1B_1$ und hieraus

$$AB \,.\, A_1B_1 = AC \,.\, A_1C_1.$$

Wird CC_1 parallel zu AA_1, also $AC = A_1C_1$ gleich dem

zu AA_1 konjugierten, zu AB parallelen Halbmesser ME, dann ist

$$AB \,.\, A_1B_1 = ME^2$$

d. h. *Eine beliebige Tangente schneidet auf zwei festen parallelen Tangenten Strecken ab, deren Rechteck gleich dem Quadrate des den festen Tangenten parallelen Halbmessers ist.*

Die festen Tangenten bilden mit BB_1 ein umgeschriebenes Dreieck, dessen eine Ecke im Unendlichen liegt, also schneiden sich AB_1, BA_1 und die durch den Berührungspunkt P zu AB gezogene Parallele PQ in einem Punkte R, welcher die Strecke PQ halbiert, wie sich sofort aus den Proportionen ergiebt:

$$QR : AB = QA_1 : AA_1 = PB_1 : BB_1 = RP : AB.$$

Nimmt man hinzu $QR : A_1B_1 = QA : AA_1$ so folgt durch Multiplikation

$$QR^2 : AB \,.\, A_1B_1 = QA \,.\, QA_1 : AA_1{}^2$$

oder $$QP^2 : QA \,.\, QA_1 = ME^2 : MA^2.$$

Da PP_1 in Q halbiert wird, so folgt:

Eine Sehne und der zu ihr konjugierte Durchmesser teilen sich in solche Abschnitte, dafs die Rechtecke aus denselben sich verhalten, wie die Quadrate der parallelen Halbmesser.

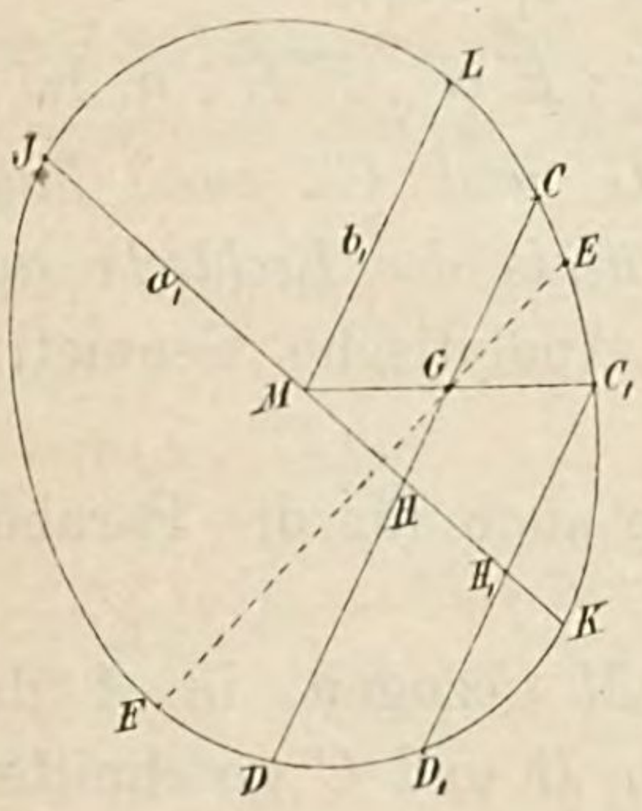


Fig. 102.

284. Die beiden Sehnen CD und EF schneiden sich in G; der zu CD konjugierte Durchmesser JK schneide CD in H. Mit MG schneide man den Kegelschnitt in C_1 und ziehe $C_1D_1 \parallel CD$, dann ist $C_1H_1 = D_1H_1$. Setzt man $MJ = a_1$ und den konjugierten Halbmesser $ML = b_1$, so ist nach dem letzten Satze

$$CH^2 = HJ \,.\, HK \,.\, \frac{{b_1}^2}{{a_1}^2} = ({a_1}^2 - MH^2)\,\frac{{b_1}^2}{{a_1}^2} = {b_1}^2 - MH^2 \,.\, \frac{{b_1}^2}{{a_1}^2}.$$

Man setze

$$\frac{{b_1}^2}{{a_1}^2} = {\mu_1}^2, \text{ also } CH^2 = {b_1}^2 - MH^2 \,.\, {\mu_1}^2.$$

Zieht man auf beiden Seiten GH^2 ab:

$$CH^2 - GH^2 = CG \,.\, GD = b_1^{\,2} - MH^2 \,.\, \mu_1^{\,2} - GH^2.$$

Ferner ist $C_1H_1^{\,2} = b_1^{\,2} - MH_1^{\,2} \,.\, \mu_1^{\,2}$

und aus der Proportion

$MH : GH = MH_1 : C_1H_1$ oder $MH \,.\, \mu_1 : GH = MH_1 \,.\, \mu_1 : C_1H_1$

folgt

$$MH^2 \,.\, \mu_1^{\,2} + GH^2 : MH_1^{\,2} \,.\, \mu_1^{\,2} + C_1H_1^{\,2} = GH^2 : C_1H_1^{\,2} = GM^2 : C_1M^2$$

oder da $MH_1^{\,2} \,.\, \mu_1^{\,2} + C_1H_1^{\,2} = b_1^{\,2}$ ist

$$\left.\begin{matrix} MH^2 \,.\, \mu_1^{\,2} + GH^2 \\ b_1^{\,2} - CG \,.\, DG \end{matrix}\right\} = b_1^{\,2} \cdot \frac{GM^2}{C_1M^2}$$

also endlich $$CG \,.\, DG = b_1^{\,2}\left(1 - \frac{GM^2}{C_1M^2}\right).$$

Ebenso $$EG \,.\, FG = b_2^{\,2}\left(1 - \frac{GM^2}{C_1M^2}\right)$$

und $$CG \,.\, DG : EG \,.\, FG = b_1^{\,2} : b_2^{\,2}$$

d. h. *Zwei Sehnen eines Kegelschnittes teilen sich in solche Abschnitte, daſs die Rechtecke aus denselben sich verhalten wie die Quadrate der parallelen Halbmesser.*

285. Zieht man durch irgend einen Punkt G' die Sehnen $C'D'$ und $E'F'$ parallel zu CD und EF, so ist auch

$$C'G' \,.\, D'G' : E'G' \,.\, F'G' = b_1^{\,2} : b_2^{\,2},$$

also $CG \,.\, DG : EG \,.\, FG = C'G' \,.\, D'G' : E'G' \,.\, F'G'$, d. h.

Wenn man durch zwei Punkte G und G' zwei Paar parallele Sehnen zieht, so ist das Verhältnis der Rechtecke aus ihren Abschnitten konstant. (Salmon. Analytische Geometrie der Kegelschnitte. Art. 110.)

In der letzten Form gilt der Satz auch für die Parabel, was jetzt nachgewiesen werden soll.

Durch A sei ein Durchmesser AM gezogen, in A die Tangente, welche durch zwei andere in B und C geschnitten wird; letztere mögen sich in E treffen.

Die drei Tangenten bilden mit der unendlich fernen Geraden ein umgeschriebenes Vierseit, dessen Diagonalen die durch B und C zu CE und BE parallelen Geraden sind und sich auf den Verbindungslinien AM und PP_1 der Berührungspunkte in D schneiden müssen; das Viereck $BDCE$ ist daher ein

Parallelogramm. Zieht man PQ und P_1Q_1 parallel zu BC, so folgt:

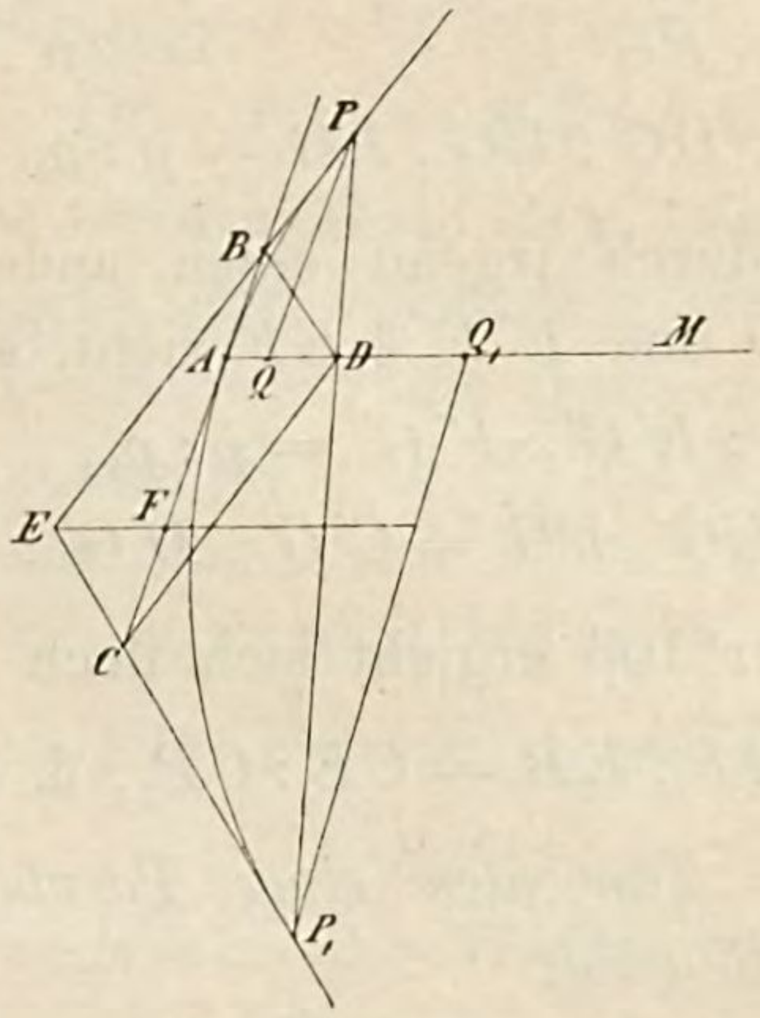


Fig. 103.

$$PQ : P_1Q_1 = PD : P_1D = BP : CD = BP : EB = AQ : EF$$
$$PQ : P_1Q_1 = BD : CP_1 = CE : CP_1 = FF : AQ_1$$

und hieraus

$$PQ^2 : P_1Q_1{}^2 = AQ : AQ_1,$$

d. h. *Die Quadrate paralleler Parabelsehnen verhalten sich wie die Entfernungen ihrer Schnittpunkte mit dem konjugierten Durchmesser von seinem Endpunkte.* Cf. 181.

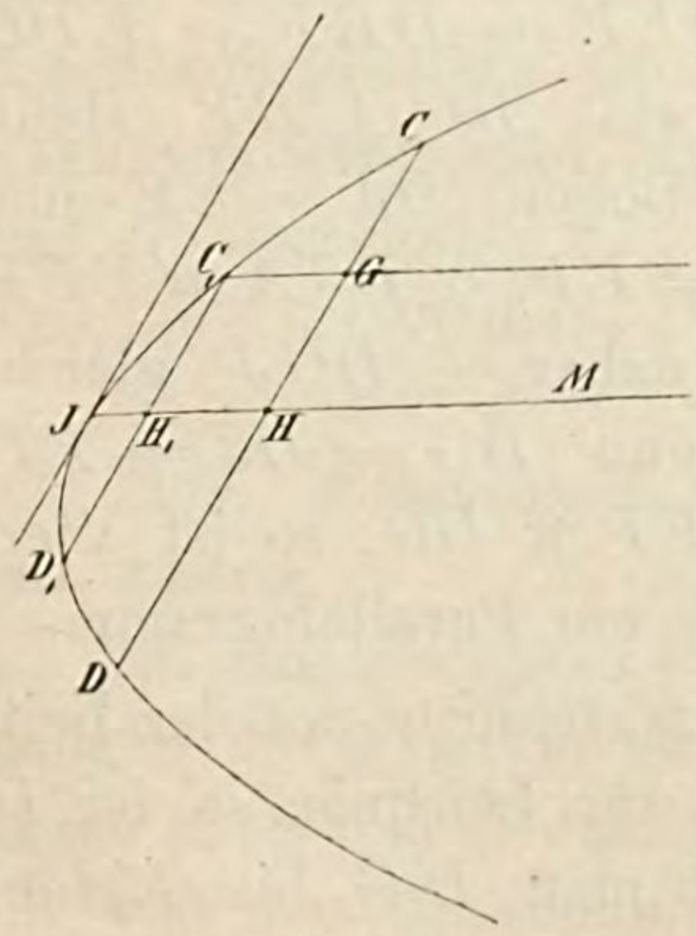


Fig. 104.

286. Zieht man nun durch einen Punkt G die Sehnen CD und EF und schneidet die erstere mit dem zu ihr konjugierten Durchmesser JM in H, zieht $GC_1 \parallel JM$, $C_1D_1 \parallel CD$, so ist

$$CH^2 : C_1H_1{}^2 = JH : JH_1$$

oder wenn man

$$\frac{C_1H_1{}^2}{JH_1} = 2p \text{ setzt,}$$

$$CH^2 = 2p \,.\, JH$$

und $$CH^2 - GH^2 = CG \,.\, DG = 2p \,.\, JH - GH^2.$$

Aber $GH^2 = C_1H_1^2 = 2p \,.\, JH_1$,
also $CG \,.\, DG = 2p \,.\, HH_1 = 2p \,.\, C_1G$
Ebenso $EG \,.\, FG = 2p_1 \,.\, C_1G$,
also $CG \,.\, DG : EG \,.\, FG = p : p_1$.

Wenn man durch irgend einen anderen Punkt G' die Sehnen $C'D' \parallel CD$ und $E'F' \parallel EF$ zieht, so erhält man

$C'G' \,.\, D'G' : E'G' : F'G' = p : p_1$,
also $CG \,.\, DG : EG \,.\, FG = C'G' \,.\, D'G' : E'G' \,.\, F'G'$

287. In Figur 103 ergiebt sich noch

$$BP : EB = CE : CP_1, \text{ d. h.}$$

Zwei beliebige Tangenten einer Parabel werden von den übrigen proportional geteilt.

Dieser Satz ergiebt sich übrigens unmittelbar aus der Erzeugung der Parabel durch Brennpunkt und Leitlinie auf folgende Art.

Vom Brennpunkte B ziehe man BA senkrecht zur Scheiteltangente a, ferner beliebig die Geraden BD und BE, errichte in D und F die Senkrechten darauf, so sind es Parabeltangenten. Ihr Schnittpunkt F liegt mit BDE auf einem Kreise. Zieht man BF und $DG \parallel FE$, so ist $\sphericalangle DEF = DBF = EDG = ABE$, weil $DG \perp BE$ steht, also auch Bogen $DJ = EF$ und Sehne $DJ = EF$, $\sphericalangle DJA = EFH = DGA$, daher $\triangle DGJ$ gleichschenklig und $DG = DJ = EF$. Weil also $EF \# DG$, so ist Viereck $DFEG$ ein Parallelogramm.

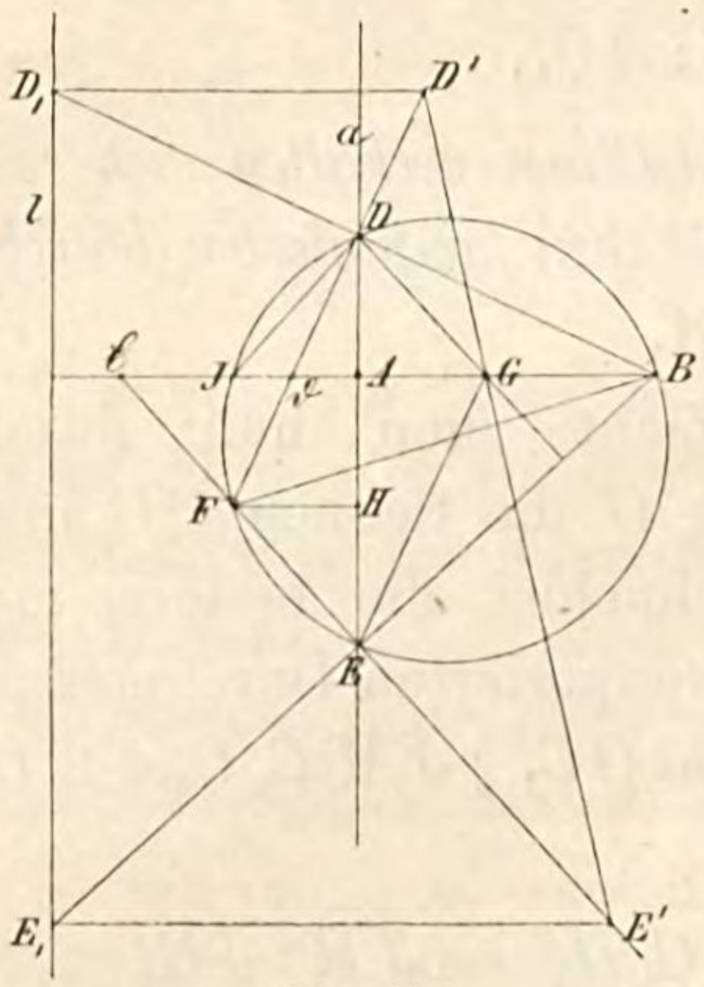


Fig. 105.

Verlängert man BD bis zum Durchschnitte mit der Leitlinie in D_1 und zieht D_1D' senkrecht zur Leitlinie, so ist D' der Berührungspunkt auf FD. Zieht man $D'G$ bis E' auf FE, so ist

$DD' : DG = GE : EE'$ und $D\mathfrak{D} : DG = GE : E\mathfrak{E}$.

Da aber $DD' = D\mathfrak{D}$, so ist auch $EE' = E\mathfrak{E}$ und E' der Berührungspunkt auf der Tangente EF.

Hieraus ergiebt sich die Proportion

$$D'D : D'F = DG : FE' = FE : FE' = EH : ED$$

aus der wieder der obengenannte Satz folgt.

288. Ein Kegelschnitt werde von einem Kreise in den Punkten $CDEF$ geschnitten; die gemeinschaftlichen Sehnen CD und EF schneiden sich in G, dann ist, wenn man die parallelen Halbmesser mit c und d bezeichnet,

$$CG \,.\, DG : EG \,.\, FG = c^2 : d^2$$

und da $CG \,.\, DG = EG \,.\, FG$ ist, so mufs auch

$$c = d$$

sein. Die Halbierungslinien der Winkel gleicher Durchmesser sind aber die Axen, also folgt:

a. *Die Halbierungslinien der Winkel, welche die gemeinschaftlichen Sehnen eines Kreises und eines Centralkegelschnittes bilden, sind den Axen parallel.*

Die Umkehrung ergiebt sich leicht:

b. *Zwei Sehnen, welche gegen die Axen gleich und entgegengesetzt geneigt sind, schneiden den Kegelschnitt in vier Punkten, durch welche sich ein Kreis legen läfst.*

Um den vorigen Satz für die Parabel zu beweisen, schneide man dieselbe durch einen Kreis in den Punkten $CDEF$, ziehe darauf beliebig die Sehnen $C_1D_1 \parallel C_2D_2 \parallel CD$ und durch die Halbierungspunkte G_1 und G_2 derselben $E_1F_1 \parallel E_2F_2 \parallel EF$, dann ist, wenn man noch den Schnittpunkt von CD und EF mit G bezeichnet,

$$\frac{CG \,.\, DG}{EG \,.\, FG} = \frac{C_1G_1 \,.\, D_1G_1}{E_1G_1 \,.\, F_1G_1} = \frac{C_2G_2 \,.\, D_2G_2}{E_2G_2 \,.\, F_2G_2}.$$

289. *Folgerungen aus den Beziehungen des Scheitelkreises zur Ellipse.*

In einem Punkte C einer Ellipse ziehe man die Tangente, welche die Axen in D und E, und die Normale, welche die Axen in F und G schneidet. Tangente und Normale halbieren die von den Brennpunktsstrahlen in C gebildeten Winkel; es sind somit $C\,(BB_1DF)$ harmonische Strahlen, BB_1DF harmonische Punkte und daher $MD \,.\, MF = MB^2 = e^2$:

a. *Alle Paare zusammengehöriger Tangenten und Normalen schneiden die Hauptaxe in einer Involution, deren Doppelpunkte*

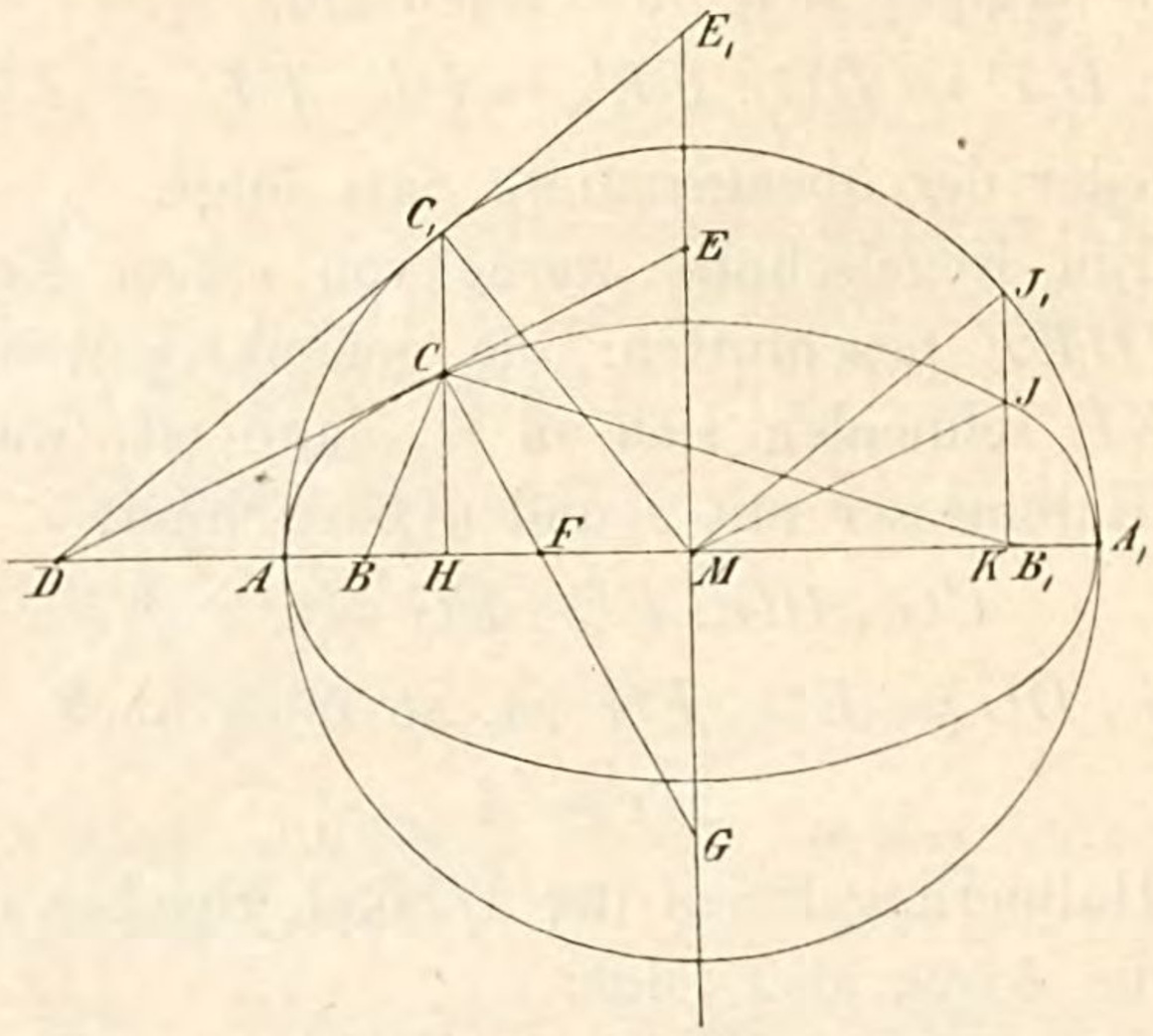


Fig. 106.

die Brennpunkte und deren Potenz das Quadrat der halben Excentricität ist.

Fällt man $CH \perp AA_1$, so sind auch AA_1DH harmonisch und $MD \,.\, MH = a^2$; in Verbindung mit der Gleichung $MD \,.\, MF = e^2$ ergiebt sich

$MF : MH = e^2 : a^2$, also aus ähnlichen Dreiecken

$CF : CG : FG = FH : MH : MF = a^2 - e^2 : a^2 : e^2 = b^2 : a^2 : e^2$, d. h.

b. *Die Axen teilen die Normale in Abschnitte, welche sich verhalten wie die Quadrate der Axen zum Quadrate der Excentricität.*

Verlängert man HC bis zum Durchschnitte in C_1 mit dem Scheitelkreise, so ist DC_1 die Tangente des letzteren; sie treffe die Nebenaxe in E_1. Zieht man noch $MJ \parallel DC$, so sind MC und MJ konjugiert, also wenn man $JK \perp AA_1$ fällt und bis J_1 verlängert, so sind auch C_1M und J_1M konjugierte und daher senkrechte Radien des Kreises. Daher ist

$$CD : MJ = CH : JK$$
$$CE : MJ = MH : MK$$

$$CD \,.\, CE : MJ^2 = CH \,.\, MH : JK \,.\, MK.$$

Ebenso $C_1D \,.\, C_1E_1 : MJ_1^2 = C_1H \,.\, MH : J_1K \,.\, MK.$

Aber $CH : C_1H = JK : J_1K = b : a$

und $C_1D \,.\, C_1E_1 = MJ_1^2$,

also $CD \,.\, CE = MJ^2$:

c. *Die Strecke einer jeden Tangente zwischen den beiden Hauptaxen wird durch den Berührungspunkt in zwei Segmente zerlegt, deren Rechteck gleich dem Quadrate des der Tangente parallelen Halbmessers ist.*

Aus $CF : CD = CE : CG$

folgt $CF \,.\, CG = CD \,.\, CE = MJ^2$:

d. *Das Rechteck der Segmente der Normale eines Punktes zwischen diesem Punkte und den beiden Axen ist gleich dem Quadrate des Halbmessers, welcher zu dem nach jenem Punkte gezogenen Halbmesser konjugiert ist.*

290. Man ziehe durch einen beliebigen Punkt C die Ellipsensehnen DE und FG, fälle DD_1 und EE_1 senkrecht auf die Hauptaxe, so schneiden sich DE und D_1E_1 auf AA_1 in K. Zieht man ferner FF_1 und GG_1 senkrecht zur Hauptaxe, so treffen sich D_1E_1 und F_1G_1 in einem Punkte C_1, so dafs CC_1 auch senkrecht auf AA_1 steht. Endlich seien MH und MJ parallel zu DE und FG,

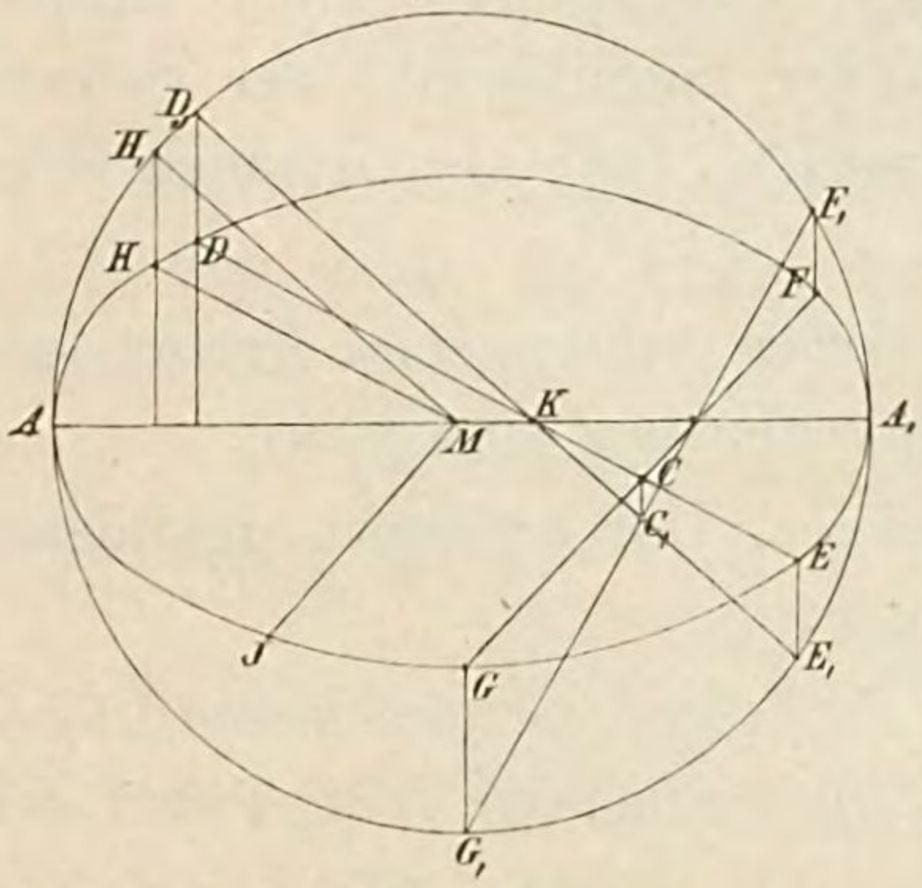


Fig. 107.

$HH_1 \perp AA_1$. Dann ist

$$DC : D_1C_1 = EC : E_1C_1 = DK : D_1K = HM : H_1M$$

und $$DC \,.\, EC = D_1C_1 \,.\, E_1C_1 \,.\, \left(\frac{HM}{H_1M}\right)^2.$$

Ebenso folgt $$FC \,.\, GC = F_1C_1 \,.\, G_1C_1 \,.\, \left(\frac{JM}{J_1M}\right)^2.$$

Da aber $D_1C_1 \,.\, E_1C_1 = F_1C_1 \,.\, G_1C_1$ und $H_1M = J_1M$, so wird

$$DC \,.\, EC : FC \,.\, GC = HM^2 : JM^2$$

d. h. *die Rechtecke aus den Abschnitten zweier Ellipsensehnen verhalten sich wie die Quadrate der parallelen Halbmesser.*

291. Aus diesem Satze ergiebt sich die Gleichung der Ellipse in Bezug auf zwei konjugierte Durchmesser. Von den beiden Sehnen DE uud FG sei die erste ein Durchmesser und die zweite dem konjugierten Halbmesser MJ parallel, so dafs also $CF = CG$. Setzt man $MD = a_1$, $MJ = b_1$, $CM = x$, $CF = y$, so

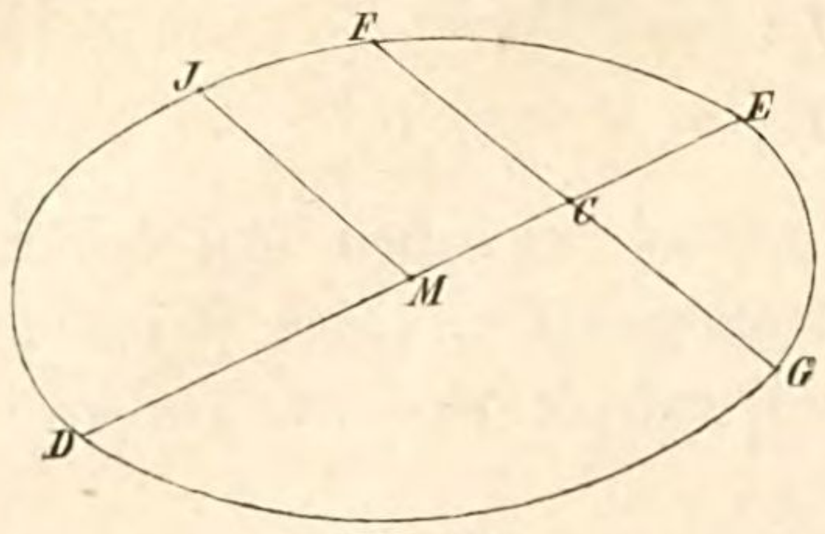


Fig. 108.

folgt aus

$$DC.EC : FC.GC = DM^2 : JM^2$$

$$(a_1 + x)(a_1 - x) : y^2 = {a_1}^2 : {b_1}^2$$

und nach kurzer Reduktion

$$\frac{x^2}{{a_1}^2} + \frac{y^2}{{b_1}^2} = 1.$$

292. Es seien $DEFG$ die Schnittpunkte einer Ellipse mit einem Kreise; ist dann C der Schnittpunkt der Sehnen DE und FG, so ist $DC.EC = FC.GC$, also ist auch (Fig. 107) $HM = JM$, d. h.

a. *Die zu den gemeinschaftlichen Sehnen eines Kreises und einer Ellipse parallelen Ellipsendurchmesser sind gleich.*

Da die Axen die von gleichen Durchmessern gebildeten Winkel halbieren, so folgt weiter:

b. *Die Halbierungslinien der von den gemeinschaftlichen Sehnen eines Kreises und einer Ellipse gebildeten Winkel sind den Axen parallel.*

293. In den Punkten $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}_1$ seien an den Scheitelkreis zwei Tangenten gezogen und durch einen Punkt $\mathfrak{P}$ desselben eine Gerade $\mathfrak{H}\mathfrak{H}_1$ symmetrisch zu beiden, welche den Kreis zum zweiten Male in $\mathfrak{P}_1$ schneidet. Dann ist

$$\mathfrak{H}\mathfrak{C}^2 = \mathfrak{H}\mathfrak{P} \,.\, \mathfrak{H}\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{H}\mathfrak{P} \,.\, \mathfrak{H}_1\mathfrak{P}.$$

Fällt man aus $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$ auf die Berührungssehne $\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$ und die Tangente $\mathfrak{H}\mathfrak{C}$ die Senkrechten s, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}_1$, so findet man aus ähnlichen Dreiecken

$$s : \mathfrak{p} = \mathfrak{H}\mathfrak{C} : \mathfrak{H}\mathfrak{P} \text{ und } s : \mathfrak{p}_1 = \mathfrak{H}\mathfrak{C} : \mathfrak{H}\mathfrak{P}_1,$$

also $s^2 : \mathfrak{p} \,.\, \mathfrak{p}_1 = \mathfrak{H}\mathfrak{C}^2 : \mathfrak{H}\mathfrak{P} \,.\, \mathfrak{H}\mathfrak{P}_1$, also $s^2 = \mathfrak{p} \,.\, \mathfrak{p}_1$, d. h.

a. *Fällt man auf zwei Tangenten eines Kreises und auf die Berührungssehne die Senkrechten aus einem Kreispunkte, so ist das Rechteck der ersteren gleich dem Quadrate der letzten.*

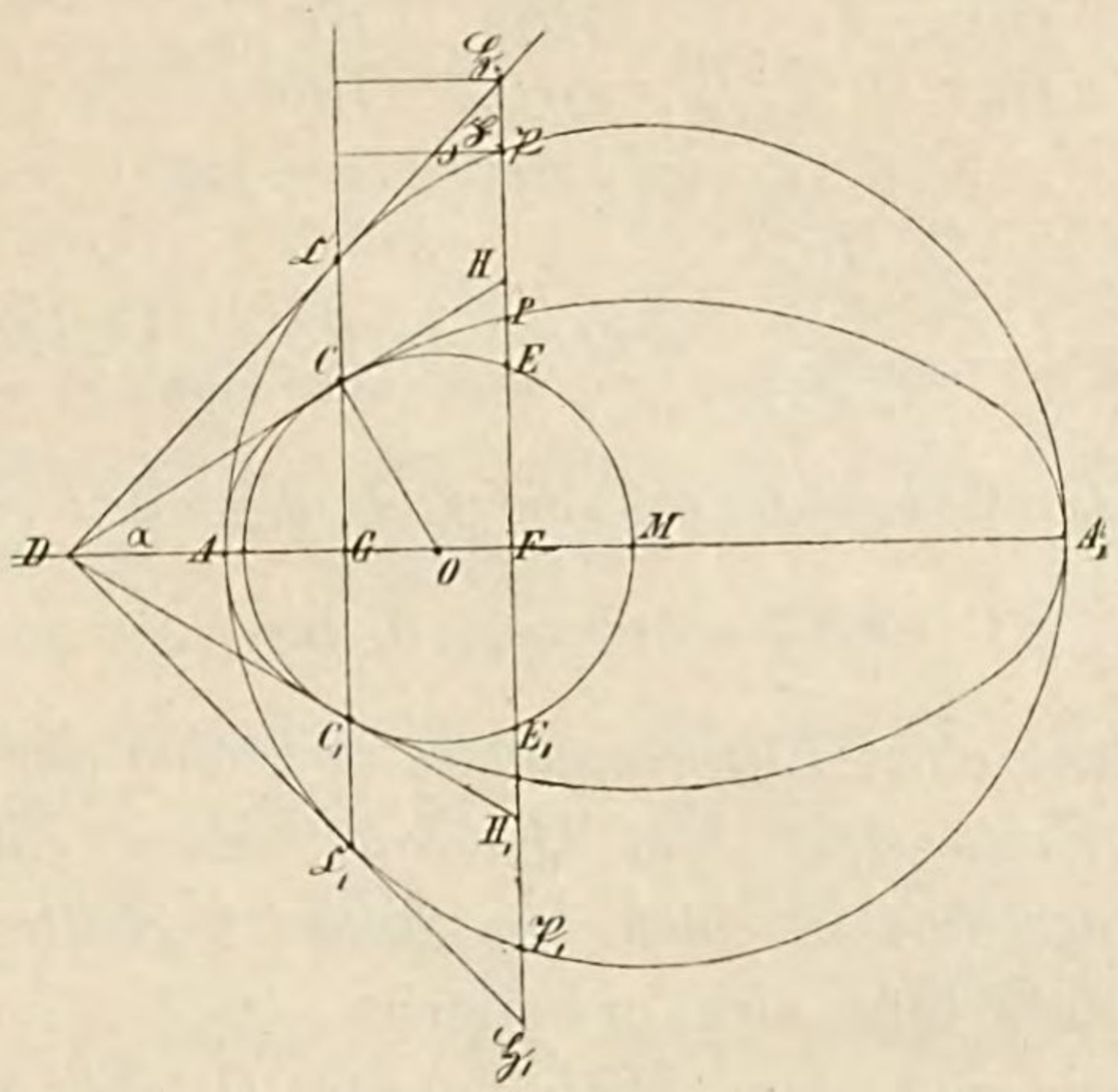


Fig. 109.

Die Gerade $\mathfrak{H}\mathfrak{H}_1$ schneide die Ellipse in P und P_1. Fällt man aus ihnen die Senkrechten p und p_1 auf die Ellipsentangenten, so ist

$$\mathfrak{p} : \mathfrak{H}\mathfrak{P} = DG : D\mathfrak{C} \text{ und } p : HP = DG : DC,$$

also wegen 272 b.

$$\mathfrak{p} = p \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{DC}{D\mathfrak{C}} \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_1 = p_1 \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{DC}{D\mathfrak{C}}$$

$$s^2 = p \cdot p_1 \cdot \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{DC^2}{D\mathfrak{C}^2}$$

b. *Fällt man aus einem Ellipsenpunkte die Senkrechten auf zwei Tangenten und auf die Berührungssehne, so steht das Rechteck der ersteren zum Quadrate der letzten in einem konstanten Verhältnisse.*

294. Im Berührungspunkte C ziehe man CO senkrecht zur Tangente und beschreibe um O mit OC einen Kreis, so berührt er auch die andere Tangente in C_1. Bezeichnet man die Potenz des Kreises O im Punkte P mit K_p, so ist

$$K_p = PE \,.\, PE_1 = PF^2 - EF^2.$$

Ferner ist $PH \,.\, PH_1 = HF^2 - PF^2$, also

$$K_p = HF^2 - EF^2 - PH \,.\, PH_1$$

$$= HE \,.\, H_1E - PH \,.\, PH_1$$

$$HE \,.\, H_1E = HE \,.\, HE_1 = HC^2 = s^2 \,.\, \frac{DC^2}{DG^2},$$

also

$$K_p = s^2 \,.\, \frac{DC^2}{DG^2} - p \,.\, p_1 \,.\, \frac{DC^2}{DG^2} = \frac{DC^2}{DG^2}\left(s^2 - s^2 \,.\, \frac{b^2}{a^2} \,.\, \frac{D\mathfrak{C}^2}{DC^2}\right)$$

$$= \frac{s^2}{DG^2} \,.\, \frac{a^2 \,.\, DC^2 - b^2 \,.\, D\mathfrak{C}^2}{a^2}$$

$$= \frac{s^2}{DG^2} \,.\, \frac{a^2 \,(DG^2 + CG^2) - b^2 \,.\, (DG^2 + \mathfrak{C}G^2)}{a^2}$$

Aber $CG : \mathfrak{C}G = b : a$, also $CG \,.\, a = \mathfrak{C}G \,.\, b$, daher

$$K_p = s^2 \,.\, \frac{c^2}{a^2}, \text{ d. h.}$$

Die Potenz eines Ellipsenpunktes in Bezug auf einen doppelt berührenden Kreis steht zum Quadrate seiner Entfernung von der Berührungssehne in einem konstanten Verhältnisse.

Dieser Satz läfst sich erweitern.

Ein Kreis mit dem Mittelpunkte O auf der Hauptaxe schneide die Ellipse in $C'C_1'C''C_1''$; die parallelen Verbindungs-

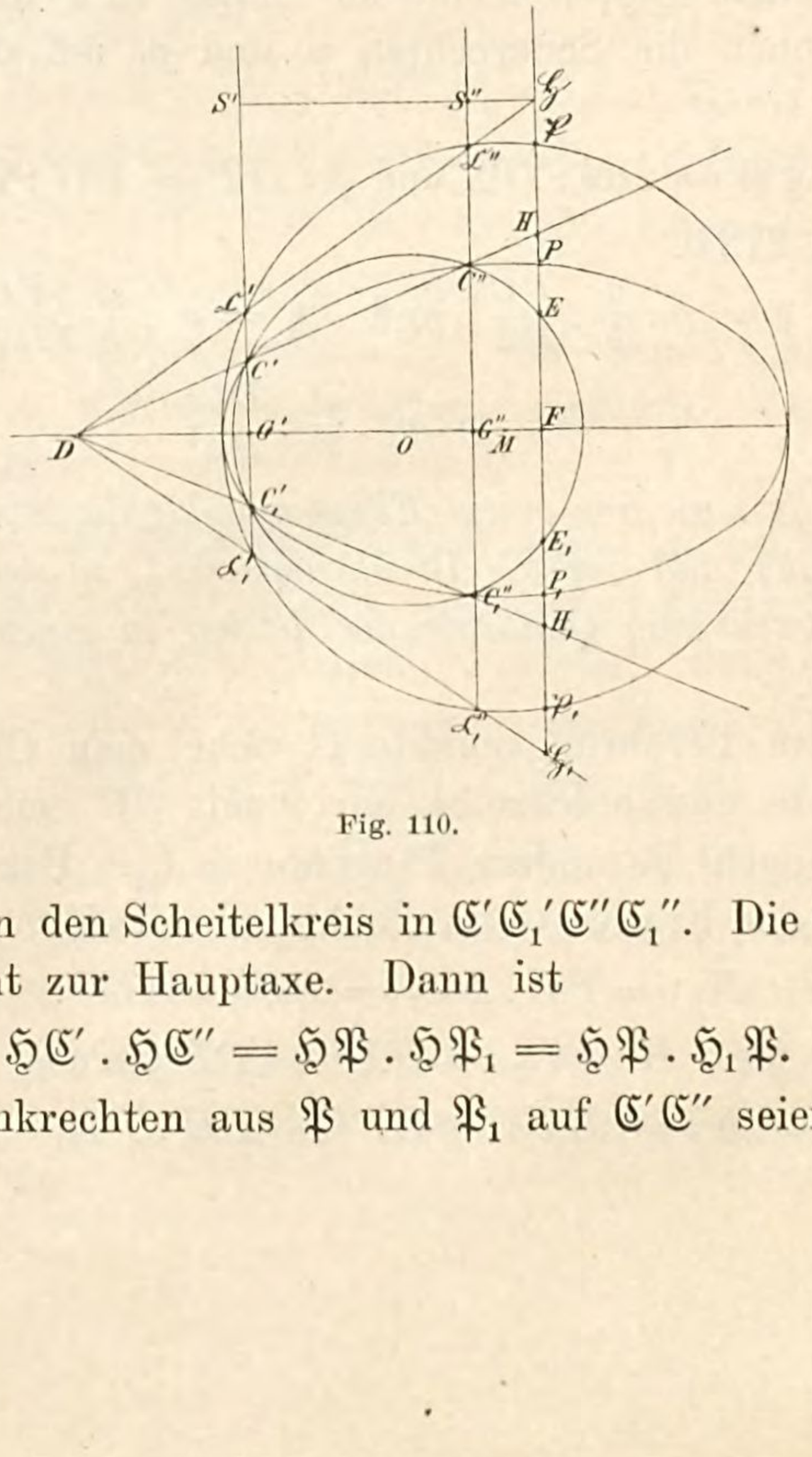


Fig. 110.

linien treffen den Scheitelkreis in $\mathfrak{C}'\mathfrak{C}_1'\mathfrak{C}''\mathfrak{C}_1''$. Die Gerade $\mathfrak{P}P$ sei senkrecht zur Hauptaxe. Dann ist

$$\mathfrak{H}\mathfrak{C}' \,.\, \mathfrak{H}\mathfrak{C}'' = \mathfrak{H}\mathfrak{P} \,.\, \mathfrak{H}\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{H}\mathfrak{P} \,.\, \mathfrak{H}_1\mathfrak{P}.$$

Die Senkrechten aus $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$ auf $\mathfrak{C}'\mathfrak{C}''$ seien $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}_1$

und diejenigen auf $\mathfrak{C}'C'$ und $\mathfrak{C}''C''$ seien $s_{,}$ und $s_{,,}$, so folgt wieder

$$s_{,} \,.\, s_{,,} = \mathfrak{p} \,.\, \mathfrak{p}_1 .$$

*F*ällt man ferner p und p_1 senkrecht aus P und P_1 auf $C'C''$, so ist

$$s_{,} \,.\, s_{,,} = p \,.\, p_1 \,.\, \frac{a^2}{b^2} \,.\, \frac{DH^2}{D\mathfrak{H}^2}, \text{ d. h.}$$

Zieht man aus einem Punkte der Hauptaxe zwei gegen diese gleich geneigte Gerade und zieht die parallelen Verbindungslinien ihrer Schnittpunkte mit der Ellipse, so steht das Produkt der Entfernungen eines Ellipsenpunktes von den ersteren zu demjenigen von den letzteren in einem konstanten Verhältnisse.

295. Man bezeichne wieder die Potenz des Kreises O im Punkte P mit K_p, dann ist wie vorher

$$K_p = HE \,.\, HE_1 - PH \,.\, P_1 H$$

Aber $HE \,.\, HE_1 = HC' \,.\, HC'' = s_{,} \,.\, s_{,,} \,.\, \frac{DH^2}{DF^2}$

$$PH \,.\, P_1 H = p \,.\, p_1 \,.\, \frac{DH^2}{DF^2} = s_{,} \,.\, s_{,,} \frac{b^2}{a^2} \,.\, \frac{D\mathfrak{H}^2}{DF^2}$$

Also

$$K_p = \frac{s_{,} \,.\, s_{,,}}{DF^2} \,.\, \left(DH^2 - \frac{b^2}{a^2} \,.\, D\mathfrak{H}^2 \right)$$

und nach einigen Reduktionen

$$K_p = s_{,} \,.\, s_{,,} \,.\, \frac{e^2}{a^2}, \text{ d. h.}$$

a. *Die Potenz eines Ellipsenpunktes in Bezug auf einen Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Hauptaxe liegt, steht zum Produkte seiner Entfernungen von den parallelen Schnittsehnen in konstantem Verhältnisse.*

Drückt man in der letzten Gleichung $s_{,} \,.\, s_{,,}$ durch $p \,.\, p_1$ aus, so erhält man

$$K_p = p \,.\, p_1 \,.\, \frac{e^2}{b^2} \,.\, \frac{DH^2}{D\mathfrak{H}^2}, \text{ d. h.}$$

b. *Die Potenz eines Ellipsenpunktes in Bezug auf einen Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Hauptaxe liegt, steht zum Produkte seiner Entfernungen von zwei gegen die Hauptaxe gleich geneigten Geraden, die sich auf der letzteren schneiden, in einem konstanten Verhältnisse.*

296. Ein Kreis O schneide einen Kegelschnitt in den Punkten

$CDEF$, dann sind die Sehnen CD und EF gegen die Axen gleich geneigt. Die erstere schneide die Hauptaxe in G, durch G ziehe man die Sehne $C'D' \parallel EF$, so liegen die vier Punkte $CDC'D'$ auf einem Kreise O', dessen Mittelpunkt auf der Hauptaxe liegt.

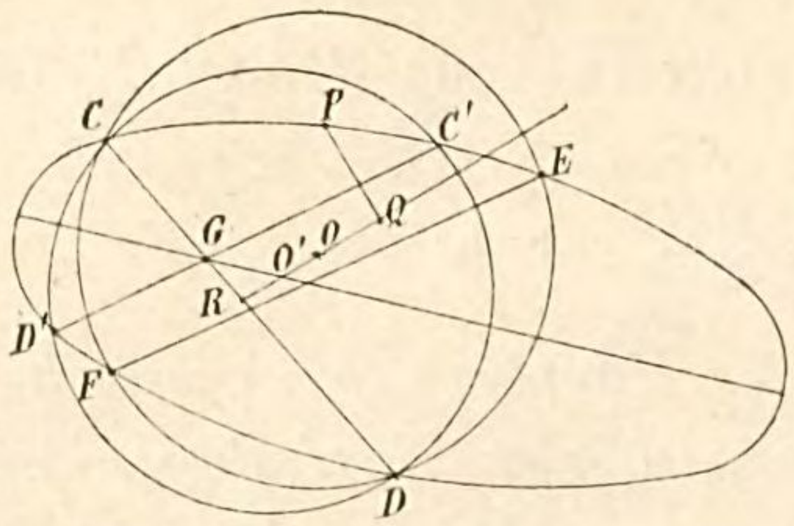


Fig. 111.

Von einem beliebigen Kegelschnittpunkte P fälle man auf CD und $C'D'$ die Senkrechten p und p', dann ist nach dem letzten Satze, wenn λ eine Konstante bedeutet,

$$K_{p'} = p \,.\, p' \,.\, \lambda.$$

Fällt man PQ senkrecht auf die Centrale OO' und ist R der Schnittpunkt der letzteren mit der Potenzlinie CD der Kreise O und O', so ist

$$\begin{aligned} K_{p'} - K_p &= -(O'P^2 - r'^2 - OP^2 + r^2) \\ &= -(O'Q^2 - OQ^2 - (O'R^2 - OR^2)) \\ &= OO' \,(O'Q + OQ + O'R + OR) \\ &= 2OO' \,.\, p. \end{aligned}$$

Statt des Punktes P wähle man den Punkt E und fälle von ihm auf CD und $C'D'$ die Senkrechten e und e', dann ist zunächst

$$K_{e'} = e \,.\, e' \,.\, \lambda, \; K_e = o,$$

also $2OO' \,.\, e' = e \,.\, e' \,.\, \lambda$ und $2OO' = e \,.\, \lambda$

und daher

$$K_p = p \,.\, p' \,.\, \lambda - e \,.\, p \,.\, \lambda = p \,.\, (p' - e) \,.\, \lambda, \text{ d. h.}$$

Die Potenz eines Ellipsenpunktes in Bezug auf einen Kreis, der die Ellipse in vier reellen Punkten schneidet, steht zum Produkte seiner Entfernungen von solchen zwei gemeinschaftlichen Sehnen, welche mit einer Axe gleiche Winkel bilden, in einem konstanten Verhältnisse.

Aus dem letzten Satze folgt übrigens, dafs die vorhergehenden Sätze auch für den Fall gelten, dafs der Mittelpunkt des Kreises auf der Nebenaxe liegt. Man kann die letzteren jedoch in analoger Art herleiten, wenn man statt des Scheitel-

kreises denjenigen Kreis zu Hülfe nimmt, der die Ellipse in den Scheiteln der Nebenaxe berührt.

297. *Die gleichseitige Hyperbel.*

Eine Hyperbel heifst gleichseitig, wenn ihre Axen gleich sind, also der Asymptotenwinkel ein Rechter ist.

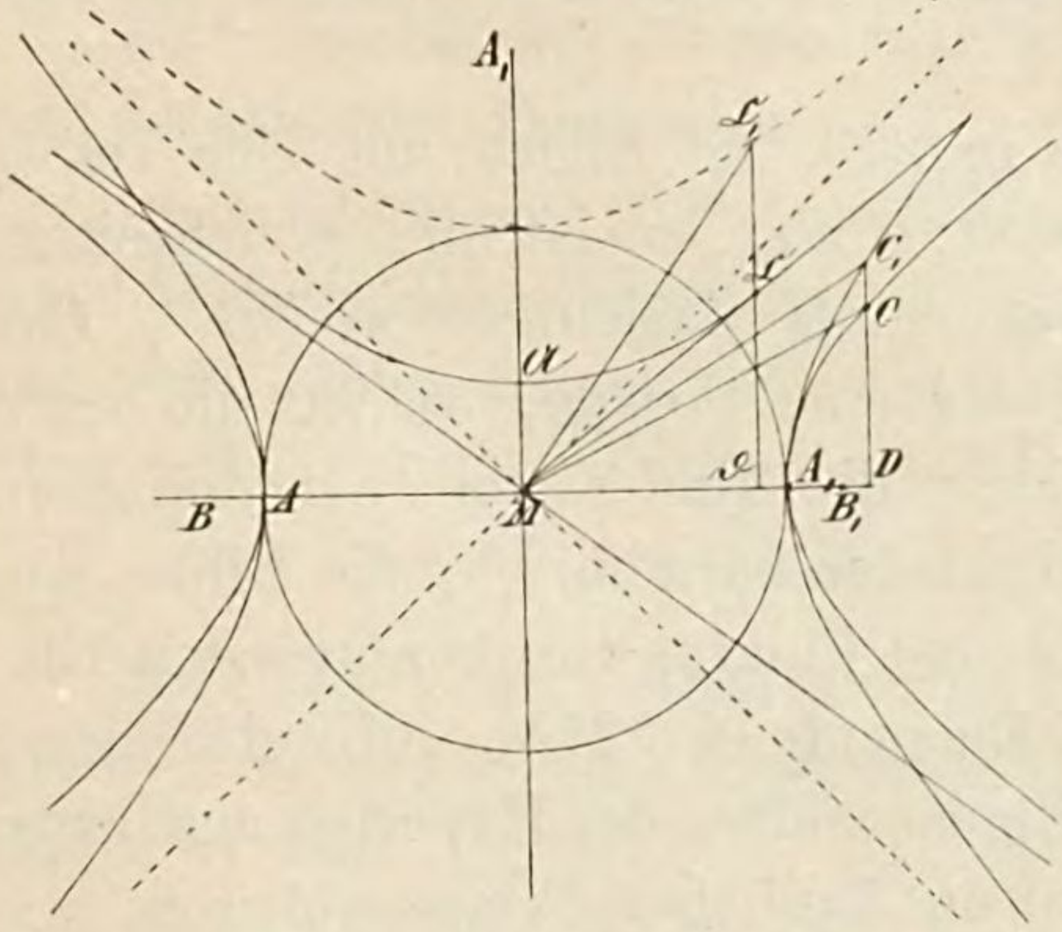


Fig. 112.

Es sei AA_1 die gemeinsame Hauptaxe einer Hyperbel $\mathfrak{H}$ mit den Axen 2a und 2b und einer gleichseitigen Hyberbel H. Eine Senkrechte zur Hauptaxe treffe die erstere in C, die andere in C_1, die Hauptaxe in D; von D ziehe man die Tangente DE an den Scheitelkreis, dann ist

$$CD : DE = b : a$$

und $$C_1 D = DE,$$

also $$CD : C_1 D = b : a,$$ d. h.

a. *Jede zur Hauptaxe senkrechte Gerade wird durch eine Hyperbel und die gleichseitige Scheitelhyperbel in Sehnen geschnitten, die sich verhalten, wie die Nebenaxe zur Hauptaxe.*

Von zwei konjugierten Durchmessern einer Hyperbel trifft nur einer dieselbe; die Gröfse des andern wird durch die *konjugierte Hyperbel* bestimmt, welche dieselben Axen hat, aber auf der Nebenaxe die Strecke $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1 = 2\mathrm{b}$ als Hauptaxe und auf der Hauptaxe die Strecke $AA_1 = 2\mathrm{a}$ als Nebenaxe hat. Daher ist die Gleichung der konjugierten Hyberbel $\mathfrak{H}_1$

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

Die gleichseitige Hyperbel mit der Hauptaxe AA_1 hat auch eine konjugierte Hyperbel H_1, die ebenfalls gleichseitig ist und deren Gleichung ist

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

Wenn daher eine Senkrechte zur Axe AA_1 die beiden Hyperbeln in $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}_1$ schneidet, so gelten die Gleichungen

$$\frac{\mathfrak{C}\mathfrak{D}^2}{b^2} - \frac{M\mathfrak{D}^2}{a^2} = 1, \text{ und } \frac{\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}^2}{a^2} - \frac{M\mathfrak{D}^2}{a^2} = 1$$

Durch Subtraktion folgt

$$\mathfrak{C}\mathfrak{D} : \mathfrak{C}_1\mathfrak{D} = b : a, \text{ d. h.}$$

b. *Jede zur Hauptaxe senkrechte Gerade wird von den beiden konjugierten Hyperbeln* $\mathfrak{H}_1$ *und* H_1 *in Sehnen geschnitten, die sich verhalten wie die Axen.*

298. Bildet man wie in 273. die Ebene auf sich selbst mittelst des Verhältnisses $b : a$ ab, so ist die gleichseitige Hyberbel H das Bild von $\mathfrak{H}$ und H_1 dasjenige von $\mathfrak{H}_1$. — Das Bild einer Geraden ist wieder eine Gerade, welche die erste auf der Axe AA_1 schneidet; die Bilder von harmonischen Punkten oder Geraden sind wieder harmonisch, die Bilder von Pol und Polare wieder Pol und Polare, von konjugierten Elementen wieder konjugierte Elemente (Cf. 274). Mittelst dieser Abbildung lassen sich die Eigenschaften der Hyperbel aus denen der gleichseitigen Hyperbel in ähnlicher Weise ableiten, wie diejenigen der Ellipse aus den Eigenschaften des Scheitelkreises. Hauptsächlich übertragbar sind die metrischen Beziehungen, weil die Abbildung selbst auf einer solchen beruht. — Zuvor sind daher einige Haupteigenschaften der gleichseitigen Hyperbel zu entwickeln.

299. *Je zwei konjugierte Durchmesser einer gleichseitigen Hyperbel sind einander gleich.*

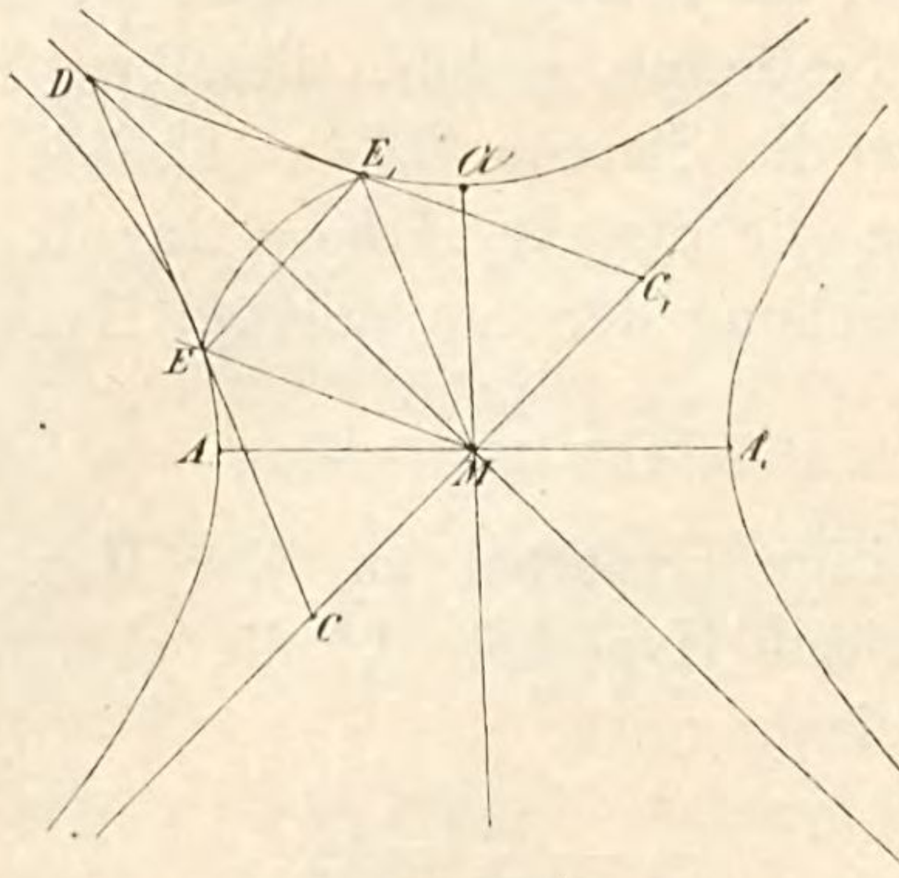


Fig. 113.

Ist ME irgend ein Halbmesser einer gleichseitigen Hyper-

bel H, C und D die Schnittpunkte der Asymptoten mit der Tangente in E, $MC_1 = MC$, so ist C_1D Tangente an die konjugierte Hyperbel. Ist E_1 der Berührungspunkt, so ist

$$C_1E_1 = E_1D = DE = EC, \text{ also}$$

$$ME_1 \parallel CD \text{ und } ME_1 = ME.$$

300. *Irgend zwei Durchmesser bilden denselben Winkel, wie ihre konjugierten Durchmesser.*

Sind ME und MF irgend zwei Halbmesser, so findet man nach vorigem Satze die konjugierten, indem man EE_1 und FF_1 senkrecht auf die Asymptote MD fällt und ME_1, MF_1 zieht. Aus Symmetriegründen folgt

$$\sphericalangle EMF = E_1MF_1.$$

301. *Jede Sehne einer gleichseitigen Hyperbel erscheint den beiden Endpunkten eines Durchmessers unter gleichen oder Supplementwinkeln.*

Sind EG die Endpunkte einer Sehne, FF' diejenigen eines Durchmessers, so sind sowohl die Geraden FE und $F'E$ als FG und $F'G$ konjugierten Durchmessern parallel (279 d. 274), also bilden nach vorigem Satze FE und FG denselben Winkel wie die konjugierten Richtungen $F'E$ und $F'G$.

302. *Jede Sehne einer gleichseitigen Hyperbel teilt den ihr conjugierten Durchmesser in solche Abschnitte, daſs ihre Hälfte zwischen denselben die mittlere Proportionale ist.*

Sind CD und EF konjugierte Gerade, so ist $EG = FG$. Da ferner CE und DE konjugierten Durchmessern parallel sind so ist

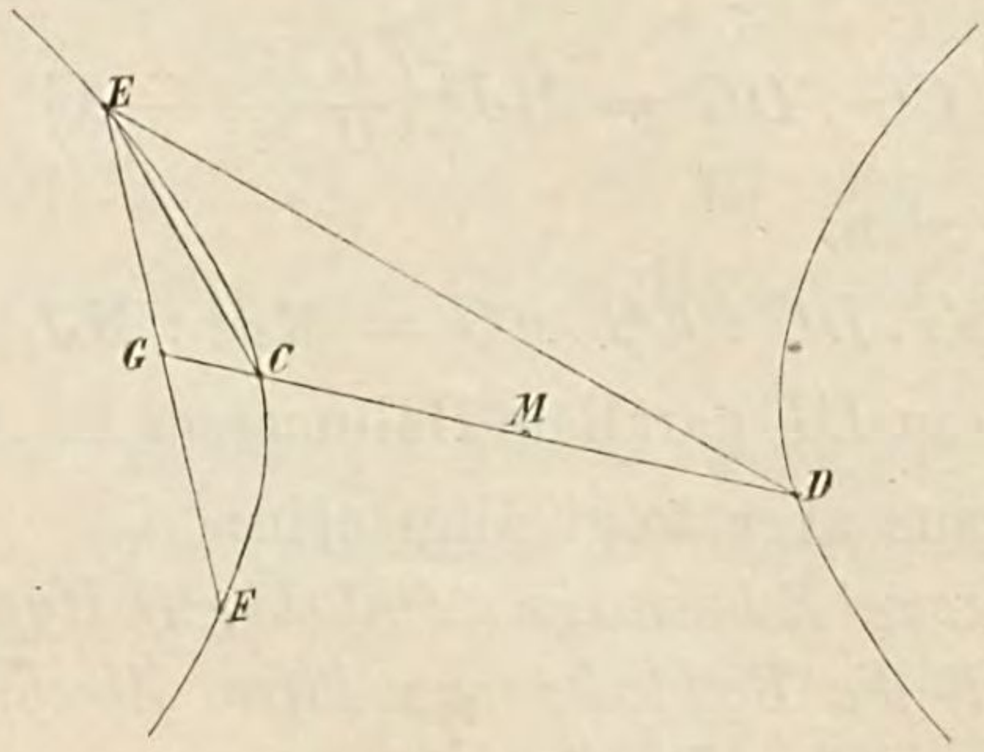


Fig. 114.

$$\sphericalangle ECG = DEG \text{ und daher } \triangle EGC \sim EGD,$$

also $$CG : EG = EG : DG$$

oder auch $$EG^2 = CG \,.\, DG = MG^2 - MC^2$$

303. *Wenn sich zwei Sehnen einer gleichseitigen Hyperbel schneiden, so verhalten sich die Rechtecke aus ihren Abschnitten, wie die Quadrate der parallelen Durchmesser.*

Die Sehnen CD und EF schneiden sich in G; ist dann H die Mitte von CD, so ist $CH^2 = HJ \,.\, HK = HM^2 - MJ^2$, also $CH^2 - GH^2 = CG \,.\, DG = HM^2 - MJ^2 - GH^2$.

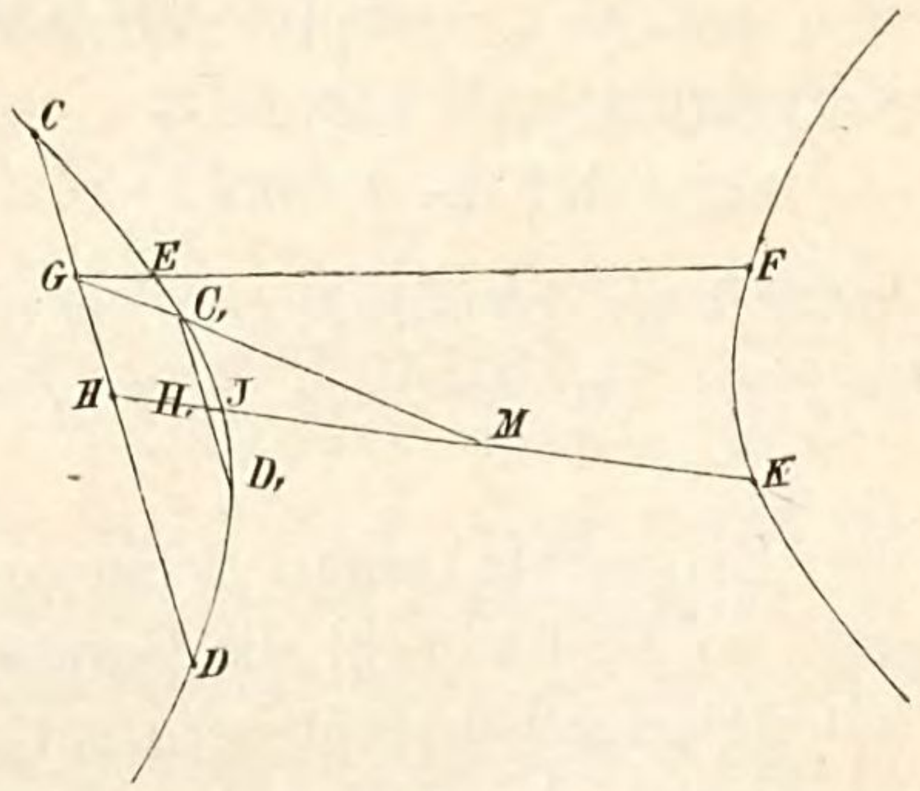


Fig. 115.

Zieht man $C_1 D_1 \parallel CD$ durch den Schnittpunkt von GM mit der Hyperbel, so ist auch $C_1 H_1 = H_1 D_1$ und $H_1 M^2 - MJ^2 = C_1 H_1^2$.

Aus der Proportion $HM : GH = H_1 M : C_1 H_1$ folgt

$$HM^2 - GH^2 : H_1 M^2 - C_1 H_1^2 = HM^2 : H_1 M^2 = GM^2 : C_1 M^2$$

also $$HM^2 - GH^2 = MJ^2 \cdot \frac{GM^2}{C_1 M^2}$$

und $$CG \,.\, DG = MJ^2 \left(\frac{GM^2}{C_1 M^2} - 1 \right)$$

Daraus ergiebt sich:

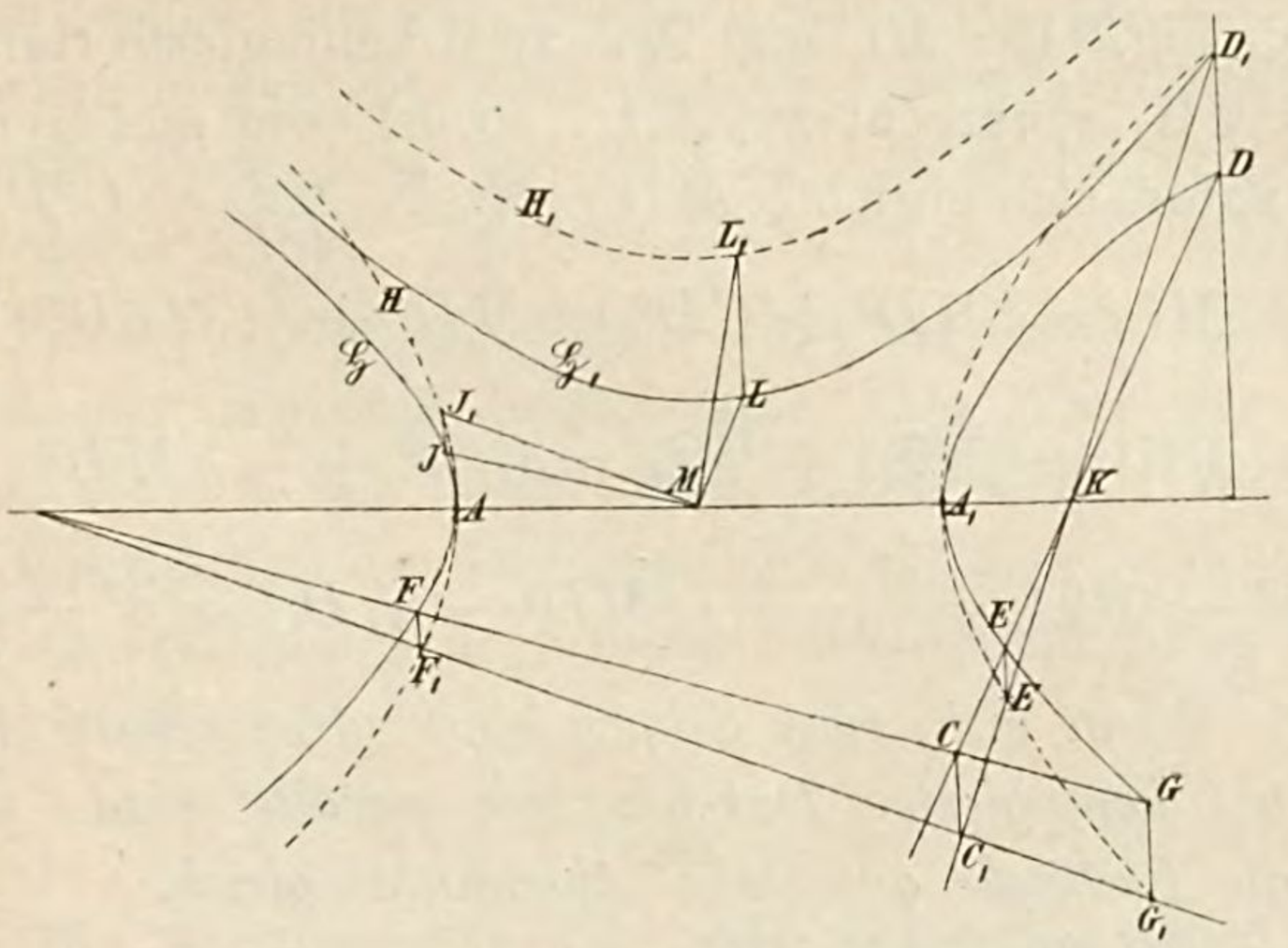
$$CG \,.\, DG : EG \,.\, FG = MJ^2 : MJ_1^2$$

wenn MJ_1 der zu EF parallele Halbmesser ist. (Cf. Seite 177).

304. Hieraus aber folgt allgemein:

Wenn sich zwei Sehnen einer (beliebigen) Hyperbel schneiden, so verhalten sich die Rechtecke aus ihren Abschnitten, wie die Quadrate der parallelen Durchmesser.

Die Sehnen DE und FG einer Hyperbel $\mathfrak{H}$ schneiden sich in C; es sei $\mathfrak{H}_1$ die konjugierte Hyperbel, ferner H die gleichseitige Scheitelhyberbel und H_1 die zu ihr konjugierte gleichseitige Hyperbel. Sind dann DD_1, EE_1, FF_1, GG_1 senkrecht zu AA_1, so schneiden sich D_1E_1 und DE sowie F_1G_1 und



Ftg. 116.

FG auf der Hauptaxe. Endlich sei $ML \parallel DE$, $MJ \parallel FG$, $LL_1 \perp AA_1$, $JJ_1 \perp AA_1$, so ist $ML_1 \parallel D_1E_1$, $MJ_1 \parallel F_1G_1$. Die Geraden D_1E_1 und F_1G_1 schneiden sich in einem Punkte C_1 so, dafs $CC_1 \perp AA_1$. Aus ähnlichen Dreiecken folgt:

$$DC : D_1C_1 = EC : E_1C_1 = DK : D_1K = LM : L_1M$$

und
$$DC \,.\, EC = D_1C_1 \,.\, E_1C_1 \,.\, \left(\frac{LM}{L_1M}\right)^2$$

$$FC \,.\, GC = F_1C_1 \,.\, G_1C_1 \,.\, \left(\frac{JM}{J_1M}\right)^2$$

Da aber
$$D_1C_1 \,.\, E_1C_1 : F_1C_1 \,.\, G_1C_1 = ML_1{}^2 : MJ_1{}^2$$

so folgt

$$DC \,.\, EC : FC \,.\, GC = LM^2 : JM^2$$

305. *Gleichung der Hyperbel in Bezug auf zwei konjugierte Durchmesser.*

Sind a_1 und b_1 die Längen zweier konjugierten Halbmesser, x und y die zu ihnen parallelen Ordinaten eines Hyperbelpunktes, so folgt wie 291.

$$\frac{x^2}{a_1{}^2} - \frac{y^2}{b_1{}^2} = 1.$$

Hieraus folgt als Gleichung der gleichseitigen Hyperbel, da $a_1 = b_1$ ist

$$x^2 - y^2 = a_1^2.$$

306. *Die Differenz der Quadrate zweier konjugierten Durchmesser einer Hyperbel ist gleich der Differenz der Axenquadrate.*

Sind (Fig. 112) MC und $M\mathfrak{C}$ zwei konjugierte Halbmesser, CC_1 und $\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$ senkrecht zu AA_1, so ist wie aus Symmetrie-gründen sofort sich ergiebt, $MD = \mathfrak{C}_1\mathfrak{D}$, $M\mathfrak{D} = C_1D$. Ferner

$$MC^2 = MD^2 + CD^2 = MD^2 + \frac{b^2}{a^2} \cdot C_1D^2$$

$$M\mathfrak{C}^2 = M\mathfrak{D}^2 + \mathfrak{C}\mathfrak{D}^2 = C_1D^2 + \frac{b^2}{a^2} \cdot MD^2$$

$$MC^2 - M\mathfrak{C}^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cdot (MD^2 - C_1D^2) = a^2 - b^2.$$

307. *Wenn sich zwei Sehnen einer gleichseitigen Hyperbel, welche zwei konjugierten Durchmessern parallel sind, schneiden, so sind die Rechtecke aus ihren Abschnitten gleich.*

Folgt aus 304. und 299.

308. *Zwei rechtwinklige Sehnen einer gleichseitigen Hyperbel teilen sich in solche Abschnitte, dafs die Rechtecke aus denselben einander gleich sind.*

Folgt aus 303, da je zwei rechtwinklige Durchmesser einander gleich sind.

309. *Der Höhenpunkt eines jeden einer gleichseitigen Hyperbel eingeschriebenen Dreiecks liegt auch auf ihr.* Cf. 194.

Ist ABC ein eingeschriebenes Dreieck, CD die Höhe auf AB, H der auf CD liegende Höhenschnittpunkt, so folgt aus ähnlichen Dreiecken

$$AD \,.\, BD = CD \,.\, HD,$$

also liegt H nach 308. auf der Hyperbel.

311. *Wenn sich zwei gleichseitige Hyperbeln in vier Punkten schneiden, so ist jeder der Höhenpunkt des von den drei anderen gebildeten Dreiecks.*

Folgt aus dem vorhergehenden Satze.

311 a. Die beiden letzten Sätze lassen sich auch auf folgende Art ableiten.

ABC sei ein eingeschriebenes Dreieck, CD senkrecht

auf AB und H der Schnittpunkt mit der gleichseitigen Hyperbel. Um H beschreibe man einen Kreis und bilde von der Hyperbel die Polarisationsfigur. Diese ist eine Parabel. Denn die Polare von H ist die unendlich ferne Gerade. Zieht man von H aus nach den Berührungspunkten der Asymptoten die Verbindungslinien, so stehen sie auf einander senkrecht und die Polaren dieser Berührungspunkte sind also zwei sich in H rechtwinklig schneidende Tangenten der Parabel. Also liegt H auf der Leitlinie der Parabel. Die Polaren $a_1\ b_1\ c_1$ von ABC bilden ein der Parabel umgeschriebenes Dreieck, dessen Höhenpunkt (221) auf der Leitlinie liegen mufs. Da aber der Schnittpunkt $(a_1\ b_1)$ auf der Senkrechten CHD liegen mufs, so ist H der Höhenpunkt des Dreiseits $a_1\ b_1\ c_1$, also auch des Dreiecks ABC, weil die Polare eines Punktes auf seiner Centrale senkrecht steht.

§ 20.

Die Berührungskreise eines Kegelschnittes.

312. Ein Kegelschnitt wird von einem Kreise im Allgemeinen in vier Punkten $ABCD$ geschnitten: Wenn von diesen vier Schnittpunkten zwei, etwa A und B in einen zusammenfallen, so haben der Kegelschnitt und der Kreis in diesem eine *Berührung der ersten Ordnung;* wenn zwei Paar Schnittpunkte, etwa A mit B und C mit D zusammenfallen, so berühren sich die beiden Kurven *doppelt;* wenn drei der vier Schnittpunkte, etwa ABC, in einen A zusammenfallen, so hat der Kreis in diesem eine Berührung der *zweiten Ordnung.* Der Kreis heifst der *Krümmungskreis* des Kegelschnittes im Punkte A. Fallen endlich alle vier Schnittpunkte zusammen, so haben Kreis und Kegelschnitt eine Berührung *der dritten Ordnung;* doch kann man im Allgemeinen keinen Kreis beschreiben, der mit einem Kegelschnitte eine Berührung dritter Ordnung eingeht, denn zur Bestimmung eines Kreises sind drei Punkte hinreichend.

313. Aus der Erzeugung des Kegelschnittes durch Brennpunkt und Leitlinie (cf. 247), also als Ort eines Punktes, dessen Abstände von einem festen Punkte B und einer festen Geraden l ein konstantes Verhältnis haben, geht eine Gruppe von

doppelt berührenden Kreisen hervor, als deren Einhüllende der Kegelschnitt erscheint. Zieht man nämlich durch den Punkt B irgend eine Gerade, welche l in D trifft, ferner $BC \perp l$ und in den Scheiteln A und A_1 des Kegelschnittes

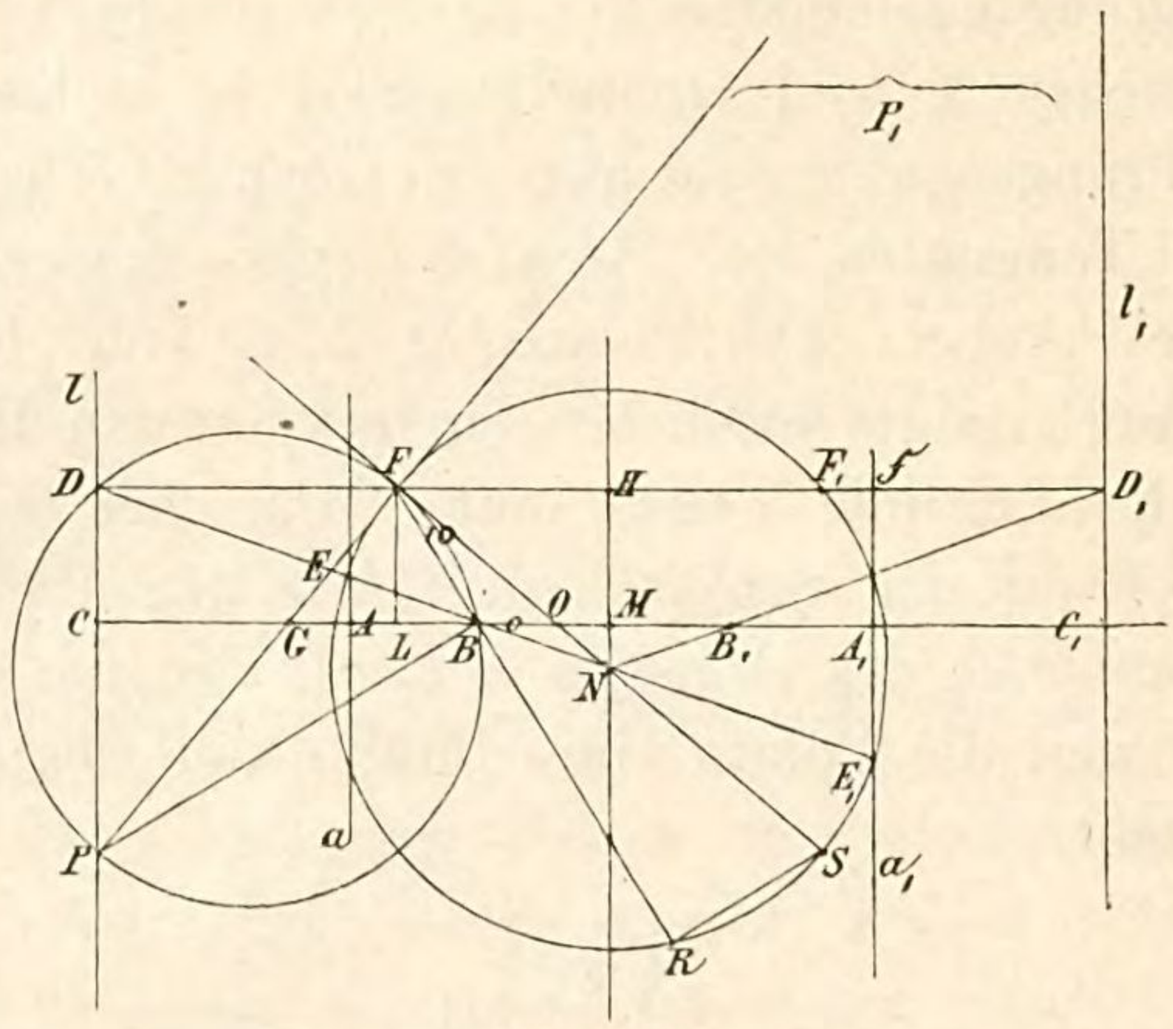


Fig. 117.

die Scheiteltangenten a und a_1, schneidet dann BD mit der Nebenaxe in N und die Scheiteltangenten in EE_1, so trifft der mit NE beschriebene Kreis die in D zur Hauptaxe gezogene Parallele in zwei Punkten F und F_1 des Kegelschnittes, denn

$$FB : FD = BE : ED = BA : AC$$

Aufser F und F_1 kann aber der Kreis N mit dem Kegelschnitte keinen Punkt gemeinsam haben; denn ist X ein beliebiger Kreispunkt, $XY \perp l$, so ist

$$XB : XD = BE : ED = BA : AC.$$

Weil aber $XD > XY$ ist, so ist stets

$$XB : XY > BA : AC,$$

also kann Y nicht auf dem Kegelschnitte liegen und daher wird dieser von dem Kreise N in F und F_1 also doppelt berührt.

Kreis und Kegelschnitt haben in F und F_1 dieselben Tangenten.

Die Gerade FN, welche auf der Tangente senkrecht steht, heifst die *Normale* des Kegelschnittes im Punkte F.

Aus dieser Konstruktion ergiebt sich eine Haupteigenschaft der Tangenten.

Die Tangente in F schneide die beiden Leitlinien in P und P_1; da $NF^2 = NE^2 = NB \,.\, ND$ (4 c.), so mufs der durch BDF gelegte Kreis NF in F berühren. Sein Mittelpunkt mufs auf PF liegen, weil $\sphericalangle NFP = 90^0$ ist und daher auch durch P gehen, da auch $\sphericalangle FDP = 90^0$ ist. Im Kreisvierecke $BFDP$ ist $\sphericalangle BFP = BDP$. Aus gleichen Gründen folgt für den zweiten Brennpunkt B_1, dafs $B_1FD_1P_1$ ein Kreisviereck und $\sphericalangle B_1FP_1 + B_1D_1P_1 = 180^0$ ist; wegen Kongruenz der Dreiecke BCD und $B_1C_1D_1$ folgt, dafs $\sphericalangle BDC = B_1D_1C_1$, also auch $\sphericalangle BFP = B_1FP_1$ ist, d. h.

Die Tangente bildet mit den Brennpunktsstrahlen des Berührungspunktes gleiche Winkel. Cf. 252.

314. Aus ähnlichen Dreiecken folgert man leicht

$$\begin{aligned} FO : FN : ON &= HM : HN : MN \\ &= CD : HN : MN \\ &= CB : CM : MB \end{aligned}$$

Da $MB \,.\, MC = MA^2 = a^2$, $MB = e$, so folgt

$$MC = \frac{a^2}{e},\ BC = MC - MB = \frac{a^2}{e} - e = \frac{a^2 - e^2}{e} = \frac{b^2}{e}$$

und

$$FO : FN : ON = b^2 : a^2 : e^2$$

d. h. *die Abschnitte, in welche Tangente und Axen eine Normale teilen, verhalten sich wie die Quadrate der Halbaxen und der Excentricität.* Cf. 289.

315. Aus den ähnlichen Dreiecken BFO und BDF folgt

$$BO : BF = BF : DF = AB : AC = e : a,$$

d. h. *die Strecke der Hauptaxe zwischen Normale eines Punktes und Brennpunkt verhält sich zur Brennpunktsentfernung dieses Punktes wie die Excentricität zur Hauptaxe.*

Bei der Parabel ist $BO = BF$.

316. Tangente und Normale stehen aufeinander senkrecht und halbieren die Winkel der Brennpunktsstrahlen nach ihrem Schnittpunkte (313), sind mithin vier harmonische Strahlen und schneiden die Hauptaxe in vier harmonischen Punkten,

von denen zwei zugeordnete die Brennpunkte sind. Diese werden also durch jedes Paar Tangente und Normale harmonisch getrennt, d. h.

Die Paare von Tangente und Normale bestimmen auf der Hauptaxe eine Involution, welche den Mittelpunkt des Kegelschnittes zum Centrum und das Quadrat der halben Excentricität zur Potenz hat.

Aus Symmetriegründen folgt:

Der Kreis um O mit OF berührt den Kegelschnitt doppelt.

317. Diejenigen Kreise, welche einen Kegelschnitt doppelt berühren, teilen sich in zwei Gruppen, in solche, die ihn umschliefsend berühren und deren Mittelpunkte auf der Hauptaxe liegen und in solche, welche den Kegelschnitt innerhalb berühren und ihre Mittelpunkte auf der Nebenaxe haben. Die ersteren liegen ganz aufserhalb, die letzteren ganz innerhalb des Kegelschnittes.

Wenn der Punkt F nach A rückt, so rückt der Punkt N nach M und der zur ersten aufserhalb liegenden Gruppe gehörige Kreis wird der Scheitelkreis, welcher den Kegelschnitt in A und A_1 berührt. Die Lage des Punktes O, welcher nach O' rücken mag, mufs aus der Gleichung $AO' : AM = b^2 : a^2$ bestimmt werden und da $AM = a$ ist, so wird

$$AO' = \frac{b^2}{a}.$$

Macht man auf der Hauptaxe $MO'' = MO'$, so befinden sich zwischen O' und O'' die Mittelpunkte aller derjenigen doppelt berührenden Kreise, welche innerhalb des Kegelschnittes liegen.

Gelangt der Punkt F in einen Scheitel $\mathfrak{A}$ der Nebenaxe, so fällt O mit M und N mit einem Punkte N' zusammen, welcher wieder aus der Gleichung $\mathfrak{A}M : \mathfrak{A}N' = b^2 : a^2$ bestimmt wird, so dafs also, da $\mathfrak{A}M = b$ ist,

$$\mathfrak{A}N' = \frac{a^2}{b}$$

wird. Schneidet man also auf der Nebenaxe $MN'' = MN'$ ab, so befinden sich sich zwischen N' und N'' die Mittelpunkte aller Kreise, welche den Kegelschnitt doppelt berühren und ihn umschliefsen.

Die mit $O'A$ um O' und $N'\mathfrak{A}$ um N' beschriebenen Kreise sind die Krümmungskreise in den Scheiteln A und $\mathfrak{A}$. Die Abstände ihrer Mittelpunkte vom Mittelpunkte der Ellipse findet man durch die Gleichungen

$$MO' = a - \frac{b^2}{a} = \frac{e^2}{a}$$

$$MN' = \frac{a^2}{b} - b = \frac{e^2}{b}.$$

Der Radius des ersten Kreises ist gleich dem halben Parameter, also gleich der halben auf der Hauptaxe senkrechten Brennpunktssehne.

Den Mittelpunkt N' findet man bequem, indem man im Brennpunkte B auf der Geraden $\mathfrak{A}B$, welche einen Scheitel der Nebenaxe mit dem Brennpunkte verbindet, die Senkrechte bis zum Durchschnitte mit der Nebenaxe erhebt.

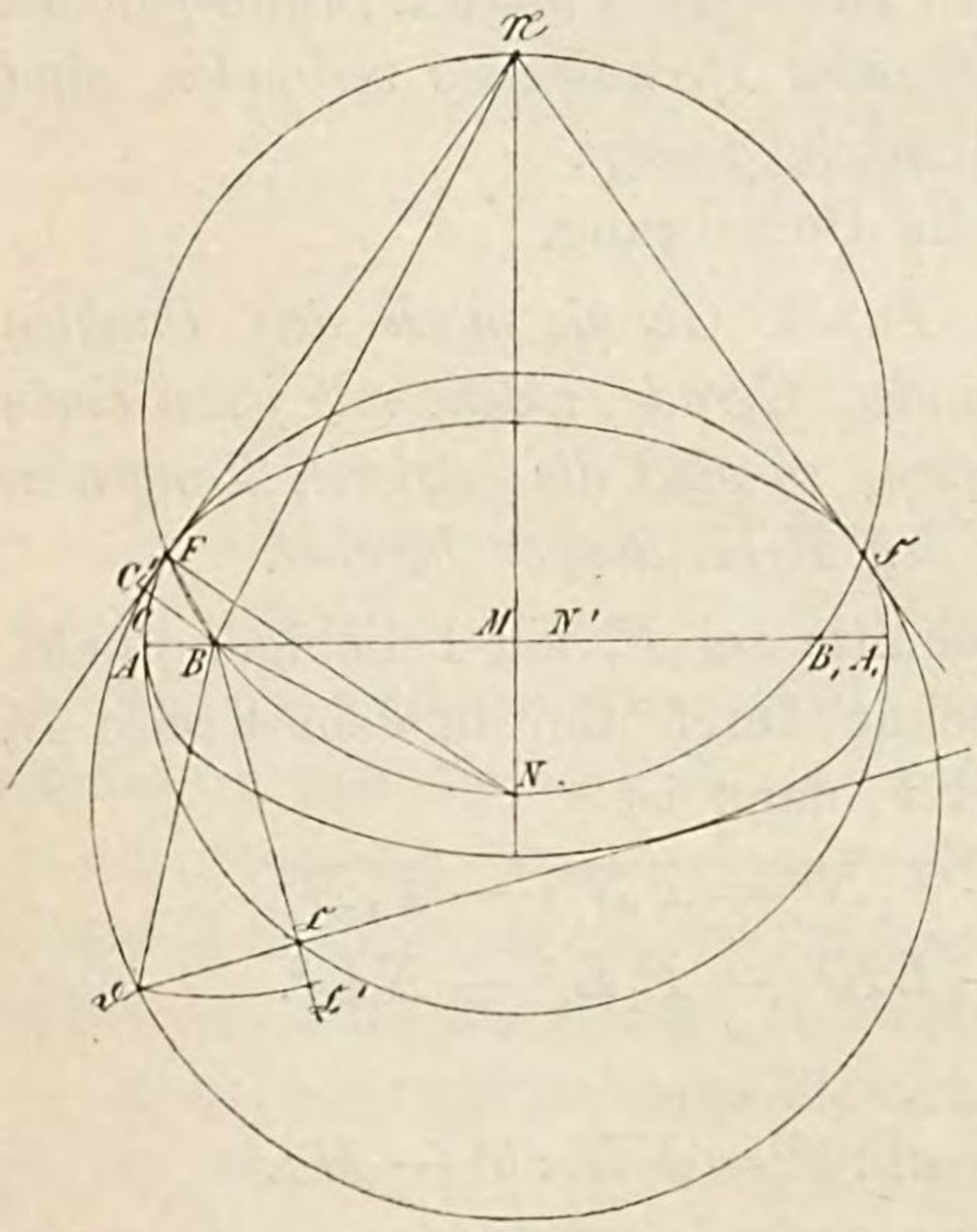


Fig. 118.

318. Tangente und Normale in F schneiden die Nebenaxe in N und $\mathfrak{N}$; nach 289a. ist

$$MN \,.\, M\mathfrak{N} = MB^2,$$

also geht der über $N\mathfrak{N}$ als Durchmesser beschriebene Kreis durch B und, weil $\sphericalangle NF\mathfrak{N} = 90^0$, auch durch F und es ist

$$\sphericalangle FN\mathfrak{N} = FB\mathfrak{N} = \varphi.$$

Fällt man BC senkrecht auf die Tangente $F\mathfrak{N}$ und macht $BC' = BF$, so ist

$$BC : BC' = BC : BF.$$

Da aber $\sphericalangle CBF = BFN = BB_1N = MBN$, so folgt aus ähnlichen Dreiecken

$$BC : BF = BM : BN.$$

Der Punkt C liegt auf dem Scheitelkreise; wird der letztere von C durchlaufen und auf BC der Punkt C' stets durch die Proportion $BC : BC' = BM : BN$ bestimmt, so durchläuft C'

einen Kreis N', dessen Mittelpunkt N' auf BM liegt, weil B der Ähnlichkeitspunkt des Kreises N' und des Scheitelkreises ist. Es ist also $BM : BN' = BC : BC'$.

Dreht man nun den Kreis N' um den Punkt B um einen Winkel von $90^0 - \varphi$, so fällt N' auf N, C' auf F, also der Kreis N' auf den Kreis N.

Ist $\mathfrak{C}$ irgend eine Lage des Punktes C auf dem Scheitelkreise, $\mathfrak{C}'$ der Schnittpunkt von $B\mathfrak{C}$ mit dem Kreise N', so fällt nach der Drehung $\mathfrak{C}'$ auf einen Punkt $\mathfrak{D}$ des Kreises N.

Da $$\sphericalangle \mathfrak{C}'B\mathfrak{D} = N'BN = 90^0 - \varphi$$

und $$B\mathfrak{C} : B\mathfrak{D} = B\mathfrak{C} : B\mathfrak{C}' = BM : BN$$

ist, so ist $\triangle B\mathfrak{C}\mathfrak{D} \sim BMN$ und $\sphericalangle B\mathfrak{C}\mathfrak{D} = BMN = 90^0$

und $< B\mathfrak{D}\mathfrak{C} = BNM = \varphi$.

Mithin ist $\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ eine Tangente des Kegelschnittes und es folgt:

Die Geraden, welche einen Brennpunkt mit den Schnittpunkten der Kegelschnitttangenten und eines Brennkreises verbinden, sind gegen diese unter gleichen Winkeln geneigt.

Ebenso beweist man die Umkehrung.

Zieht man von einem Punkte Gerade nach den Punkten eines Kreises und in diesen andere Gerade, welche mit jenen einen bestimmten Winkel einschliefsen, so sind die letzteren Tangenten eines Kegelschnittes, welcher den Kreis doppelt berührt.

319. Auf dem Kegelschnitte sei F_1 ein beliebiger Punkt, F_1T die halbe kürzeste Sehne durch ihn in dem Kreise N, F_1L_1 senkrecht zur Nebenaxe, dann ist

$$F_1T^2 = NT^2 - F_1N^2 = FN^2 - F_1N^2$$
$$= FL^2 + LN^2 - F_1L_1{}^2 - NL_1{}^2.$$

Nach 290. 304 ist

$$FL^2 : \mathfrak{A}L \,.\, \mathfrak{A}_1L = a^2 : b^2 = FL^2 : b^2 - ML^2$$

und $$F_1L_1{}^2 : b^2 - ML_1{}^2 = a^2 : b^2,$$

also $$F_1T^2 = \frac{a^2}{b^2}(ML_1{}^2 - ML^2) + NL^2 - NL_1{}^2$$

$$= \frac{a^2}{b^2} \,.\, LL_1(ML_1 - ML) + LL_1(NL + NL_1).$$

Aber $NL + NL_1 = 2NM - (ML_1 - ML)$ und da

$$NM : ML = NO : OF = e^2 : b^2$$

$$F_1T^2 = LL_1\,(ML_1 - ML)\cdot\frac{e^2}{b^2} + 2ML\cdot LL_1\cdot\frac{e^2}{b^2}$$

$$= LL_1{}^2\cdot\frac{e^2}{b^2},$$

mithin $$F_1T : LL_1 = e : b,$$ d. h.

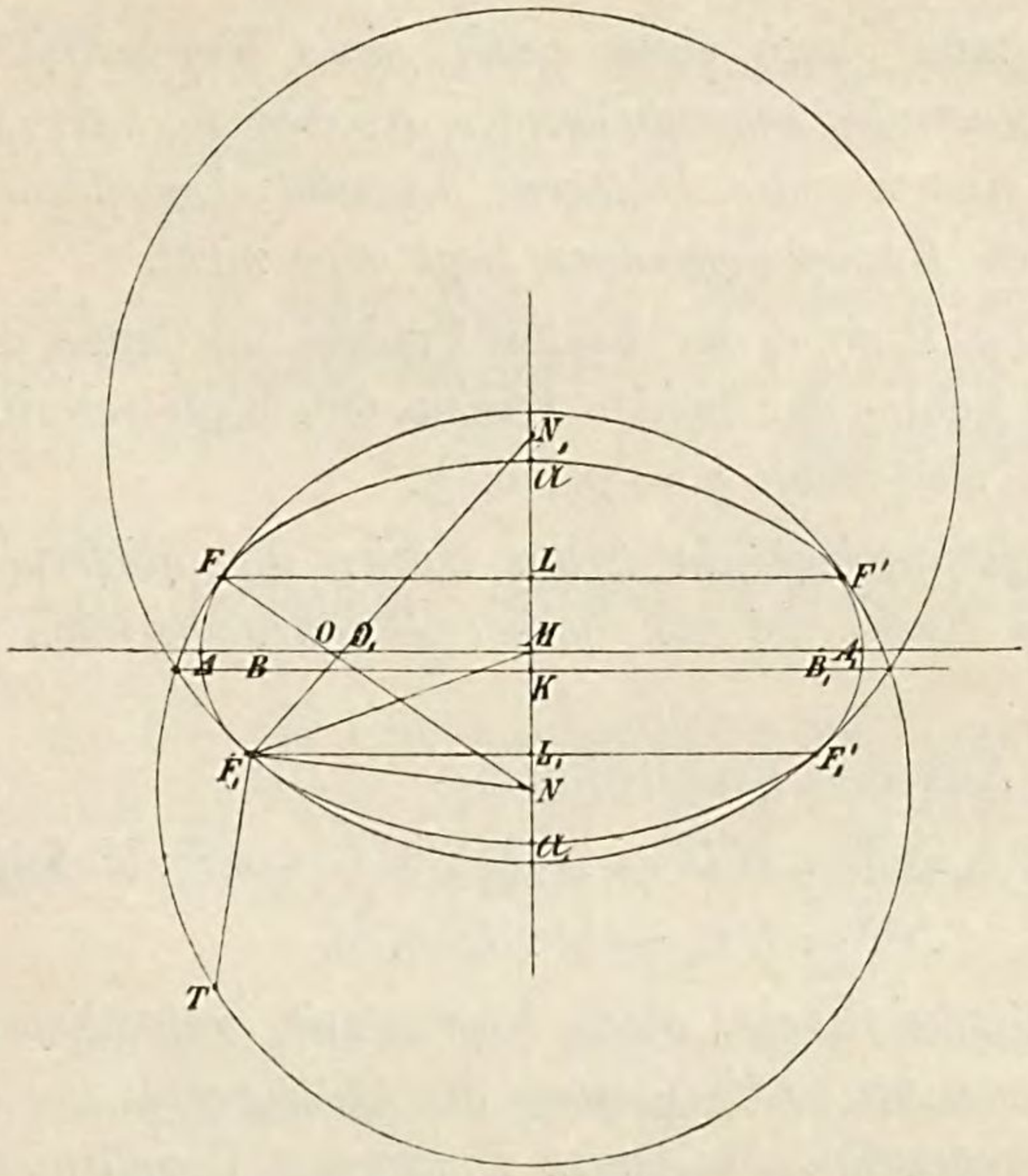


Fig. 119.

Zieht man durch einen Punkt eines Kegelschnittes in einem denselben doppelt berührenden umschliefsenden Kreise die halbe kürzeste Sehne und die Senkrechte auf die Berührungssehne, so ist das Verhältnis der beiden Strecken konstant gleich dem Verhältnis der Excentricität zur Nebenaxe.

320. In F_1 errichte man die Normale F_1N_1 und beschreibe mit ihr um N_1 den doppelt berührenden Kreis. Durch einen Punkt P auf dem Kegelschnitte, welcher zwischen beiden Berührungssehnen liegen mag, denke man sich in jedem der Berührungskreise die halbe kürzeste Sehne s und s_1 gezogen und auf die Berührungssehnen die Senkrechten p und p_1 gefällt, so verhält sich

$$s : p = s_1 : p_1 = e : b,$$

also auch $$s + s_1 : p + p_1 = e : b$$

$$s + s_1 = LL_1 \cdot \frac{e}{b}.$$

Liegt P nicht zwischen den Berührungssehnen, so wird man erhalten

$$s - s_1 = LL_1 \cdot \frac{e}{b}, \text{ d. h.}$$

Zieht man durch einen Punkt eines Kegelschnittes in zwei doppelt berührenden umschliefsenden Kreisen die kürzesten Schnen, so ist ihre Summe oder Differenz konstant, jenachdem der Punkt zwischen den Berührungssehnen liegt oder nicht.

321. Ist P einer der beiden Punkte, in denen die gemeinschaftliche Sehne der beiden Kreise den Kegelschnitt trifft, so ist $s = s_1$, also auch $p = p_1$, d. h.

Die gemeinschaftliche Sehne zweier umschliefsenden doppelt berührenden Kreise ist von beiden Berührungssehnen gleich weit entfernt.

322. Aus den Proportionen

$NM : ML = N_1M : ML_1 = e^2 : b^2$ folgt

$NN_1 : LL_1 = e^2 : b^2$, d. h.

Wenn zwei Kreise einen Kegelschnitt umschliefsend doppelt berühren, so steht die Entfernung der Mittelpunkte zur Entfernung der Berührungssehnen in einem konstanten Verhältnisse.

323. Beschreibt man um die Punkte O und O_1 mit den Radien OF und O_1F_1 Kreise, so berühren diese den Kegelschnitt doppelt und sind von ihm eingeschlossen. Von solchen Kreisen ergeben sich in analoger Weise die Sätze:

a. *Zieht man durch einen Kegelschnittpunkt an einen doppelt berührenden Kreis die Tangente, so ist ihr Verhältnis zur Entfernung des Punktes von der Berührungssehne konstant, und zwar gleich dem Verhältnisse der Excentricität zur Hauptaxe.*

b. *Zieht man durch einen Kegelschnittpunkt an zwei doppelt berührende eingeschlossene Kreise Tangenten, so ist ihre Summe oder Differenz konstant, jenachdem der Punkt zwischen den Berührungssehnen liegt oder nicht.*

c. *Die gemeinschaftliche Sehne zweier eingeschlossenen doppelt berührenden Kreise ist von der Berührungssehne gleich weit entfernt.*

324. Wegen der Analogie mancher Eigenschaften der

doppelt berührenden Kreise mit den Brennpunkten nennt man erstere *Brennkreise* des Kegelschnittes. Sie sollen gleichartig oder ungleichartig heifsen, jenachdem die Mittelpunkte auf derselben Axe oder auf verschiedenen Axen liegen.

325. *Sind F und F_1 die Berührungspunkte zweier gleichartigen Brennkreise N und N_1, so ist die Tangente von F an N_1 gleich derjenigen von F_1 an N oder die kürzeste Sehne durch F in N_1 gleich derjenigen durch F_1 in N.*

Folgt aus 319.

326. Sind FF' und F_1F_1' die Berührungspunkte eines Kegelschnittes mit zwei Brennkreisen N und N_1, so sollen die vier Sehnen FF_1, FF_1', $F'F_1$, $F'F_1'$ nach Steiner *Wechselsehnen* heifsen.

327. *Jede Wechselsehne schneidet in beiden Kreisen gleiche Sehnen ab.*

FF_1 schneide die gemeinschaftliche Sehne der Kreise in Q, diese selbst in S und S_1; also ist $QS \,.\, QF = QS_1 \,.\, QF_1$. Da aber $QF = QF_1$, so ist auch $QS = QS_1$ und daher auch

$$FS = F_1S_1.$$

328. Von den Sätzen 319, 320, 323a, b, c gilt auch die Umkehrung und läfst sich in analoger Weise darthun:

a. *Der geometrische Ort eines Punktes, dessen Abstand von einer festen Geraden zu seiner Tangente oder kürzesten Sehne an einen festen Kreis in einem bestimmten Verhältnisse steht, ist ein Kegelschnitt, der den Kreis doppelt berührt.*

b. *Der geometrische Ort eines Punktes, für welchen die Summe (Differenz) der Tangenten oder kürzesten Sehnen an zwei Kreise konstant ist, ist ein Kegelschnitt, der beide Kreise doppelt berührt.*

c. *Zwei Gerade, die gleichweit von der gemeinschaftlichen Sehne zweier Kreise entfernt sind, schneiden diese in solchen Punkten, durch welche sich ein beide Kreise doppelt berührender Kegelschnitt legen läfst.*

329. *Werden zwei Kreise N und N_1 von zwei Kegelschnitten K und $\mathfrak{K}$ doppelt berührt, so liegen die acht Berührungspunkte auf einem dritten Kegelschnitte.*

Die Berührungspunkte seien FF' und F_1F_1' auf K, $\mathfrak{F}\mathfrak{F}'$

und $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_1'$ auf $\mathfrak{K}$. In dem Sechsecke $F\mathfrak{F}\mathfrak{F}_1F_1F_1'F'$ seien GHJ die Schnittpunkte der Gegenseiten, ferner R und R_1 die

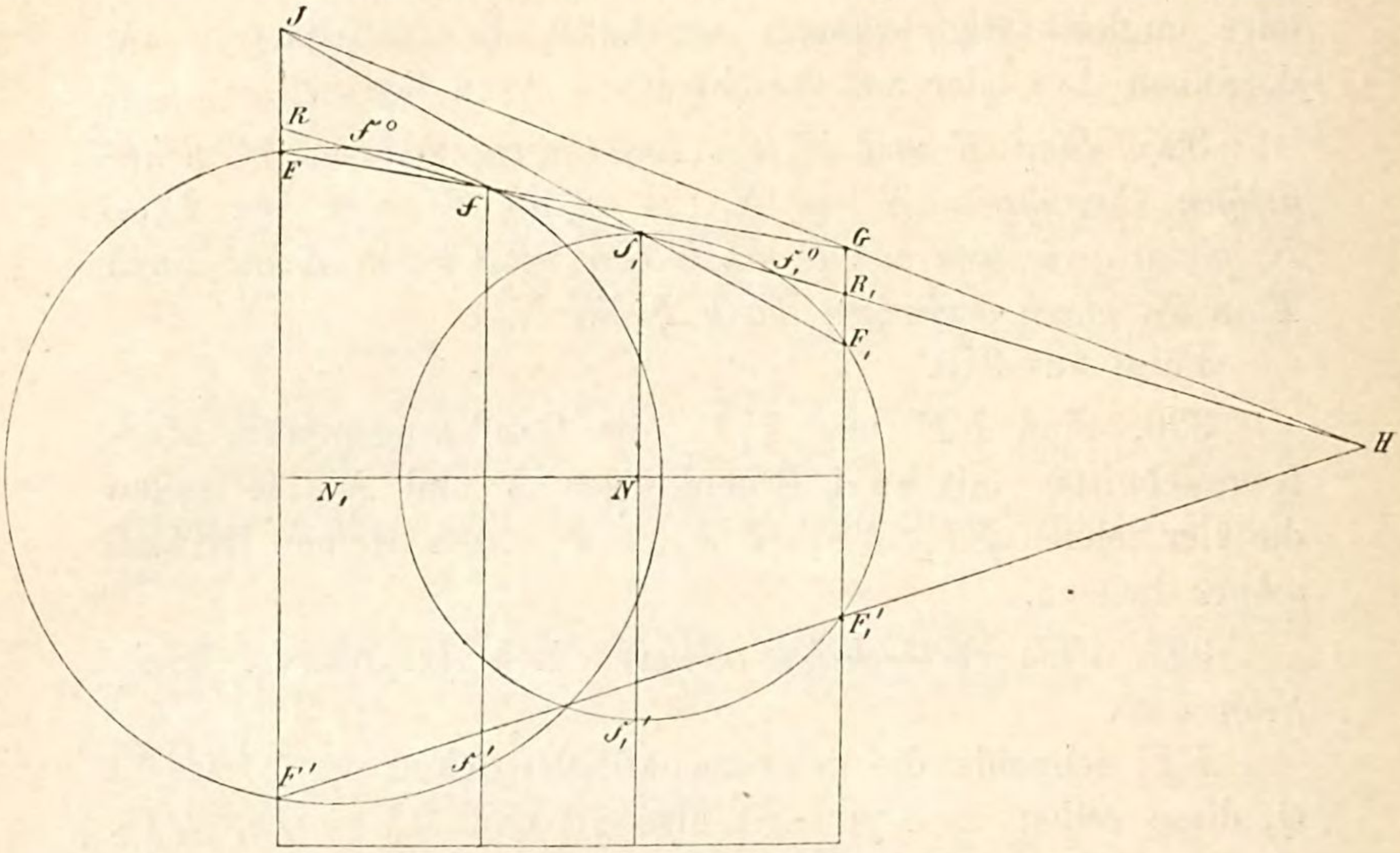


Fig. 120.

Schnittpunkte von $\mathfrak{F}\mathfrak{F}_1$ mit FF' und F_1F_1', dann folgt aus ähnlichen Dreiecken

$$RF \,.\, R_1\mathfrak{F} = R\mathfrak{F} \,.\, R_1G$$
$$RJ \,.\, R_1\mathfrak{F}_1 = R\mathfrak{F}_1 \,.\, R_1F_1$$
$$RF' \,.\, R_1H = RH \,.\, R_1F_1'.$$

Multipliziert man diese Gleichungen und berücksichtigt, daſs $R\mathfrak{F}_1 = R_1\mathfrak{F}$, $R\mathfrak{F} = R_1\mathfrak{F}_1$, so erhält man

$$RF \,.\, RF' \,.\, RJ \,.\, R_1H = R_1G \,.\, R_1F_1 \,.\, RH \,.\, R_1F_1'.$$

Nennt man die Schnittpunkte der Wechselsehne $\mathfrak{F}\mathfrak{F}_1$ mit den Kreisen $\mathfrak{F}^0$ und $\mathfrak{F}_1{}^0$, so ist

$$\mathfrak{F}\mathfrak{F}^0 = \mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_1{}^0 \text{ und da auch } R\mathfrak{F} = R_1\mathfrak{F}_1,$$
$$\text{so ist auch } R\mathfrak{F}^0 = R_1\mathfrak{F}_1{}^0,$$

mithin

$$R\mathfrak{F} \,.\, R\mathfrak{F}^0 = R_1\mathfrak{F}_1 \,.\, R_1\mathfrak{F}_1{}^0 \text{ oder } RF \,.\, RF' = R_1F_1 \,.\, R_1F_1'$$

folglich auch

$$RJ \,.\, R_1H = RH \,.\, R_1G \text{ oder } RJ : RH = R_1G : R_1H$$

d. h. die Punkte GHJ liegen in einer Geraden, also $FF'F_1F_1'\mathfrak{F}\mathfrak{F}_1$

auf einem Kegelschnitte, der aus Symmetriegründen auch durch $\mathfrak{F}'\mathfrak{F}_1'$ gehen mufs.

Umkehrung. Legt man durch die Berührungspunkte zweier gleichartigen Brennkreise einen Kegelschnitt, welcher jene noch in vier Punkten schneidet, so läfst sich durch dieselben ein doppelt berührender Kegelschnitt legen.

330. *Die gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kreise bilden in einem doppelten berührenden Kegelschnitte gleiche Sehnen, welche gleich der Summe der Tangenten oder halben kürzesten Sehnen eines Kegelschnittpunktes sind.*

Eine gemeinschaftliche Tangente berühre in UU_1 und schneide den Kegelschnitt in VV_1, dann ist nach 323b

$$VU + VU_1 = V_1U + V_1U_1$$

oder $$2VU + UU_1 = 2V_1U_1 + UU_1$$

also $$VU = V_1U_1 \text{ und } VU + VU_1 = VV_1$$

konstant.

331. *Zieht man in einem Brennkreise, dessen Mittelpunkt auf der Nebenaxe liegt, durch einen Berührungspunkt die Brennpunktssehne, so ist diese gleich der Hauptaxe.*

Verlängert man (Fig. 117) die Tangente in F bis zum Durchschnitte mit der Leitlinie l in P, so ist, da

$$\sphericalangle FDP = FBP = 90^0,$$

$BFDP$ ein Kreisviereck, also $\sphericalangle BDF = BPF = OFB$, da $\sphericalangle OFP = 90^0$ ist, also auch $\sphericalangle EBA = RFS$ und aus ähnlichen Dreiecken

$$FS : FR = NE : MA.$$

Da $FS = 2NE$, so ist $FR = 2MA = 2a$.

332. *Die Senkrechte vom Mittelpunkte M des Kegelschnittes auf die Normale eines Punktes F desselben schneidet auf den Brennstrahlen des letzteren Strecken ab, welche gleich der halben Hauptaxe sind.*

Die Senkrechte MC treffe die Brennstrahlen in D und D_1; zieht man $B_1E \parallel DD_1$, so ist

$$FD = FD_1,\ DE = D_1B_1 \text{ und auch } DE = DB,$$

also $$FD + FD_1 = FB + FB_1 = 2a$$

und $$FD = a.$$

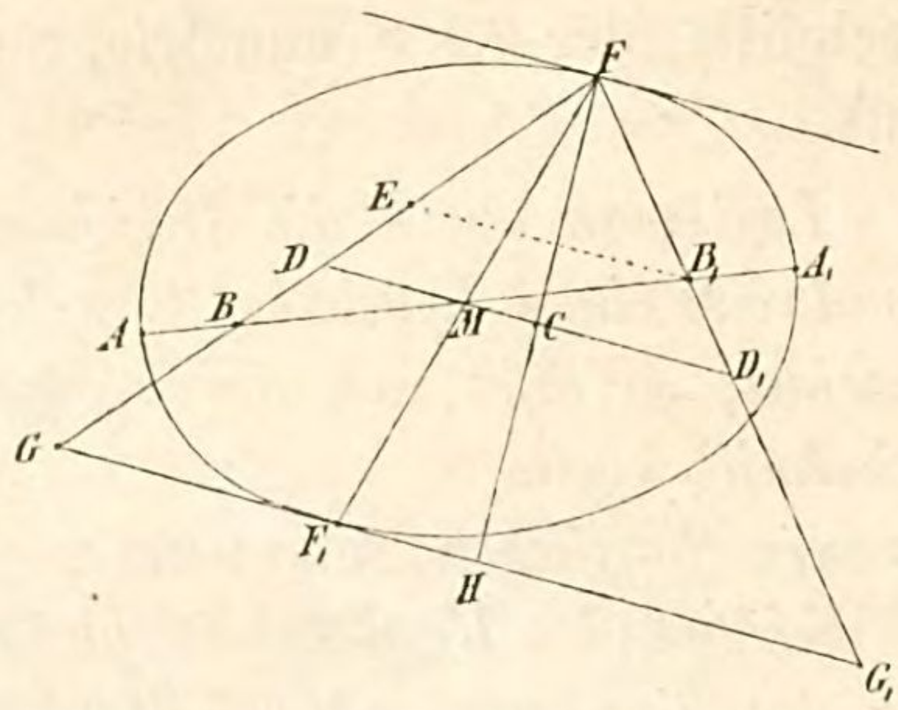


Fig. 121.

333. *Zieht man durch einen Kegelschnittpunkt F die Brennstrahlen und schneidet auf ihnen Strecken gleich der Hauptaxe ab, so ist die Verbindungslinie der Endpunkte eine Tangente des Kegelschnittes, welche zur Normale in F senkrecht steht* oder

Die Strecken, welche zwei parallele Tangenten auf den Brennstrahlen eines Berührungspunktes begrenzen, sind gleich der Hauptaxe.

Zieht man den Durchmesser FF_1 uud in F_1 die zur Tangente in F parallele Tangente, so folgt aus der Proportion

$$FG : DG = FG_1 : D_1G_1 = FF_1 : F_1M,$$

dafs $FG = FG_1 = 2a$

ist.

334. *Die doppelt berührenden Kreise der Parabel.*

Von den beiden Gruppen doppelt berührender Kreise eines Centralkegelschnittes geht die eine, deren Mittelpunkte auf der Nebenaxe liegen, in die Tangenten der Parabel über; die andere Gruppe hat ihre Mittelpunkte auf der Hauptaxe.

In einem Punkte F einer Parabel mit dem Scheitel A und dem Brennpunkte B (Fig. 122) ziehe man die Tangente FG und die Normale FO, so berührt der mit OF um O beschriebene Kreis die Parabel doppelt. Da FG und FO die Winkel der beiden Brennpunktsstrahlen in F halbieren, so mufs $GB = OB$ sein:

a. *Die Strecke der Hauptaxe zwischen Tangente und Normale eines Parabelpunktes wird durch den Brennpunkt halbiert.*

Ist F_1 ein beliebiger anderer Parabelpunkt, FL und F_1L_1 senkrecht zur Hauptaxe, so ist das Tangentenquadrat

$$F_1T^2 = F_1O^2 - FO^2 = F_1L_1^2 - FL^2 - (OL^2 - OL_1^2).$$

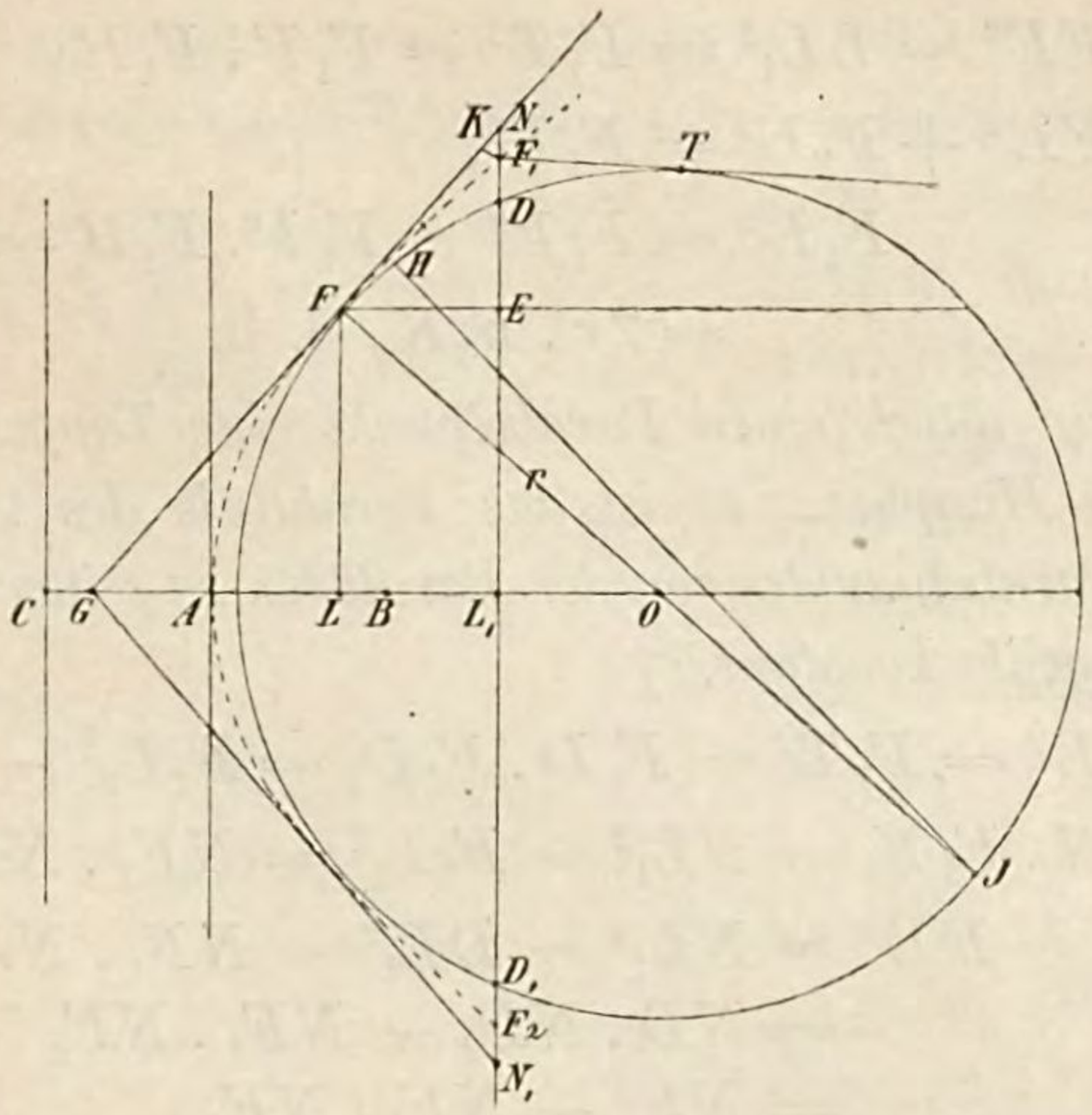


Fig. 122.

Setzt man $AB = \frac{1}{2}p$, so ist $F_1L_1^2 = 2p \,.\, AL_1$, $FL^2 = 2p \,.\, AL$ (286) also

$$F_1T^2 = 2p \,.\, LL_1 - LL_1\,(OL + OL_1)$$
$$= LL_1\,(2p - OL - OL_1)$$

Aber
$$\tfrac{1}{2}p - LO = AO - BO - LO = AL - BO$$
$$= AL - BG$$
$$\tfrac{1}{2}p - L_1O = AL_1 - BO = AL_1 - BG$$
$$p - LO - L_1O = AL + AL_1 - 2BG$$
$$= AL + AL_1 - 2GL - 2BL$$
$$= AL + AL_1 - 4AL - 2BL$$
$$= AL_1 - AL - 2(AL + BL)$$
$$= LL_1 - p,$$

also
$$F_1T = LL_1, \text{ d. h.}$$

b. *Die Tangente von einem Parabelpunkte an einen doppelt berührenden Kreis ist gleich der Senkrechten auf die Berührungssehne.*

335. Zieht man (Fig. 122) $F_1K \perp FG$, F_1F, welche den Kreis in H schneidet, FO bis J und JH, so ist

$$F_1K : FH = F_1F : 2r \text{ oder } F_1F \,.\, FH = 2r \,.\, F_1K.$$

Wegen des vorigen Satzes

$$FE^2 = LL_1^2 = F_1T^2 = F_1F \,.\, F_1H;$$

ferner $FE^2 + F_1E^2 = F_1F^2,$

also $F_1E^2 = F_1F^2 - F_1F \,.\, F_1H = F_1F \,.\, FH$

$= 2r \,.\, F_1K,$ d. h.

*Legt man durch einen Parabelpunkt eine Tangente und eine Parallele zur Hauptaxe, so ist das Verhältnis des Abstandsquadrates eines Parabelpunktes von der Parallelen zu seiner Entfernung von der Tangente konstant.**)

336. $FE^2 = F_1T^2 = F_1D \,.\, F_1D_1 = F_1L_1^2 - DL_1^2.$

Ferner $F_1N \,.\, F_1N_1 = NL_1^2 - F_1L_1^2 = NF_1 \,.\, NF_2,$

daher $FE^2 = NL_1^2 - DL_1^2 - NF_1 \,.\, NF_2$

$= ND \,.\, ND_1 - NF_1 \,.\, NF_2$

$= NF^2 - NF_1 \,.\, NF_2$

oder $NF_1 \,.\, NF_2 = NE^2.$

Zieht man durch einen Parabelpunkt eine Tangente und eine Parallele zur Hauptaxe, so ist die Entfernung eines Punktes der Tangente von der Parallelen die mittlere Proportionale zwischen den Abständen dieses Punktes von den Schnittpunkten der durch ihn zur Hauptaxe senkrecht gezogenen Geraden mit der Parabel.

337. In zwei Punkten F und F_1 der Parabel konstruiere man die in ihnen und den bezüglich der Hauptaxe symmetrisch liegenden Punkten doppelt berührenden Kreise, wähle auf der Parabel einen Punkt P, konstruiere von ihm die Tangenten tt_1 an die doppelt berührenden Kreise und die Senkrechten ss_1 auf die Berührungssehnen, so ist $t = s$ und $t_1 = s_1$, also

$$t \pm t_1 = s \pm s_1$$

jenachdem P zwischen den Berührungssehnen liegt oder nicht:

Zieht man durch einen Parabelpunkt an zwei doppelt berührende Kreise zwei Tangenten, so ist ihre Summe oder Differenz konstant gleich der Entfernung der Berührungssehnen.

338. Die in 328 gegebene Erzeugung des Kegelschnittes läfst sich verallgemeinern.**)

---

*) Cf. Weinmeister. Programm der Realschule zu Leipzig. 1880 und 1881.

**) Diese Darstellung ist im Wesentlichen der citierten Programmabhandlung entnommen.

Sind $g_1 g_2$ irgend zwei parallele Gerade, ist M der Mittelpunkt eines Kreises mit dem Radius r, so läfst sich nach dem Orte eines Punktes P fragen, für welchen das Verhältnis der Potenz des Kreises in ihm zum Produkte seiner Entfernungen von den Geraden $g_1 g_2$ konstant gleich λ^2 ist.

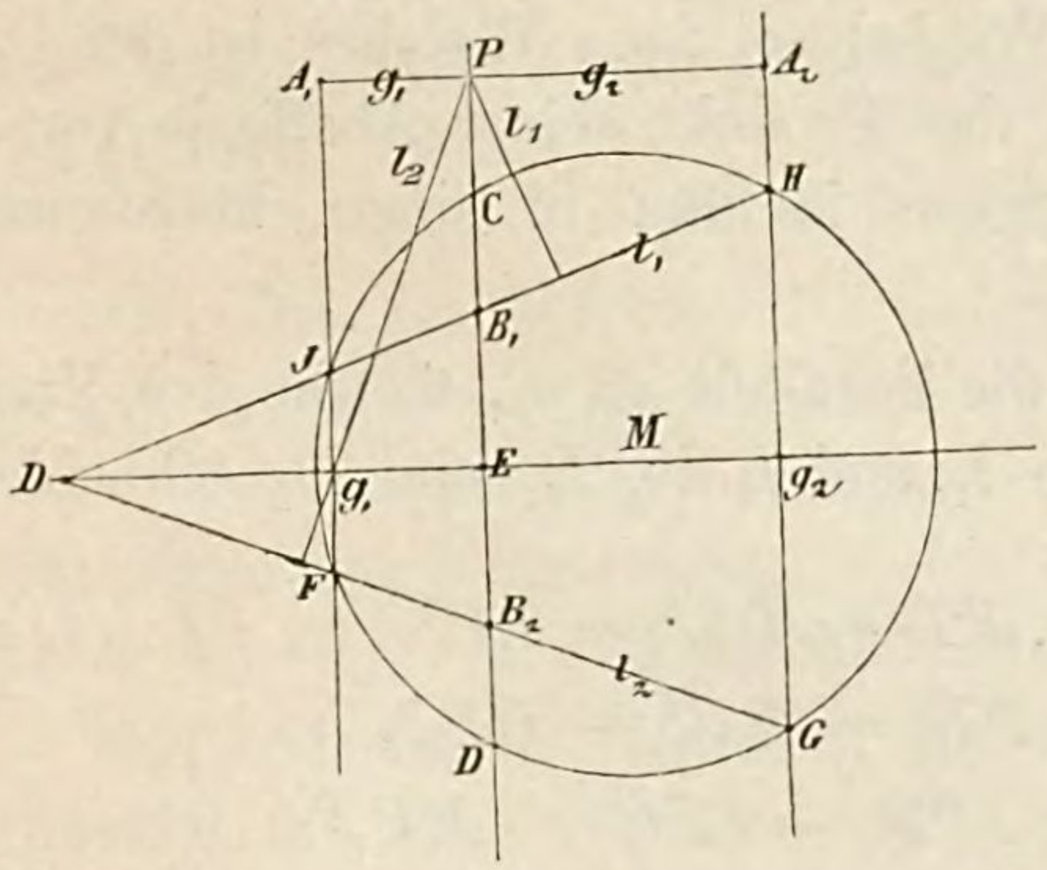


Fig. 123.

Die Entfernungen des Punktes P von g_1 und g_2 seien PA_1 und PA_2, dann soll

$$\lambda^2 . PA_1 . PA_2 = PM^2 - r^2 \text{ sein.}$$

Ist PA die Entfernung von P und der Mittellinie zwischen g_1 und g_2, also $PA_1 = AA_1 - PA$, $PA_2 = PA + AA_1$, so ist

$$PA_1 . PA_2 = AA_1^2 - PA^2,$$

also $$\lambda^2 . PA^2 = (r^2 + \lambda^2 . AA_1^2) - PM^2.$$

Setzt man $r^2 + \lambda^2 . AA_1^2 = \varrho^2$ und beschreibt mit ϱ um M einen Kreis, so ist $(\varrho^2 - PM^2)$ die Potenz desselben in ϱ; folglich ist der Ort von P nach 328a. ein Kegelschnitt, für welchen $\lambda = \frac{e}{b}$ oder $\frac{e}{a}$ ist, jenachdem der Mittelpunkt des Kreises auf der Nebenaxe oder Hauptaxe liegt.

Für einen beliebigen Punkt einer der beiden Geraden g_1 und g_2 wird das Verhältnis zwischen dem Produkte seiner Abstände von $g_1 g_2$ und der Potenz des Kreises in ihm o, nur für die Schnittpunkte der Geraden mit dem Kreise nimmt dieses Verhältnis die Form $\frac{o}{o}$ an und wird gleich λ^2, da diese die Schnittpunkte mit dem Kegelschnitte werden müssen. Es folgt:

Der Ort eines Punktes, für welchen das Verhältnis des Produktes seiner Abstände von zwei festen Parallelen zur Potenz eines festen Kreises in ihm konstant ist, ist ein Kegelschnitt, welcher durch die Schnittpunkte jener Geraden mit dem Kreise geht.

339. Die beiden Parallelen g_1 und g_2 mögen den Kreis

in vier reellen Punkten treffen; l_1 und l_2 seien zwei gegen g_1 und g_2 gleich geneigte Verbindungslinien der Schnittpunkte, der von ihnen gebildete Winkel sei 2α. Welches ist der Ort des Punktes, für welchen das Produkt seiner Abstände von l_1 und l_2 zur Potenz des Kreises in ihm in einem konstanten Verhältnisse steht?

Durch P ziehe man die Parallele zu g_1, welche den Kreis in C und D, die Geraden l_1 und l_2 in B_1 und B_2 schneidet. Dann ist

$$K_p = PC \,.\, PD = PE^2 - EC^2$$
$$PB_1 \,.\, PB_2 = PE^2 - EB_1^2,$$

also
$$K_p = PB_1 \,.\, PB_2 - (EC^2 - EB_1^2)$$
$$= PB_1 \,.\, PB_2 - CB_1 \,.\, DB_1$$
$$= PB_1 \,.\, PB_2 - JB_1 \,.\, HB_1.$$

Von P fälle man auf $g_1 g_2 l_1 l_2$ die Perpendikel, deren Länge auch mit $g_1 g_2 l_1 l_2$ bezeichnet werde, so ist

$$K_p = \frac{l_1 \,.\, l_2 - g_1 \,.\, g_2}{\cos^2\alpha}.$$

Durch die Punkte $FGHJ$ giebt es unendlich viele Kegelschnitte, welche sämtlich die Halbierungslinie des Winkels $(l_1 l_2)$ zu einer Axe haben. Liegt P auf diesem Kegelschnitte, so ist

$$K_p = g_1 \,.\, g_2 \,.\, \mu^2.$$

Setzt man hieraus den Wert von $g_1 \,.\, g_2$ in die letzte Gleichung, so erhält man

$$K_p = l_1 \,.\, l_2 \,.\, \frac{\mu^2}{\mu^2 \cos^2\alpha + 1} = l_1 \,.\, l_2 \,.\, \lambda^2, \text{ d. h.}$$

Wenn ein Kreis auf zwei Geraden gleiche Sehnen abschneidet, so ist der Ort eines Punktes, für welchen das Produkt seiner Abstände von den Geraden zur Potenz des Kreises in ihm in einem konstanten Verhältnisse steht, ein Kegelschnitt.

340. Die Gerade l_1 werde um die Strecke s parallel mit sich selbst verschoben und heifse in der neuen Lage l_3; das Perpendikel von P auf l_3 sei l_3, so dafs also $l_3 = l_1 + s$ ist. Durch F und G denke man sich einen Kreis mit dem Mittelpunkte M' gelegt, dann ist

$$K_p' - K_p = 2MM' \,.\, l_2,$$

also $$K'_p = l_1 \,.\, l_2 \,.\, \lambda^2 + 2MM' \,.\, l_2$$
$$= l_2 \,(l_3 \lambda^2 - s \,.\, \lambda^2 + 2MM').$$

Setzt man $s \,.\, \lambda^2 = 2MM'$, wodurch der Kreis M' bestimmt ist, so hat man

$$K'_p = l_2 \,.\, l_3 \,.\, \lambda^2.$$

Der Ort des Punktes P, welcher der letzten Gleichung genügt, ist also ein Kegelschnitt, welcher durch die Schnittpunkte der Geraden l_2 und l_3 mit dem Kreise M' geht und zwar derjenige Kegelschnitt, welcher mit dem durch die Gleichung $K_p = l_1 \,.\, l_2 \,.\, \lambda^2$ bestimmten identisch ist.

341. Wenn die Gerade l_3 den Kegelschnitt schneidet, so schneidet ihn auch der Kreis M' in denselben Punkten; es ist also l_3 eine gemeinschaftliche Sehne des Kreises und Kegelschnittes. — Alle durch F und G gelegten Kreise haben mit dem Kegelschnitte solche reellen oder ideellen gemeinschaftlichen Sekanten, welche zu l_1 parallel sind. Daher ist die Gerade l_3, falls sie den Kegelschnitt nicht schneidet, eine ideelle Sekante des Kreises M' und des Kegelschnittes. Verschiebt man auch noch l_2 sich selbst parallel in die Lage l_4, so kann l_4 auch den Kreis schneiden oder nicht. Daraus folgt:

Sind zwei Gerade gegen eine Axe eines Kegelschnittes entgegengesetzt gleich geneigt, so giebt es stets einen Kreis von der Lage, daſs seine Potenz in einem Kegelschnittpunkte zum Produkte der Abstände des letzteren von den beiden Geraden in einem konstanten Verhältnisse steht. Die Geraden sind reelle oder ideelle gemeinschaftliche Sekanten des Kreises und des Kegelschnittes.

Hieraus folgt für jeden Kegelschnitt (cf. 288)

Die Halbierungslinien der Winkel gemeinschaftlicher Sehnen eines Kreises und eines Kegelschnittes sind den Axen des letzteren parallel.

342. *Der Krümmungskreis.*

Wenn ein Kreis mit einem Kegelschnitte drei zusammenfallende Punkte gemein hat, so heiſst er (312) ein Krümmungskreis des Kegelschnittes.

Sind C und D zwei unendlich benachbarte Punkte eines Centralkegelschnittes, so schneiden sich ihre Normalen im Mittelpunkte K des Krümmungskreises.

Die Verbindungslinie CD ist eine Tangente TT_1 des Kegelschnittes. — Verbindet man C und D mit den Brennpunkten B und B_1 und beschreibt um letztere mit BC und B_1D Kreise, welche bezüglich BD in C_1 und B_1C in D_1 treffen, so sind die Dreiecke CC_1D und DD_1C

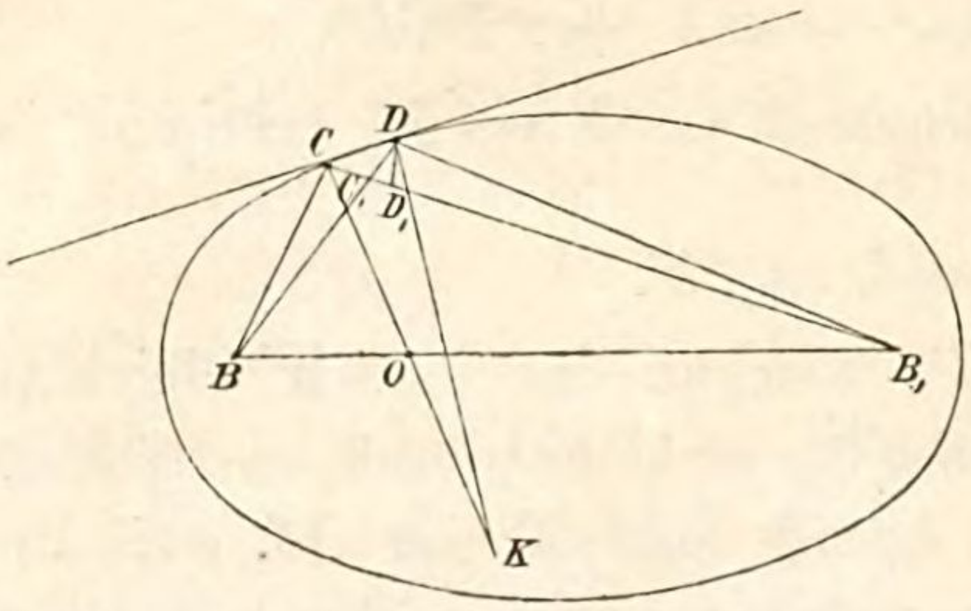


Fig. 124.

bei C_1 und D_1 rechtwinklig. — Da

$$BC \pm B_1C = BD \pm B_1D = 2a, \text{ so folgt}$$

$$BD - BC = \pm (B_1C - B_1D) \text{ oder } C_1D = CD_1,$$

also $\triangle CDC_1 \cong CDD_1$ und $\sphericalangle DCC_1 = CDD_1$

oder $$\sphericalangle BCT = B_1DT_1$$

d. h. für den Fall des Zusammenfallens von C und D:

Die Tangente bildet mit den Brennstrahlen des Berührungspunktes gleiche Winkel. (Cf. 232a, 252, 313.)

343. Die Normalen in den Punkten C und D sind die Halbierungslinien der Winkel BCB_1 und BDB_1. Ist E der Schnittpunkt von BD und CK, so ist, wenn man $\sphericalangle BCK = \omega$, $\sphericalangle B_1DK = \omega_1$ setzt

$$\sphericalangle B = CED - \omega = K + \omega_1 - \omega.$$

Ebenso findet man

$$\sphericalangle B_1 = K + \omega - \omega_1,$$

also $$B + B_1 = 2K.$$

Ein Kreisbogen ist seinem Centriwinkel und dem Radius proportional, also wird der Centriwinkel gemessen durch den Quotienten aus dem Bogen und dem Radius, folglich ist

$$\frac{CC_1}{BC} + \frac{DD_1}{B_1D} = \frac{2CD}{KC}.$$

Aber $CC_1 = DD_1 = CD \cdot \cos\omega$ für den Fall, dafs C und D zusammenfallen, wo $\omega \sphericalangle C_1CD$; setzt man noch

$$BC = \varrho,\ B_1C = \varrho_1,\ KC = r,$$

so wird $$\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho_1} = \frac{2}{r \cos \omega}$$

die Gleichung zur Bestimmung des Krümmungsradius r.

Fällt man von B und B_1 die Perpendikel p und p_1 auf die Tangente in C, so ist

$$p = \varrho \,.\, \cos \omega, \quad p_1 = \varrho_1 \,.\, \cos \omega, \quad p \,.\, p_1 = \varrho \,.\, \varrho_1 \,.\, \cos^2 \omega = b^2.$$

In Fig. 125. ist $q = a_1 \,.\, \sin \varphi$, also $q \,.\, b_1 = a_1 \,.\, b_1 \sin \varphi = a \,.\, b$ (280a) und $q = \frac{a \,.\, b}{b_1}$; ferner $q = \frac{1}{2}(p + p_1) = \frac{1}{2}(\varrho + \varrho_1) \,.\, \cos \omega = a \,.\, \cos \omega$, daher:

$$\cos \omega = \frac{b}{b_1}, \quad \varrho \,.\, \varrho_1 = \frac{b^2}{\cos^2 \omega} = {b_1}^2, \quad \text{mithin da } \varrho + \varrho_1 = 2a$$

$$\frac{\varrho + \varrho_1}{\varrho \,.\, \varrho_1} = \frac{2 b_1}{r \,.\, b} = \frac{2a}{{b_1}^2}$$

und $$r = \frac{{b_1}^3}{a \,.\, b}.$$

Bezeichnet man die Strecke CO der Normale mit n, ist also $n = \frac{b \,.\, b_1}{a}$ (289a und d.), so wird

$$r = \frac{b \,.\, b_1}{a} \cdot \frac{{b_1}^2}{b^2} = \frac{n}{\cos^2 \omega}.$$

Aus dieser Formel folgt die Newton'sche Konstruktion des Krümmungsradius. Man errichtet in O auf CO die Senkrechte OE und in E auf CE die Senkrechte EK.

344. Eine andere Konstruktion ergiebt sich aus dem Satze 288 oder 341. Schneidet der Krümmungskreis aufser in C den Kegelschnitt noch in C_1, so sind die Tangente in C

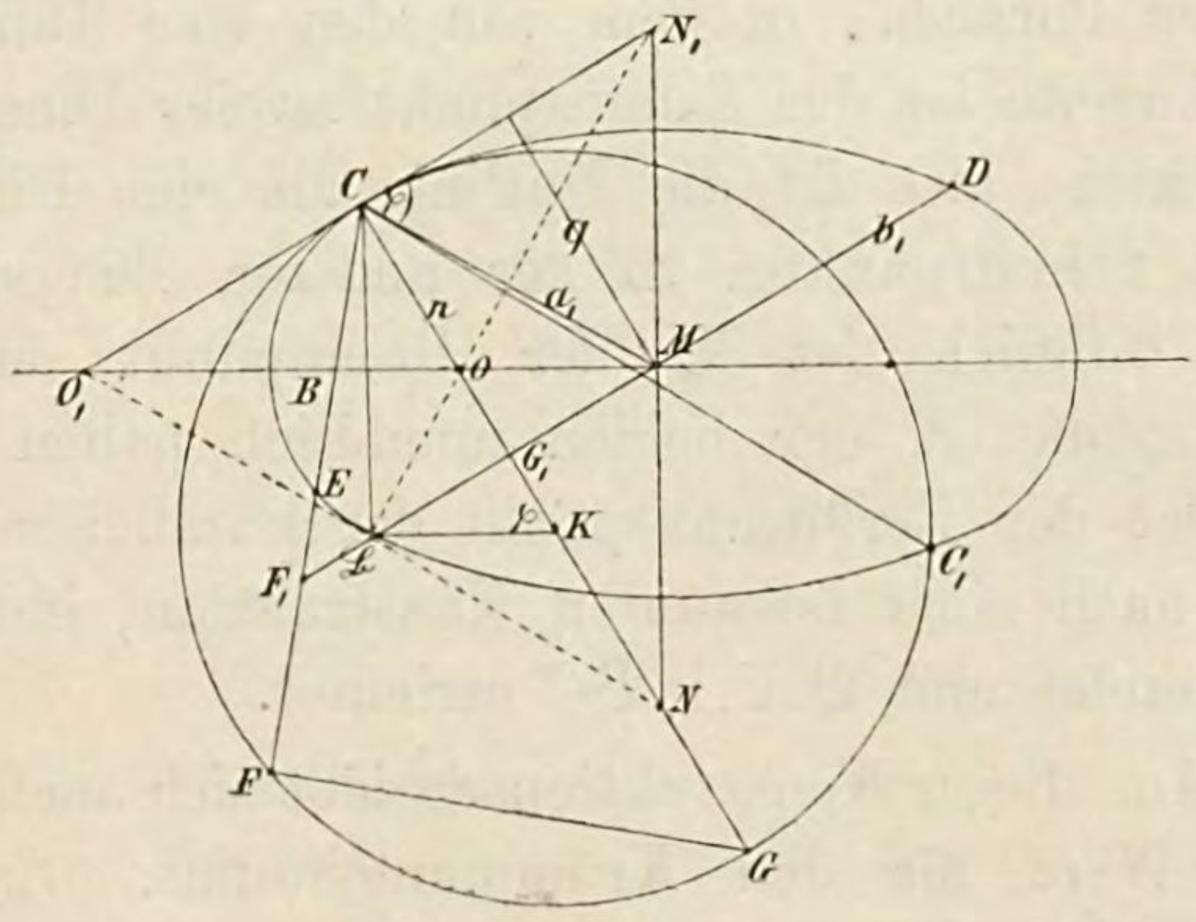


Fig. 125.

und die Sehne CC_1 die gemeinschaftlichen Sehnen des Krümmungskreises und des Kegelschnittes und bilden also mit den Axen gleiche Winkel. Zieht man daher durch C eine Parallele zu einer Axe, so findet man CC_1 leicht, da diese Parallele den Winkel zwischen CC_1 und der Tangente in C halbiert; der Kreis durch C_1, welcher diese Tangente in C berührt, ist der Krümmungskreis.

345. Eine dritte Konstruktion des Krümmungsradius findet man bei Salmon: Analytische Geometrie der Kegelschnitte übersetzt von Fiedler. IV. Auflage. S. 320. Hier werde noch eine von Steiner herrührende Konstruktion desselben mitgeteilt. Cf. Steiner-Schröter, Theorie der Kegelschnitte. II. Auflage. S. 208.

Die Normalen n und n' in den Punkten C und C' und die beiden Axen bestimmen als Tangenten eine Parabel; wenn n und n' die Axen in ON und $O'N'$ schneiden (Fig. 125), so ist

$$CO : CN = C'O' : C'N' = b^2 : a^2$$

also teilen die beiden Axen und die Gerade CC' die beiden Parabeltangenten n und n' nach gleichen Verhältnissen und daher ist auch CC' eine Tangente dieser Parabel. 287.

Wenn C und C' einander unendlich nahe rücken, so wird ihr Schnittpunkt K der Krümmungsmittelpunkt. Die Parabel berührt in diesem Falle Normale und Tangente des Punktes C und die beiden Axen, hat also in den Punkten C und M rechtwinklige Tangenten. Daher liegen diese Punkte auf der Leitlinie der Parabel. In dem von den vier Tangenten gebildeten Vierseite ist der Schnittpunkt zweier Diagonalen der Pol der dritten, also ist die Leitlinie als eine Diagonale die Polare des Schnittpunktes $\mathfrak{B}$ der anderen Diagonalen ON_1 und O_1N, folglich ist $\mathfrak{B}$ der Brennpunkt der Parabel. Der Schnittpunkt K der beiden unendlich nahen Tangenten n und n' ist der Berührungspunkt der Parabel mit n. Man findet ihn nach einer bekannten Konstruktion, indem man C mit $\mathfrak{B}$ verbindet und $\mathfrak{B}K \perp \mathfrak{B}C$ errichtet.

346. Aus dieser Konstruktion ergiebt sich auch der vorher gefundene Wert für den Krümmungsradius. Im Dreiecke NN_1O_1 ist O der Höhenpunkt, also ist

$$\sphericalangle \mathfrak{B}CN = MCN,\ \sphericalangle C\mathfrak{B}O = OO_1C = CNM,$$

daher sind die Dreiecke $\mathfrak{B}CO$ und CMN ähnlich. Daraus folgt

$$CO : C\mathfrak{B} = CM : CN \text{ oder } CO \,.\, CN = C\mathfrak{B} \,.\, CM.$$

Den Halbmesser CM bezeichne man mit a_1 und den zu ihm konjugierten, der Tangente parallelen mit b_1, dann ist

$$CO \,.\, CN = {b_1}^2$$

also

$$C\mathfrak{B} = \frac{{b_1}^2}{a_1}.$$

Da $\sphericalangle \mathfrak{B}CK = MCK$, so mufs auch $\sphericalangle CK\mathfrak{B} = MCN_1 = \varphi$ sein, wenn man den Winkel zwischen den beiden konjugierten Halbmessern φ nennt, daher

$$C\mathfrak{B} = r \,.\, \sin\varphi = \frac{{b_1}^2}{a_1}.$$

Nach 280a. ist aber $a_1 \,.\, b_1 \,.\, \sin\varphi = a \,.\, b$, also wird

$$r = \frac{{b_1}^3}{a \,.\, b}.$$

Übereinstimmend mit 317. folgen hieraus für die Krümmungshalbmesser in den Scheiteln der Haupt- und Nebenaxe die Werte $\frac{b^2}{a}$ und $\frac{a^2}{b}$.

347. Eine weitere Eigenschaft des Krümmungsradius hat Steiner aus der anderen Beziehung konjugierter Durchmesser

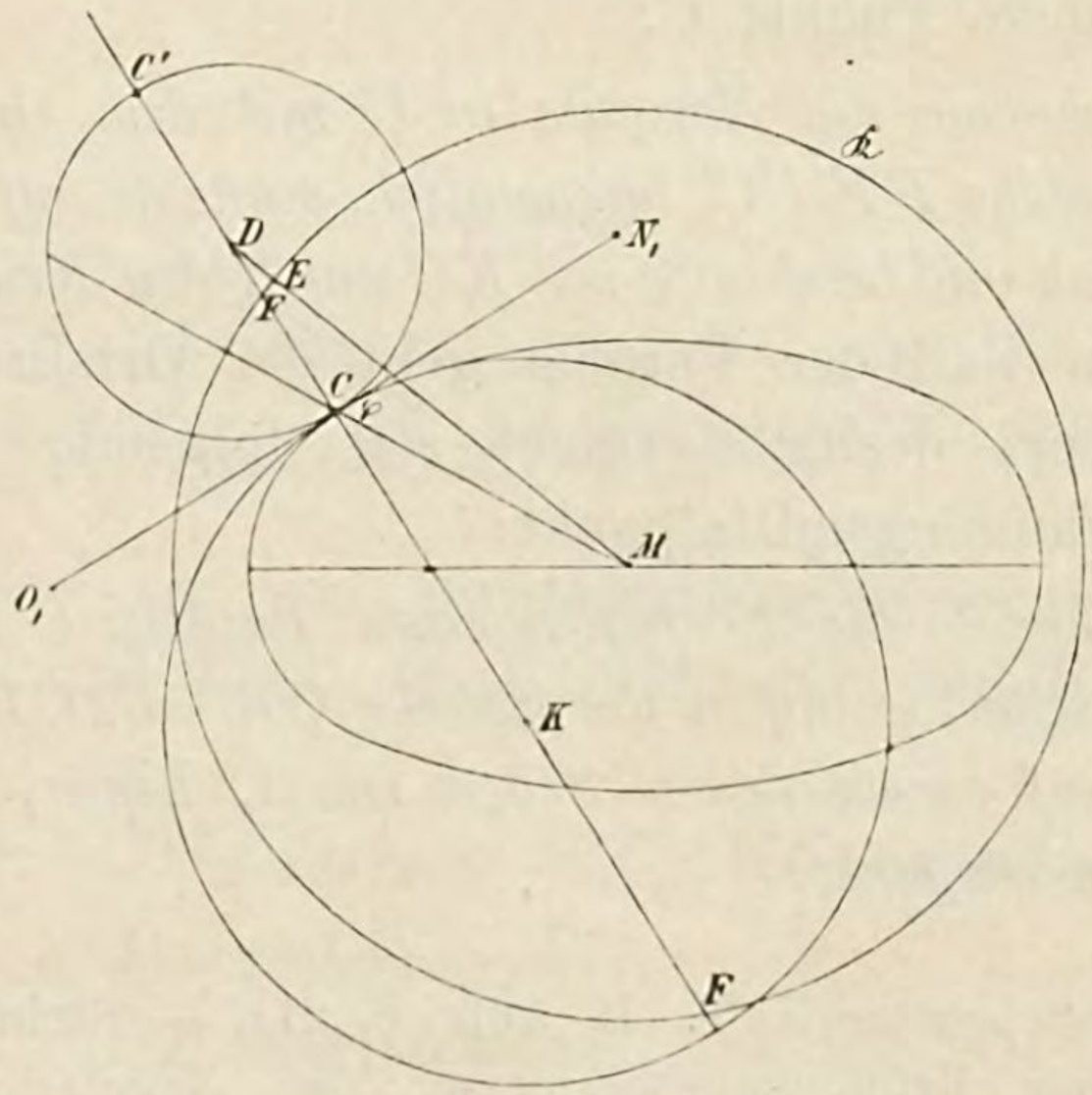


Fig. 126.

abgeleitet, dafs nämlich $a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2$ ist.*) Setzt man hierin den vorher für b_1^2 erhaltenen Wert, so wird

$$a_1^2 + a_1 \,.\, r \,.\, \sin\varphi = a^2 + b^2 = a_1^2 - 2a_1 \,.\, \frac{r}{2} \,.\, \cos(90^0 + \varphi).$$

Macht man also $CD = \frac{r}{2}$, so wird

$$a^2 + b^2 + \frac{r^2}{4} = a_1^2 + \frac{r^2}{4} - 2a_1 \,.\, \frac{r}{2} \,.\, \cos(90^0 + \varphi) = MD^2.$$

Beschreibt man um M den Kreis $\mathfrak{K}$, dessen Radius $\sqrt{a^2 + b^2}$ ist, also den Ortskreis der Scheitel der um die Ellipse beschriebenen rechten Winkel und schneidet dieser MD in E, so ist

$$\frac{r^2}{4} = MD^2 - ME^2 = DT^2$$

wenn DT die von D an diesen Ortskreis gezogene Tangente ist. Der um D mit $\frac{r}{2}$ beschriebene Kreis geht also durch T und berührt die Ellipse in C. Man findet also D, indem man einen Kreis beschreibt, der die Gerade $O_1 N_1$, d. i. die Tangente in C berührt und den Ortskreis rechtwinklig schneidet. Da aber der Durchmesser CC' durch den Ortskreis $\mathfrak{K}$ harmonisch geteilt wird (27c.), so kann man C' finden und hat $r = CC'$.

Man hat daher folgende Konstruktion des Krümmungskreises in einem Punkte C:

Man schneide die Normale in C mit dem Ortskreise $\mathfrak{K}$ in F und F', mache $FF'CC'$ harmonisch, schneide auf der Normale $CK = CC'$ ab und beschreibe mit KC um K den Krümmungskreis.

Für den Fall der Parabel geht der Ortskreis $\mathfrak{K}$ in die Leitlinie über; deshalb ergiebt sich folgende Konstruktion für den Krümmungsmittelpunkt:

Man schneide die Normalen eines Punktes C mit der Leitlinie in F, schneide auf n die Strecke $CK = 2CF$ ab, so dafs K und F auf verschiedenen Seiten von C liegen, so ist K der Krümmungsmittelpunkt.

---

*) Steiner-Schroeter II. T. II. Aufl. S. 211. — Steiner: „Über eine Eigenschaft der Krümmungshalbmesser der Kegelschnitte“, Crelles Journal. Bd. XXX. S. 271.

348. Da die Konstruktion des Krümmungskreises bei Ellipse und Hyperbel auf der Eigenschaft der Normale beruht, dafs das Verhältnis ihrer Abschnitte durch die Axen konstant bleibt, diese Eigenschaft aber bei der Parabel fortfällt, so wird eine andere Begründung jener Konstruktion für die Parabel notwendig. Diese fliefst unmittelbar aus der Erzeugung der Parabel.

B und l seien Brennpunkt und Leitlinie einer Parabel, A sei ihr Scheitel, D und D_1 seien zwei beliebige Punkte

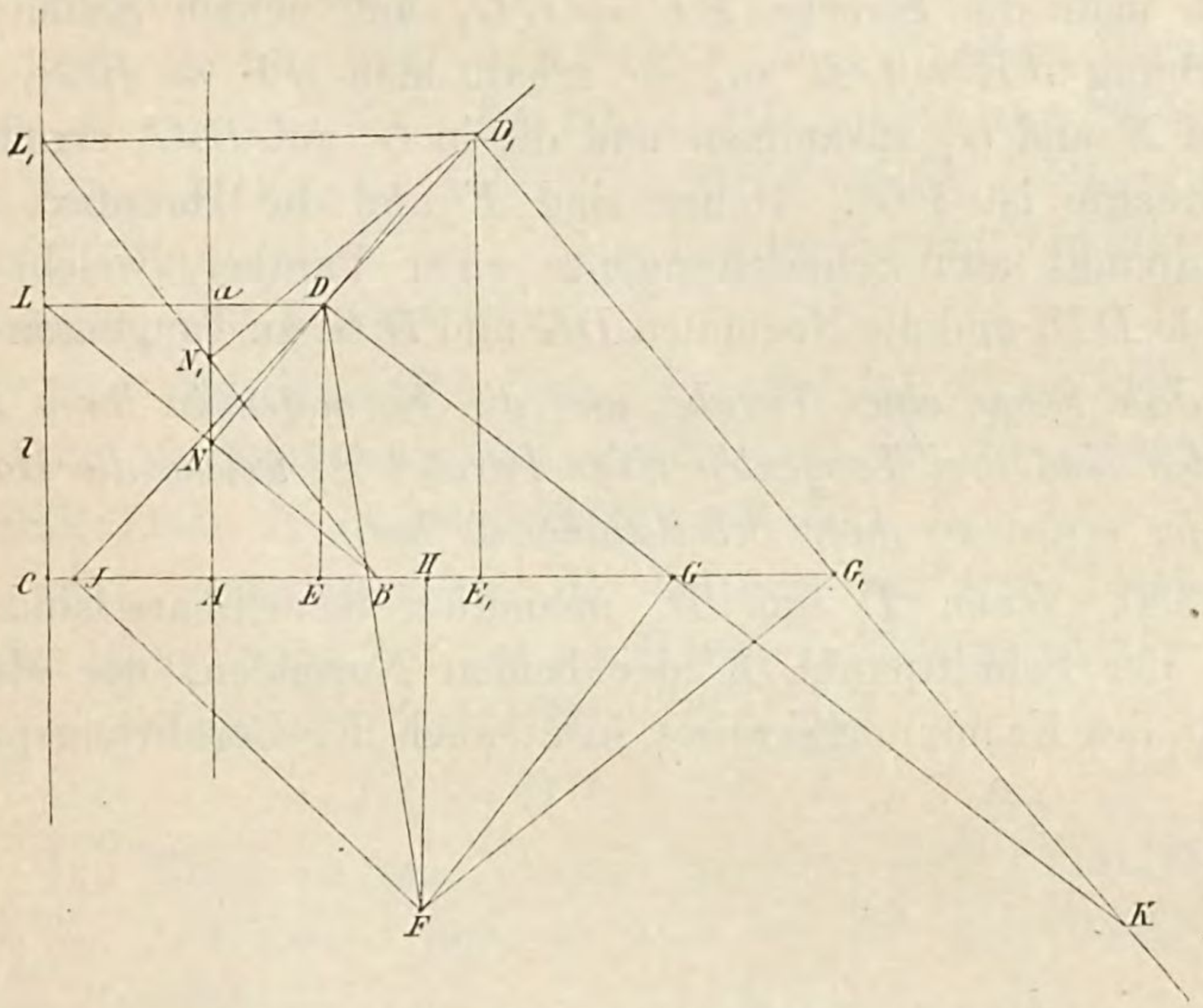


Fig. 127.

DE und D_1E_1 senkrecht zur Axe, DG und D_1G_1 die Normalen in D und D_1; J sei der Schnittpunkt von DD_1 mit der Axe.

Unmittelbar aus der Parabelerzeugung folgt, dafs die Normalen DG und D_1G_1 den Geraden BL und BL_1 parallel sind: also ist

$$BG = DL,\ BG_1 = D_1L_1,\ GG_1 = EE_1.$$

Ferner $DL = CE = BG$,

also auch $CB = EG = E_1G_1$, d. h.

Die Normale eines Parabelpunktes und die von ihm auf die

Axe gefällte Senkrechte begrenzen auf der Axe eine Strecke, welche gleich dem Parameter ist.

349. In J und G errichte man auf JD und GD Lote, die sich in F schneiden, so läfst sich um $JDGF$ ein Kreis beschreiben, dessen Mittelpunkt die Mitte M von DF ist. Eällt man $FH \perp CG$, und die Senkrechte aus M auf CG, so halbiert diese die Strecken EH und JG, also ist $JE = GH$. — Denkt man um das Dreieck CD_1F einen Kreis beschrieben. welcher die Axe noch in X schneiden mag, so folgt $JE_1 = HX$. Zählt man die Strecke $EE_1 = GG_1$ auf beiden Seiten der Gleichung $JE = GH$ zu, so erhält man $JE_1 = HG_1$, also fallen X und G_1 zusammen und die in G_1 auf D_1G_1 errichtete Senkrechte ist FG_1. Daher sind F und die Hauptaxe AB Brennpunkt und Scheiteltangente einer Parabel, welche die Gerade DD_1 und die Normalen DG und D_1G_1 zu Tangenten hat:

Jede Sehne einer Parabel und die Normalen in ihren Endpunkten sind drei Tangenten einer Parabel $\mathfrak{P}$, *welche die Hauptaxe der ersten zu ihrer Scheiteltangente hat.*

350. Wenn D und D_1 unendlich benachbart sind, so wird der Schnittpunkt K der beiden Normalen, der Mittelpunkt des Krümmungskreises in C, auch der Berührungspunkt

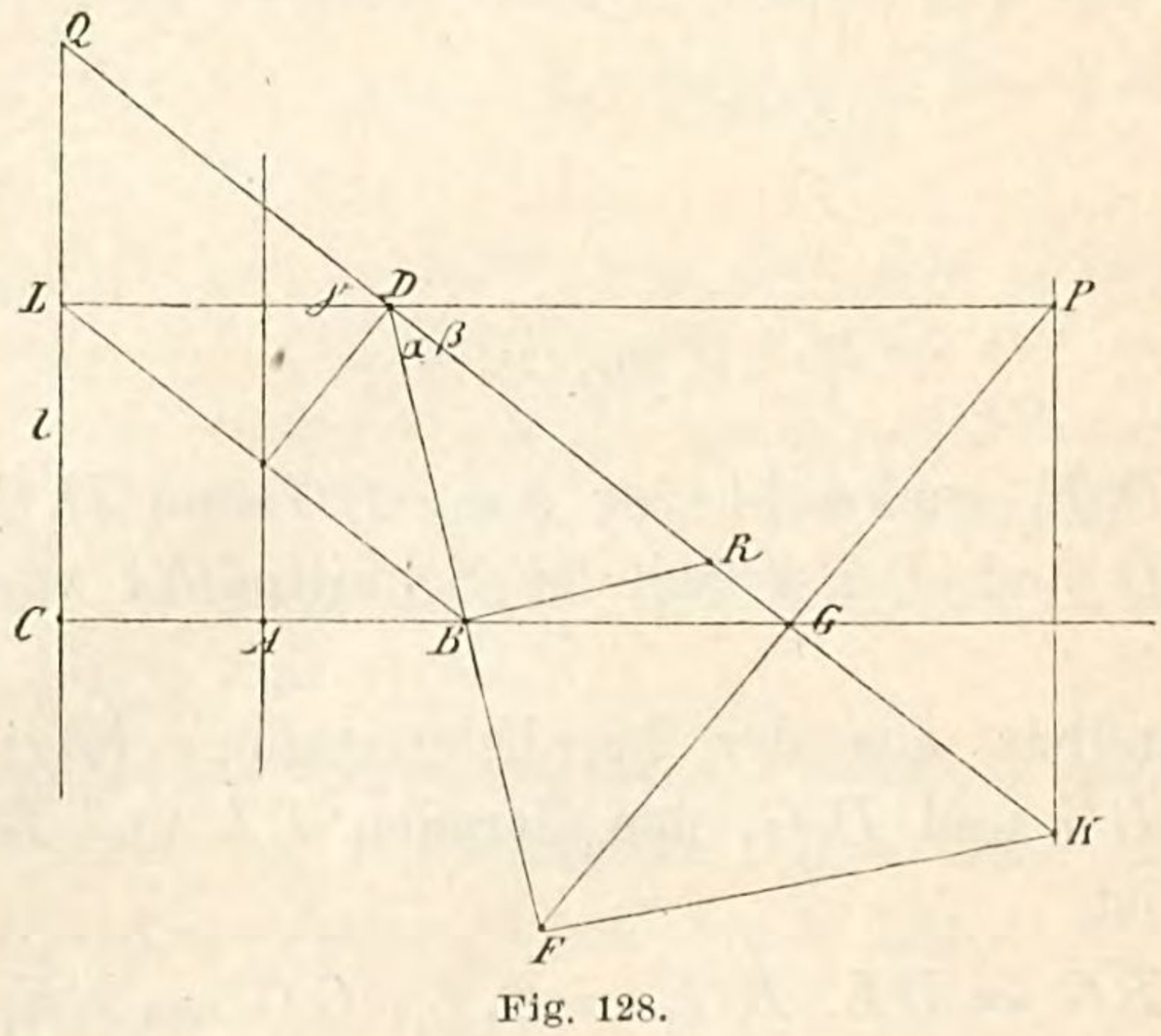


Fig. 128.

der Parabel $\mathfrak{P}$ mit der Tangente DG. Man findet ihn, indem man FG über G hinaus um sich selbst verlängert, vom Endpunkte der Verlängerung die Senkrechte auf AB fällt und

mit DG zum Durchschnitte bringt. Demnach gestaltet sich die Konstruktion des Krümmungskreises in einem Punkte D einer Parabel auf folgende Art, da DJ in Fig. 127 in diesem Falle Tangente und $BJ = BG$ wird:

Man ziehe die Normale DG, errichte in G auf derselben die Senkrechte und bringe sie in F mit DB zum Durchschnitte, verlängere FG über G hinaus um sich selbst bis P, fälle vom Endpunkte P der Verlängerung die Senkrechte auf die Axe und bringe sie in K zum Durchschnitte mit DG, so ist K der Krümmungsmittelpunkt.

351. Da hier $BD = BF$ ist, so liegt P auf der Parallelen durch D zur Axe, also ist $PK \perp PD$; da ferner $PK = FK$ und $PD = FD$, so ist $\triangle DPK \cong DFK$ und $\sphericalangle DFK = DPK = 90^0$. Man findet daher den Krümmungsmittelpunkt auch durch folgende Konstruktion:

Man verlängere BD um sich selbst bis F, errichte in F auf DF die Senkrechte und schneide mit ihr die Normale des Punktes D im Krümmungsmittelpunkte K.

351a. Schneidet man die Leitlinie mit der Normale in Q und zieht $BR \parallel FK$, so ist $DR = KR$, ferner $DB = DL$. $\sphericalangle \alpha = \beta = \gamma$, *also* $\triangle DBR \cong DLQ$ und

$$DQ = DR = RK, \text{ d. h.}$$

Das Stück in der Normale zwischen einem Parabelpunkte und der Leitlinie ist halb so grofs wie der Krümmungsradius dieses Punktes.

Dies ist der Satz 347. in anderer Fassung.

352. *Der Satz von Townsend.**)

Die Brennpunktssehne des Krümmungskreises in einem beliebigen Punkte eines Kegelschnittes ist derjenigen Brennpunktssehne des Kegelschnittes gleich, welche der Tangente in jenem Punkte parallel ist.

Es seien CDE drei Schnittpunkte eines Kreises mit einem Kegelschnitte; $HJ \parallel DE$, dann ist (290, 304, 284)

$$CK.GK : DK.EK = CB.BG : HB.BJ.$$

---

*) Analytische Geometrie der Kegelschnitte von Salmon-Fiedler. IV. Auflage. S. 319.

Aber:

$DK.EK = CK.FK$, $CB.BG = p.CG$, $HB.BJ = p.HJ$ (172)

also $$GK : FK = CG : HJ.$$

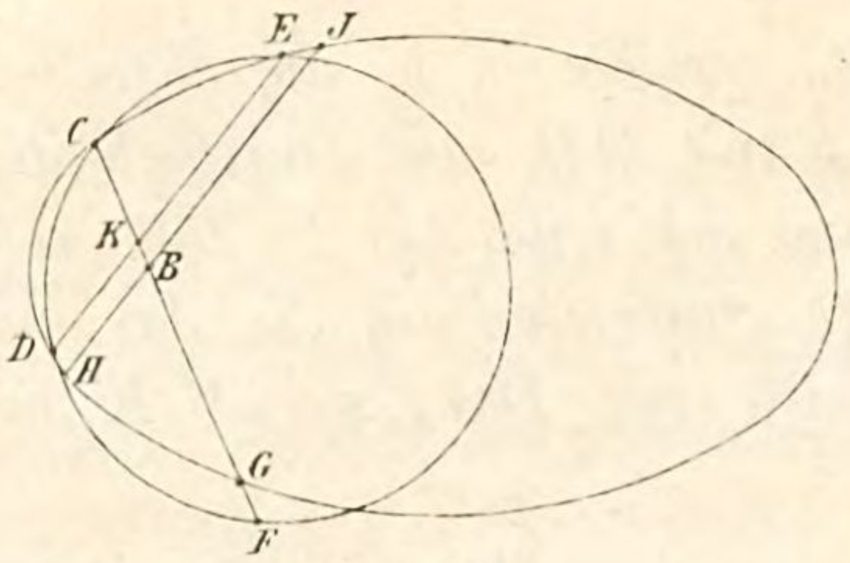


Fig. 129.

Nimmt man die drei Punkte CDE unendlich benachbart, so fällt auch K mit C zusammen, der Kreis geht in den Krümmungskreis über und die letzte Proportion heifst dann

$$GC : FC = GC : HJ,$$

woraus folgt

$$FC = HJ.$$

353. *Ausdrücke für den Krümmungsradius.*

Die Brennpunktssehne des Krümmungskreises (Fig. 125) sei CF, der Durchmesser desselben CG. Verlängert man MD bis zum Durchschnitte mit CF und CG in F_1 und G_1, so ist

$$CF : CG = CG_1 : CF_1.$$

Setzt man CF gleich der zur Tangente in C parallelen Brennpunktssehne s, so ist (352. 332.)

$$CG = \frac{s \,.\, CF_1}{CG_1} = \frac{s \,.\, a}{CG_1}.$$

Man erhält hieraus bekannte Ausdrücke für den Krümmungsdurchmesser, wenn man für s andere Werte sucht.

Die Sehne s schneide den Kegelschnitt in S und S_1, dann ist

$$BS \,.\, BS_1 = \tfrac{1}{2}\, p \,.\, s \quad (172)$$

$$BS \,.\, BS_1 : p^2 = MD^2 : b^2 = MD^2 : p \,.\, a$$

also $$\text{I.} \quad s = \frac{2\, MD^2}{a} = \frac{2\, b_1{}^2}{a}.$$

Aus $CO \,.\, CN = MD^2$ und $CO : CN = b^2 : a^2$ folgt $CO = \frac{a}{b} \,.\, MD$ und $CO = n$ gesetzt,

$$\text{II.} \quad s = \frac{2\, CO^2}{p} = \frac{2\, n^2}{p}.$$

I. *In einem Centralkegelschnitte ist das Produkt der halben Hauptaxe und einer Brennpunktssehne gleich dem doppelten Quadrate des parallelen Halbmessers.*

II. *In einem Centralkegelschnitte ist das doppelte Quadrat der Strecke einer Normale zwischen dem Kegelschnitte und der Hauptaxe gleich dem Produkte aus der zur Normale senkrechten Brennpunktssehne und dem Parameter.*

Wenn der Kegelschnitt eine Parabel ist, so fälle man ST und S_1T_1 senkrecht auf die Leitlinie, errichte im Brennpunkte B die Senkrechte auf SS_1, welche die Leitlinie in U schneidet, so ist $TU = T_1U$ (Cf. Fig. 76), ziehe durch U die Parallelezu ST, welche SS_1 in U_1 schneidet, so ist

$$UU_1 = \tfrac{1}{2}(ST + S_1T_1) = \tfrac{1}{2}(BS + B_1S_1) = \tfrac{1}{2}SS_1.$$

Die Gerade UU_1 trifft die Parabel im Punkte C, in welchem sie von der zu SS_1 parallelen Tangente berührt wird und daher ist $CU = CB = CU_1$ da $\sphericalangle UBU_1 = 90^0$ ist,

und $$BC = CU = CU_1 = \tfrac{1}{2}UU_1 = \tfrac{1}{4}SS_1$$

und daher

$$\text{III.}\quad SS_1 = s = 4BC.$$

III. *In einer Parabel ist die vierfache Brennpunktsentfernung eines Parabelpunktes gleich derjenigen Brennpunktssehne, welche der Tangente jenes Punktes parallel ist.*

Bezeichnet man die Strecke CG_1 der Normale oder, was dasselbe ist, das vom Mittelpunkte M auf die Tangente gefällte Lot mit q, und den Krümmungsdurchmesser CG mit $2r$ und MD mit b_1, so ist

Fig. 125.

$$\text{IV.}\quad r = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{s \cdot a}{q}$$

oder

$$\text{V.}\quad r = \frac{{b_1}^2}{q}$$

Setzt man hierin $q = a_1 \cdot \sin\varphi$ und $a_1 \cdot b_1 \cdot \sin\varphi = a \cdot b$,

so ist

$$\text{VI.}\quad r = \frac{{b_1}^3}{a \cdot b}.$$

Wenn man den Wert von s aus der Gleichung II. benutzt,

so wird

$$\text{VII.}\quad r = \frac{n^2 \cdot a}{p \cdot q}.$$

Aus den Gleichungen I. und II. folgt $b_1 = n \cdot \sqrt{\frac{a}{p}}$.

Setzt man diesen Wert in die Gleichung VI, so erhält man mit Berücksichtigung, dafs $a \cdot p = b^2$ ist,

$$\text{VIII.}\quad r = \frac{n^3}{p^2}.$$

Um den Krümmungsradius bei der Parabel zu erhalten, fälle man vom Brennpunkte B die Senkrechte ϱ auf die Tangente, dann ist (Fig. 125)

$$CG : CF = CB : \varrho,$$

also
$$CG = 2r = s \cdot \frac{CB}{\varrho},$$

daher mit Hilfe von III.

$$\text{IX.}\quad r = \frac{2BC^2}{\varrho}.$$

§ 21.

Konstruktion von Kegelschnitten.

354. *Konstruktion von Kegelschnitten, wenn unter den gegebenen Stücken Hauptelemente, d. i. Brennpunkte, Leitlinien, Mittelpunkt, Axen vorkommen.*

I. *Von einem Kegelschnitte kennt man eine Axe der Lage nach und drei Punkte PQR.*

Man schneide die Axe mit PQ in D und mit PR in E mache $PQDD_1$ und $PREE_1$ harmonisch, so dafs DD_1 und EE_1 zugeordnet sind, fälle D_1F und E_1G senkrecht auf die Axe, so sind die Punkte AA_1, welche DF und EG harmonisch teilen, die Endpunkte der Axe.

II. *Von einem Kegelschnitte kennt man die beiden Leitlinien l und l_1, einen Punkt P und die Hauptaxe der Lage nach.*

Man fälle PD und PD_1 senkrecht auf die Leitlinien, konstruiere denjenigen Punkt P_1, welcher in Bezug auf P symmetrisch zu den Leitlinien liegt, teile PP_1 durch DE harmonisch, so liegt auf dem Halbkreise über DE der Brennpunkt B von l.

Denn die Gerade, welche auf DB in B senkrecht steht, teilt die Sehne PP_1 harmonisch.

III. *Von einem Kegelschnitte kennt man den Scheitelkreis und zwei Gerade durch die Brennpunkte.*

Man lege durch den Mittelpunkt M des Scheitelkreises

eine solche Strecke zwischen die gegebenen Geraden, dafs sie in M halbiert wird; ihre Endpunkte sind die Brennpunkte.

IV. *Von einem Kegelschnitte kennt man den Scheitelkreis und zwei Punkte der Leitlinien.*

Da die Brennpunkte die Pole der Leitlinien in Bezug auf den Scheitelkreis sind, so konstruiere man die Polaren der gegebenen Punkte bezüglich des Scheitelkreises und lege zwischen sie eine solche Strecke, dafs der Mittelpunkt M des Kreises ihr Halbierungspunkt wird, so sind die Endpunkte derselben die Brennpunkte.

V. *Von einem Kegelschnitte kennt man den Scheitelkreis und zwei Punkte.*

Die gebenenen Punkte seien P und Q; man schneide mit PQ den Scheitelkreis in $P_1 Q_1$, so ist jeder der beiden Punkte R und S, welche die Strecken PQ und $P_1 Q_1$ harmonisch teilen, ein Punkt der Hauptaxe des Kegelschnittes. Es giebt also zwei Kegelschnitte, welche der Aufgabe genügen; ihre Hauptaxen sind, wenn man mit M den Mittelpunkt des Scheitelkreises bezeichnet, RM und SM.

VI. *Von einem Kegelschnitte kennt man die Lage einer Axe, den Mittelpunkt und zwei Punkte.*

Es sei M der Mittelpunkt; P und Q seien die gegebenen Punkte. Man schneide die Axe mit PQ in D, mache $PQDE$ harmonisch, so dafs D und E zugeordnet sind, fälle EF senkrecht auf die Axe und konstruiere die Länge der halben Axe aus der Gleichung $x^2 = MD \,.\, MF$.

VII. *In einem durch den Mittelpunkt M und drei Punkte PQR gegebenen Kegelschnitte den zu PM konjugierten Durchmesser zu ziehen.*

Man schneide PM mit QR in D, mache $QRDE$ harmonisch, schneide auf MP die Strecke $MP_1 = MP$ ab, mache $PP_1 DF$ harmonisch, ziehe EF und durch M eine Parallele zu EF, so ist sie der zu MP konjugierte Durchmesser.

VIII. *Gegeben sind die Axen; man soll auf einer durch den Mittelpunkt M gelegten Geraden g die Schnittpunkte konstruieren.*

In dem Endpunkte A der einen Axe ziehe man die Tangente, welche g in D schneiden mag, fälle von D auf

die andere Axe die senkrechte Sehne EF, mache $EFDG$ harmonisch, so dafs DG zugeordnet sind, schneide g mit AG in H, so ist die Länge des Halbmessers auf g gegeben durch die Gleichung $x^2 = MD \,.\, MH$.

IX. *Die Schnittpunkte einer Geraden g mit einem durch die Axen bestimmten Kegelschnitte zu konstruieren.*

Die Endpunkte der einen Axe seien A und A_1; in ihnen errichte man die Senkrechten und schneide mit denselben g in D und D_1. Von D und D_1 fälle man auf die andere Axe die senkrechten Sehnen EF und E_1F_1, mache $EFDG$ und $E_1F_1D_1G_1$, so dafs DG und D_1G_1 harmonisch sind, schneide g mit AG in H und mit A_1G_1 in H_1, so sind die beiden Punkte, welche die Strecken DH und D_1H_1 harmonisch teilen, die Schnittpunkte von g mit dem Kegelschnitte.

X. *Ein Kegelschnitt ist durch die beiden Brennpunkte BB_1 und einen Punkt P gegeben; man soll seine Schnittpunkte mit einer Geraden g konstruieren.*

α. Da $BP \pm B_1P$ die Länge der Hauptaxe ist, so kennt man deren Endpunkte und folglich die Leitlinien l und l_1. Diese mögen g in D und D_1 treffen; man ziehe DB und D_1B_1, errichte in B und B_1 auf diesen Verbindungslinien die Senkrechten, welche g in E und E_1 schneiden, so sind diejenigen beiden Punkte, welche die Strecken DE und D_1E_1 harmonisch teilen, die gesuchten Schnittpunkte.

β. Man konstruiere um B_1 mit der Summe oder Differenz $BP \pm B_1P$ einen Kreis, fälle von B auf g die Senkrechte BD, verlängere sie über D um sich selbst bis E, so sind die Mittelpunkte derjenigen beiden Kreise, welche durch B und E gehen und den um B_1 gezeichneten Kreis berühren, die Schnittpunkte von g mit dem Kegelschnitte.

XI. *Von einem Kegelschnitte kennt man drei Tangenten und einen Brennpunkt.*

Die Fufspunkte der Senkrechten aus dem Brennpunkte auf die Tangenten liegen auf dem Scheitelkreise.

XII. *Von einem Kegelschnitte kennt man drei Punkte und eine Leitlinie.*

Die gegebenen Punkte seien PQR, die gegebene Leit-

linie l. Man ziehe PQ bis zum Durchschnitte R_1 mit l, mache PQR_1R_2 harmonisch, so dafs R_1R_2 zugeordnet sind, so liegt der Brennpunkt B von l auf einem Kreise über R_1R_2. Schneidet man ferner l mit QR in P_1 und mit RP in Q_1, macht QRP_1P_2 und RPQ_1Q_2 harmonisch, so liegt derselbe Brennpunkt B auch in den über P_1P_2 und Q_1Q_2 beschriebenen Kreisen.

XIII. *Von einem Kegelschnitte kennt man drei Punkte und einen Brennpunkt.*

α. Die gegebenen Punkte PQR verbinde man mit dem gegebenen Brennpunkte B. Man konstruiere die Halbierungslinien der Winkel PBQ, QBR, RBP und ihrer Nebenwinkel durch die Geraden r_1r_2, p_1p_2, q_1q_2, welche die Geraden

$$PQ, \quad QR, \quad RP$$

in

$$R_1R_2, \quad P_1P_2, \quad Q_1Q_2$$

schneiden. Jeder dieser Punkte ist ein Punkt einer Leitlinie des Kegelschnittes. Diese sechs Punkte liegen daher viermal zu je drei in einer Geraden:

$$P_1Q_1R_1, \; P_1Q_2R_2, \; P_2Q_1R_2, \; P_2Q_2R_1$$

und diese vier Geraden bilden ein vollständiges Vierseit, dessen Diagonaldreieck PQR ist und dessen drei Diagonalen die Strecken

$$P_1P_2, \; Q_1Q_2, \; R_1R_2$$

sind. Da der Brennpunkt B auf jedem über einer dieser Diagonalen beschriebenen Kreise liegt, so folgt der schon früher bewiesene Satz:

Die Kreise über den Diagonalen eines vollständigen Vierseits schneiden sich in einem Punkte.

β. Eine andere Auflösung beruht auf dem Satze, dafs ein Kreis über der Verbindungslinie des Brennpunktes mit einem Punkte des Kegelschnittes den Scheitelkreis berührt. Man verbinde also B mit PQR und beschreibe über BP BQ, BR Kreise, so ist derjenige Kreis, welcher alle drei Kreise berührt, der Scheitelkreis. Solcher Berührungskreise giebt es vier, also hat die Aufgabe, wie auch die vorige Lösung ergab, vier Auflösungen.

XIV. *Von einem Kegelschnitte kennt man einen Brennpunkt, einen Punkt und zwei Tangenten.*

α. Den gegebenen Brennpunkt B verbinde man mit dem gegebenen Punkte P und beschreibe über BP einen Kreis, fälle dann auf die gegebenen Tangenten q und r die Senkrechten BQ und BR, so sind diejenigen Kreise, welche den über BP beschriebenen Kreis und die Punkte Q und R berühren, Scheitelkreise der gesuchten Kegelschnitte.

β. Die Tangenten q und r mögen den gesuchten Kegelschnitt in D und E berühren und sich in F schneiden. Der Pol von BF mufs auf der Polare DE von F und auch auf dem in B auf BF errichteten Lote liegen, da je zwei senkrechte Strahlen im Brennpunkte konjugiert sind. Also ist der Schnittpunkt G beider Geraden der Pol von BF. Dieser liegt aber, da $F(DEBG)$ harmonische Strahlen sind, auf der Leitlinie l des Brennpunktes B und ist somit ein fester Punkt. Also:

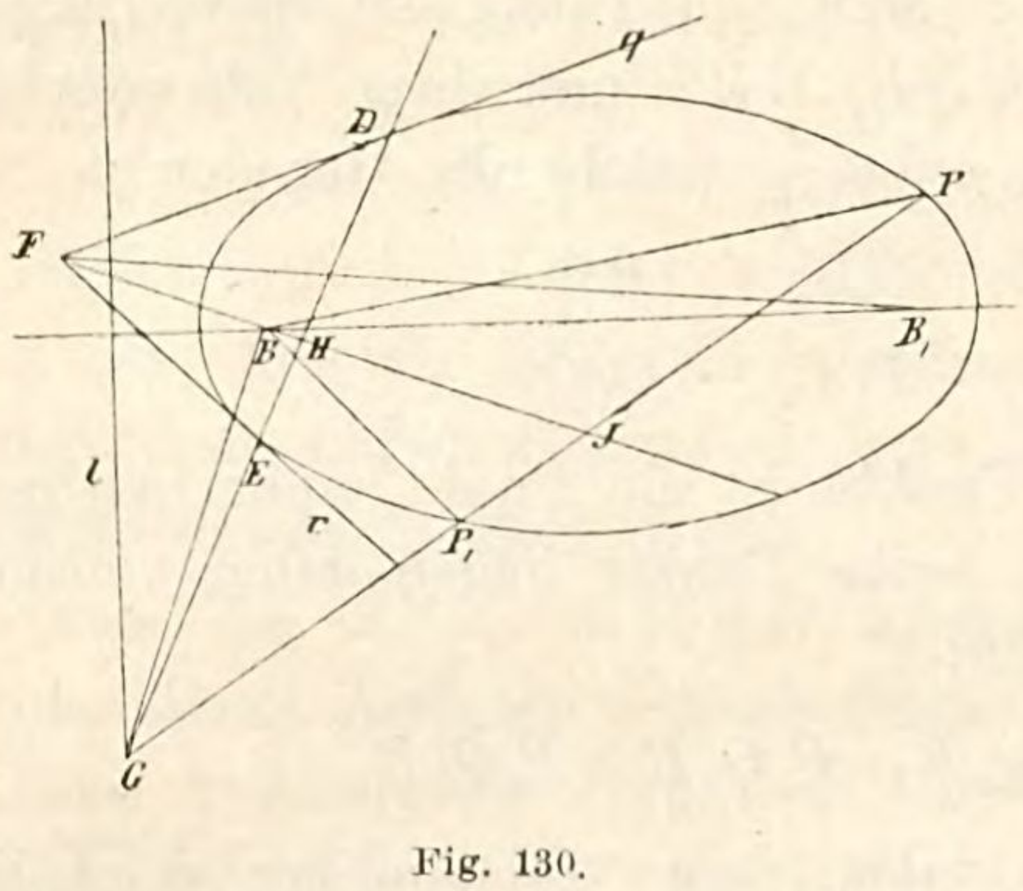


Fig. 130.

Die Berührungssehnen aller konfokalen Kegelschnitte mit zwei festen Tangenten gehen durch einen festen Punkt auf der Leitlinie des gemeinschaftlichen Brennpunktes.

Verbindet man G mit P, so ist derjenige Punkt P_1, welcher P von G und seiner Polare BF harmonisch trennt, ein Punkt des Kegelschnittes.

Ist B_1 der zweite Brennpunkt des Kegelschnittes, so ist

$$\sphericalangle DFB = EFB_1.$$

Ferner ist $$BP \pm B_1P = BP_1 \pm B_1P_1$$

jenachdem der Kegelschnitt Ellipse oder Hyperbel ist, also

$$BP - BP_1 = \mp (B_1P - B_1P_1).$$

Beschreibt man mit dieser bekannten Differenz um P einen Kreis, so ist B_1 der Mittelpunkt eines Kreises, welcher

den vorigen berührt, durch P_1 geht und dessen Mittelpunkt auf dem freien Schenkel des Winkels EFB_1 liegt.

XV. *Von einem Kegelschnitte kennt man einen Brennpunkt, zwei Punkte und eine Tangente.*

α. Sind B der Brennpunkt, P und P_1 die gegebenen Punkte, r die gegebene Tangente, so beschreibe man über BP und BP_1 Kreise, fälle auf r die Senkrechte BR, so sind diejenigen Kreise, welche die vorhin beschriebenen Kreise und den Punkt R berühren, Scheitelkreise der gesuchten Kegelschnitte.

β. Da (Fig. 130) $\sphericalangle FBG = 90^0$ ist, so sind BJ und BG Halbierungslinien des Winkels PBP_1 und seines Nebenwinkels, also sind die Punkte G und J bekannt; ferner ist der Schnittpunkt F der Tangente r mit der Winkelhalbierenden BJ bekannt, also läfst sich die Tangente q konstruieren, welche r von FB und FG harmonisch trennt. Man hat also wieder die vorige Aufgabe.

XVI. *Einen Kegelschnitt zu konstruieren, wenn gegeben sind:*

a. *ein Brennpunkt, zwei Punkte und die Lage der Hauptaxe.*

b. *Ein Brennpunkt, zwei Punkte und die Länge der Hauptaxe.*

c. *Ein Brennpunkt, ein Punkt, eine Tangente und die Länge oder Lage der Hauptaxe.*

d. *Ein Brennpunkt, zwei Tangenten und die Länge oder Lage der Hauptaxe.*

Die Auflösung ist ähnlich wie bei den vorhergehenden Aufgaben.

XVII. *Von einem Kegelschnitte kennt man einen Brennpunkt B, die Länge der Nebenaxe und*

a. *zwei Punkte*

b. *einen Punkt und eine Tangente*

c. *zwei Tangenten.*

Fällt man vom Brennpunkte auf die zur Hauptaxe parallelen Tangenten die Senkrechten, so liegen ihre Fufspunkte auf dem Scheitelkreise. Die Senkrechte ist aber gleich der Nebenaxe und der um B mit ihrer Hälfte beschriebene Kreis wird vom Scheitelkreise unter dem Durchmesser geschnitten.

Sind P und Q die gegebenen Punkte, so berührt der

Scheitelkreis die über BP und BQ beschriebenen Kreise, also ist die Aufgabe a. auf folgende zurückgeführt:

Einen Kreis zu zeichnen, der zwei andere berührt und einen dritten unter dem Durchmesser schneidet.

Analog löst man b. und c.

XVIII. *Aus zwei der Gröfse und Lage nach gegebenen konjugierten Durchmessern die Axen der Lage und Gröfse nach zu konstruieren.*

Sind AB und CD die konjugierten Durchmesser, so ziehe man in den Endpunkten die parallelen Tangenten; die Diagonalen des von ihnen gebildeten Parallelogramms schneiden sich im Mittelpunkte M des Kegelschnittes und sind auch konjugierte Durchmesser. Beide Paare konjugierter Durchmesser bestimmen eine Involution, in welcher das rechtwinklige Strahlenpaar die Axen des Kegelschnittes bildet. Mit der Tangente in A schneide man die eine Axe in E, ziehe EF parallel zu AB bis zum Durchschnitte mit CD in F, mache $CDFG$ harmonisch, sodafs F und G zugeordnet sind, so ist AG die Polare von E. Sie schneide die Axe ME in H; aus der Gleichung $a^2 = ME \,.\, MH$ bestimmt man die Länge der Halbaxe.

XIX. *Aus drei Punkten PQR und einem der Lage und seinem der Richtung nach gegebenen konjugierten Durchmesser die Grösse des ersten zu bestimmen.*

Die Sehnen PQ und PR schneiden einen Durchmesser in R_1 und Q_1; man mache PQR_1R_2 und PRQ_1Q_2 harmonisch, so dafs R_1R_2 und Q_1Q_2 zugeordnet sind, ziehe durch R_2 und Q_2 Parallelen zur Richtung des zweiten Durchmessers, bis sie den ersten in R_1' und Q_1' treffen und konstruiere dasjenige Punktpaar, welches die Strecken R_1R_1' und Q_1Q_1' harmonisch teilt.

XX. *Von einem Kegelschnitte kennt man den Mittelpunkt und drei Tangenten; man soll die Berührungspunkte des letzteren konstruieren.*

Die Tangenten bilden das Dreieck ABC, die Berührungspunkte seien $A_1B_1C_1$, der Mittelpunkt sei M. Die Gerade A_1B_1 ist die Polare von C und wird also von dem durch

C gehenden Durchmesser CM in D halbiert. Da aber alle Strecken zwischen den Tangenten AC und BC, welche durch CM halbiert werden, dieselbe Richtung haben, so ist A_1B_1 und ebenso A_1C_1 und B_1C_1 der Richtung nach bekannt. Man hat also in das Dreieck ABC ein anderes zu zeichnen, dessen Seiten eine bestimmte Richtung haben. VII.

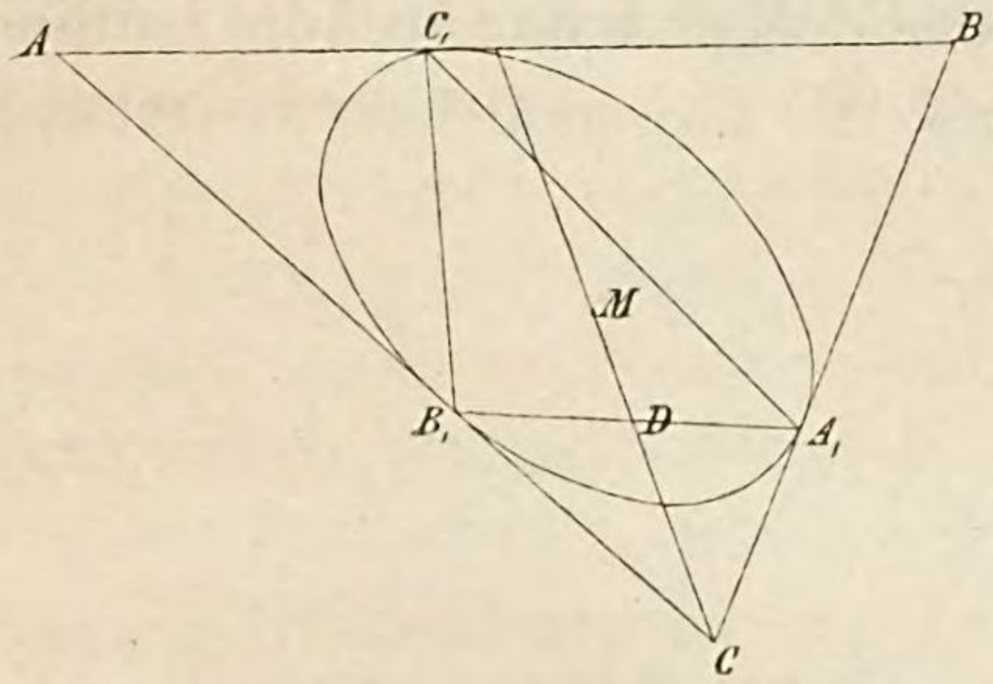


Fig. 131.

Die Hilfsaufgabe löst man leicht auf folgende Art. Man zeichnet ein beliebiges Dreieck $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1$ mit den gegebenen Seitenrichtungen und legt durch seine Ecken Parallelen zu den Seiten von ABC, welche sich in $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ treffen, so müssen sich $A\mathfrak{A}$, $B\mathfrak{B}$, $C\mathfrak{C}$ in einem Punkte P schneiden. Mit $\mathfrak{A}_1P$, $\mathfrak{B}_1P$, $\mathfrak{C}_1P$ schneidet man die Seiten BC, AC, AB in den gesuchten Punkten $A_1B_1C_1$.

XXI. *Von einem Kegelschnitte kennt man den Mittelpunkt und ein Poldreieck.*

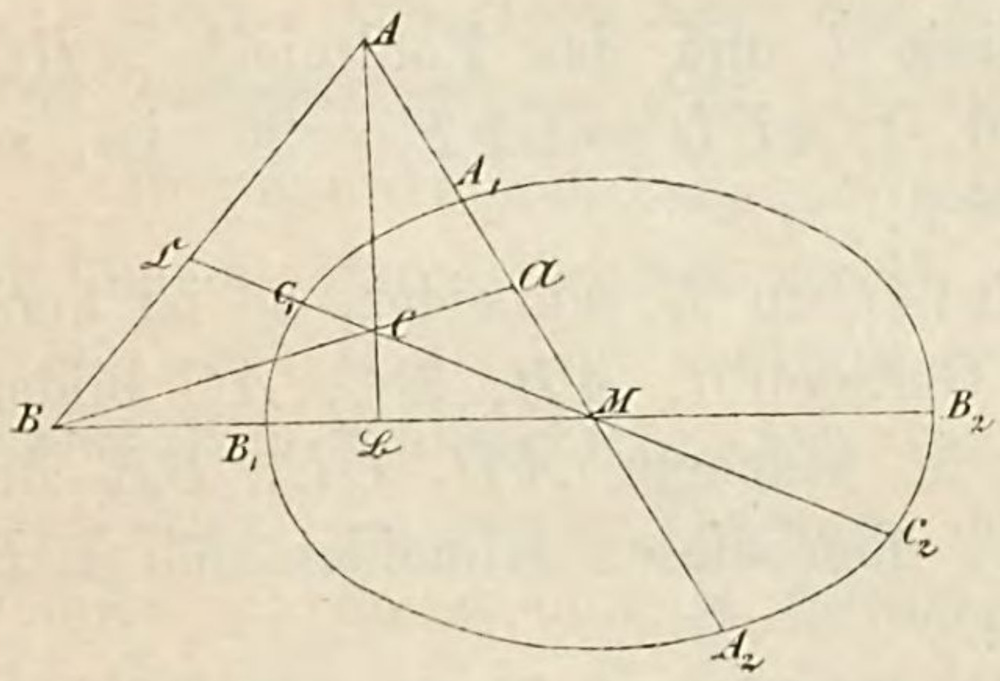


Fig. 132.

Der Mittelpunkt sei M, das Poldreieck ABC. Man schneide die Seiten desselben mit AM, BM, CM in $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, so werden die Durchmesser A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 durch $A\mathfrak{A}$, $B\mathfrak{B}$, $C\mathfrak{C}$ harmonisch geteilt, also ist

$$MA_1^2 = MA \,.\, M\mathfrak{A}.$$

XXII. *Von einem Kegelschnitte kennt man einen Brennpunkt und ein Poldreieck.*

Der Brennpunkt sei F, das Poldreieck ABC. Sind D und E die Schnittpunkte der Leitlinie des Brennpunktes F mit BC und AB, so sind AF und CF die Polaren von D und E. Denn die Polare eines Punktes der Leitlinie geht

durch den Brennpunkt und D liegt auf der Polare BC von A, E auf derjenigen AB von C. Man kennt also die Leitlinie.

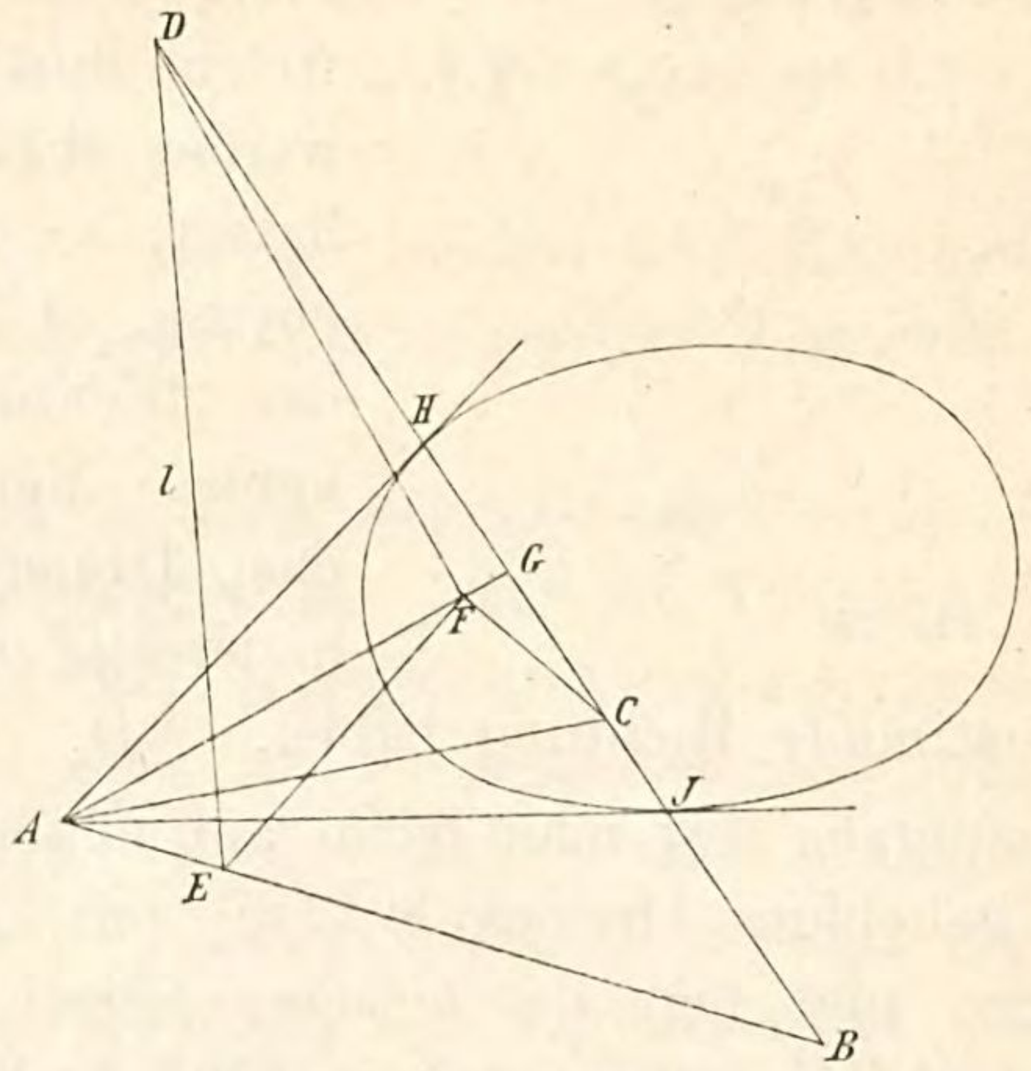


Fig. 133.

Die Gerade AF schneide BC in G; sind dann H und J die Schnittpunkte mit dem Kegelschnitte, so trennen sie sowol B und C als D und G harmonisch und sind dadurch bestimmt.

XXIII. *Von einem Kegelschnitte kennt man eine Leitlinie und ein Poldreieck.* Fig. 133.

Gegeben sei die Leitlinie l und das Poldreieck ABC. Da D und E bekannt und $\sphericalangle AFD = CFE = 90^0$ ist, so findet man den Brennpunkt F.

Wenn man noch l mit AC in K schneidet, so ist auch $\sphericalangle KFB = 90^0$. Die vier Geraden l, AB, BC, AC bilden ein vollständiges Vierseit, in welchem AD, CE, BK die Diagonalen sind. Die Kreise über diesen schneiden sich in F. Daraus aber folgt der Satz:

„Wenn man über den Diagonalen eines vollständigen Vierseits Kreise zeichnet, so schneiden sich dieselben in einem Punkte, dem Brennpunkte eines Kegelschnittes, welcher die eine Seite als Leitlinie und die drei anderen als Poldreiseit hat.“

XXIV. *Von einem Kegelschnitte kennt man einen Brennpunkt, einen Punkt und ein Paar Pol und Polare.*

Der Brennpunkt sei B, der gegebene Punkt P, und das Paar Pol und Polare seien A und a. Verbindet man A mit

B, so mufs der Pol von AB sowol auf a, als auf der Senkrechten in B auf BA liegen; der Schnittpunkt beider sei C. Konstruiert man dann auf CP denjenigen Punkt Q, welcher P

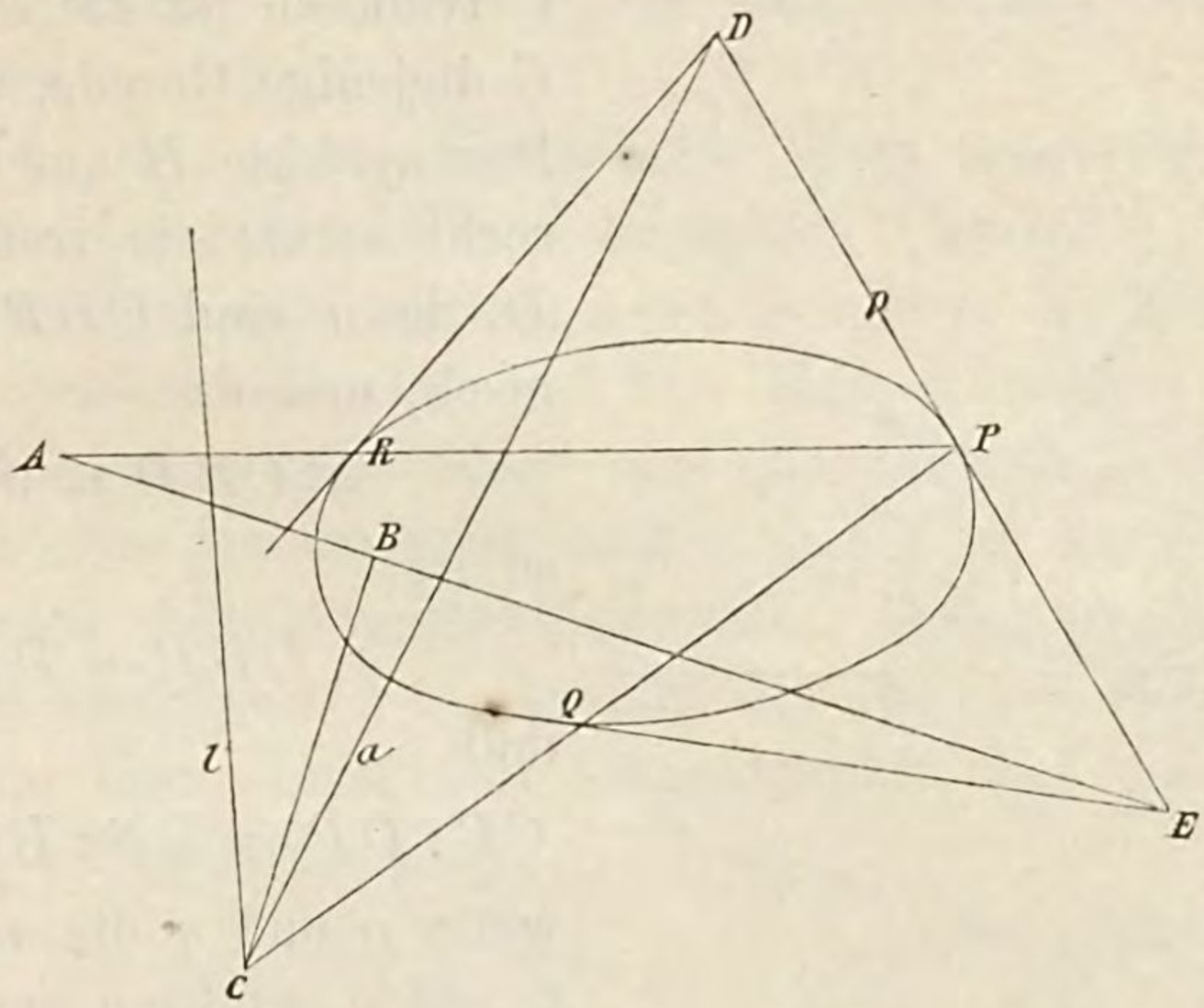


Fig. 134.

von C und seiner Polare AB und ebenso auf AP denjenigen Punkt R, welcher P von A und a harmonisch trennt, so sind Q und R Punkte des Kegelschnittes.

XXV. *Von einem Kegelschnitte kennt man einen Brennpunkt, eine Tangente und ein Paar Pol und Polare.* Fig. 134.

Brennpunkt und Tangente seien B und p, Pol und Polare A und a. Man bestimmt zuerst, wie in der vorigen Aufgabe, den Punkt C als Durchschnitt von a mit der in B auf AB errichteten Senkrechten. Die Tangente p schneide a in D; man findet die zweite Tangente durch D als diejenige Gerade, welche p von a und A harmonisch trennt; man schneide ferner p mit AB in E, dann ist CP die Polare von E und diejenige Gerade, welche p von CE und AE harmonisch trennt, ist die andere Tangente durch E. Also kennt man vom Kegelschnitte einen Brennpunkt und drei Tangenten.

XXVI. *Von einem Kegelschnitte kennt man eine Leitlinie, eine Tangente mit ihrem Berührungspunkte und einen Punkt.*

Die Leitlinie sei l, die Tangente mit ihrem Berührungspunkte p und P, der Punkt Q. Schneidet man die Leitlinie

mit p in A, so mufs der Brennpunkt auf einem Kreise über AP liegen.

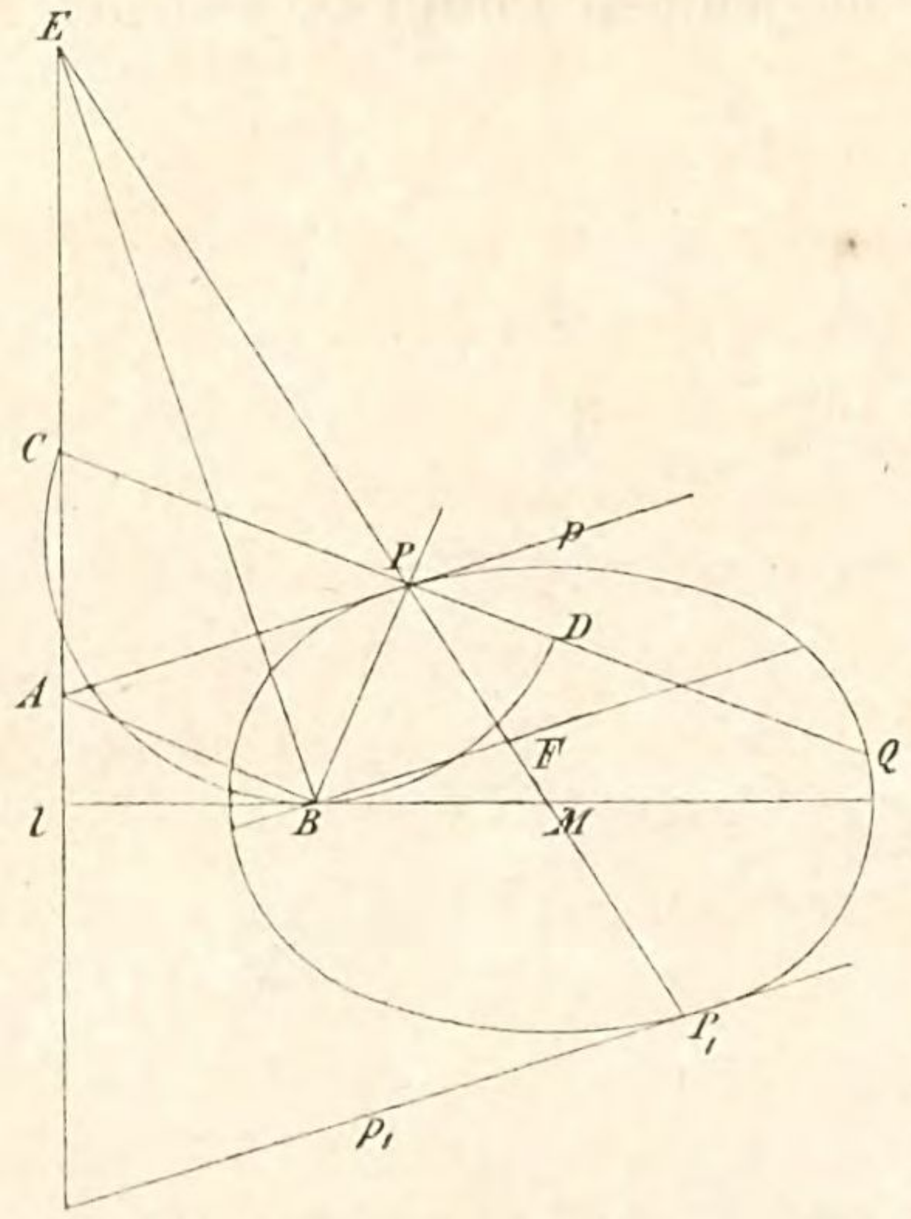


Fig. 135.

Wenn PQ die Leitlinie in C trifft, so ist die Polare von C diejenige Gerade, welche im Brennpunkte B auf CB senkrecht steht; sie treffe PQ in D, dann sind $CDPQ$ harmonisch, und da

$$\sphericalangle CBD = 90^0,$$

so ist

$$\sphericalangle DBP = DBQ$$

und

$$CP : DP = BP : BQ = p : q$$

wenn p und q die von P und Q auf l gefällten Senkrechten sind. Man kann demnach den Punkt D konstruieren und hat als zweiten Ort für den Brennpunkt B den Kreis über CD als Durchmesser.

XXVII. *Von einem Kegelschnitte kennt man den Mittelpunkt, eine Leitlinie und einen Punkt.* Fig. 135.

Mittelpunkt, Leitlinie und Punkt seien M, l, P. Man ziehe MP, mache darauf $MP_1 = MP$, so ist P_1 ein zweiter Punkt des Kegelschnittes, schneide l mit MP in E, so trifft die Polare von E, die Gerade MP in demjenigen Punkte F, welcher E von P und P_1 harmonisch trennt. Diese Polare steht in B auf EB senkrecht, also liegt B auf einem Kreise über EF als Durchmesser, welcher die Axe im Brennpunkte trifft.

XXVIII. *Von einem Kegelschnitte kennt man eine Leitlinie l, einen Punkt P und ein Paar Pol und Polare A und a.* Fig. zu XXIV.

C sei der Schnittpunkt von l und a; dann ist $\sphericalangle ABC = 90^0$, wenn B den Brennpunkt bezeichnet, also hat man im Kreise über AC als Durchmesser einen Ort für den Brennpunkt. Da AB die Polare von C ist, so findet man auf CP den

zweiten Schnittpunkt Q mit dem Kegelschnitte, wenn man C und AB durch P und Q harmonisch trennt. Weiter verhalten sich PB und QB, wie die Entfernungen der Punkte P und Q von der Leitlinie, also kennt man einen zweiten Ort für den Brennpunkt.

XXIX. *Von einem Kegelschnitte kennt man einen Brennpunkt, seine Leitlinie und zwei konjugierte Punkte.*

Brennpunkt und Leitlinie seien B und l; die beiden konjugierten Punkte seien P und P_1. Man schneide l mit PP_1 in Q, konstruiere die Polare von Q, indem man in B auf BQ die Senkrechte errichtet, und schneide mit ihr PP_1 in Q_1, so sind auch QQ_1 konjugierte Punkte. Dadurch aber ist die Involution konjugierter Punkte auf der Geraden PQ gegeben.

Wenn diese Involution Doppelpunkte hat, so sind es Punkte des Kegelschnittes.

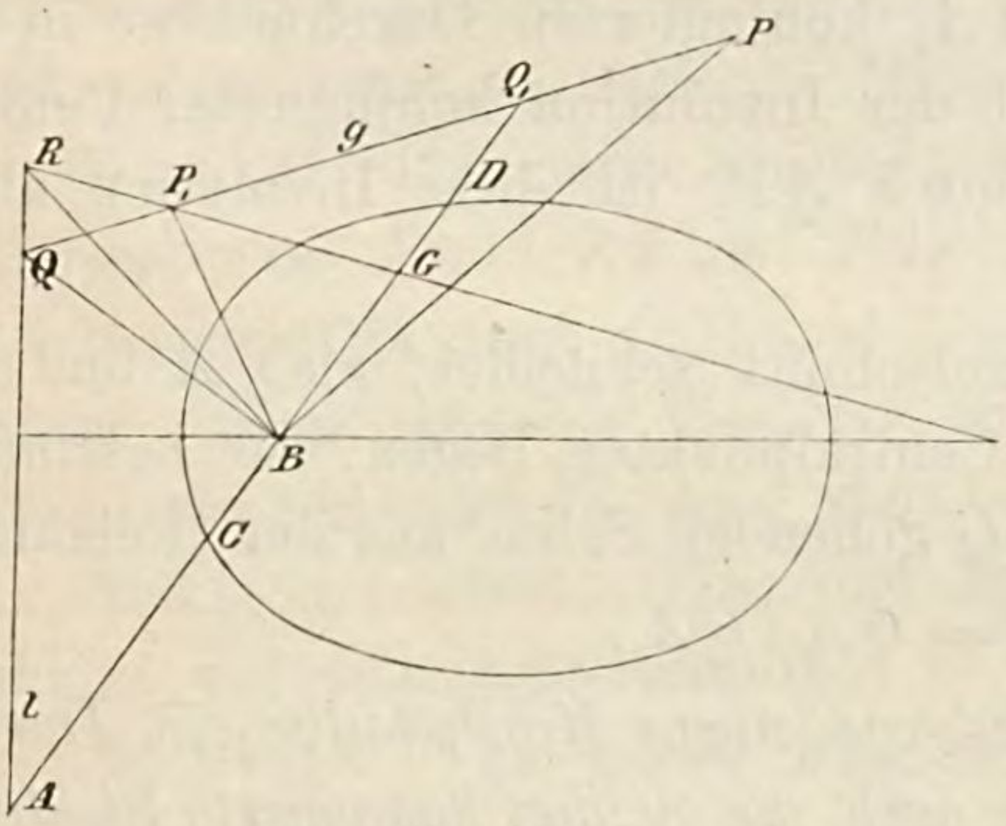


Fig. 136.

Im anderen Falle ziehe man BP und senkrecht darauf BR, dann ist der Schnittpunkt G von BQ_1 und RP_1 der Pol von g. Man schneide nun l mit BG in A, dann liegt das Punktpaar CD, welches die Strecken AB und GQ_1 harmonisch teilt, auf dem Kegelschnitte.

XXX. *Von einem Kegelschnitte kennt man die Lage der beiden Axen und auf einer Geraden g die Involution konjugierter Punkte.*

Man schneide die beiden Axen, die sich in M schneiden, mit g in P in Q, bestimme auf g die involutorisch zugeordneten Punkte P_1 und Q_1, fälle von P_1 und Q_1 auf PM und QM die Senkrechten, P_1P_2 und Q_1Q_2, so findet man die Endpunkte AA_1 und BB_1 der Axen, welche durch PP_2 und QQ_2 harmonisch getrennt werden, aus den Gleichungen $MA^2 = MA_1^2 = MP \,.\, MP_2$ und $MB^2 = MB_1^2 = MQ \,.\, MQ_2$.

XXXI. *Von einem Kegelschnitte kennt man die Lage der beiden Axen und ein Paar Pol und Polare.*

Der Mittelpunkt des Kegelschnittes sei M, das Paar Pol und Polare sei A und a. Man schneide die eine Axe mit a in P, so mufs die Polare von P durch A gehen und auf derselben Axe senkrecht stehen; daher fälle man die Senkrechte AQ auf diese Axe und bestimme die Länge der Halbaxe aus der Gleichung

$$x^2 = MP \,.\, MQ.$$

XXXII. *Von einem Kegelschnitte kennt man einen Brennpunkt, seine Leitlinie und ein Paar Pol und Polare.*

Auflösung wie in XXXI.

XXXIII. *Von einem Kegelschnitte kennt man zwei Paare konjugierter Durchmesser und zwei konjugierte Punkte.*

Der Mittelpunkt sei M; die beiden konjugierten Punkte seien A und A_1. Durch zwei Paare konjugierter Durchmesser sind alle Paare bestimmt; man schneide die Gerade AA_1 mit dem zur Richtung von AA_1 konjugierten Durchmesser in Q, so ist Q der Centralpunkt der Involution konjugierter Punkte auf AA_1; dadurch und durch AA_1 ist diese Involution aber bestimmt.

Wenn AA_1 den Kegelschnitt schneidet, also A und A_1 auf derselben Seite des Centralpunktes liegen, so bestimmt man die Länge der durch Q gehenden Sehne aus der Gleichung

$$x^2 = QA \,.\, QA_1.$$

XXXIV. *Gegeben sind von einem Kegelschnitte ein Durchmesser der Gröfse und Lage nach, die zu ihm konjugierte Richtung und ein Paar konjugierter Punkte.*

Die Endpunkte des Durchmessers seien A und $\mathfrak{A}$, der Mittelpunkt sei M; die konjugierte Richtung ist durch die Gerade l bestimmt. Ferner seien B und B_1 zwei konjugierte Punkte. Die Gerade BB_1 schneide den Durchmesser in C; man mache $A\mathfrak{A}C\mathfrak{C}$ harmonisch, so ist die Parallele durch $\mathfrak{C}$ zu l die Polare von C; sie schneide die Gerade BB_1 in $\mathfrak{C}_1$, dann sind $C\mathfrak{C}_1$ auch zwei konjugierte Punkte.

Wenn BB_1 den Kegelschnitt trifft, so sind diejenigen Punkte, welche BB_1 und $C\mathfrak{C}_1$ harmonisch teilen, Punkte des Kegelschnittes.

Wenn BB_1 den Kegelschnitt nicht trifft, so konstruiere

man auf ihr den Centralpunkt Q der Involution, dann liegt auf MQ der Pol P von BB_1. Dieser liegt auch auf der Polare von C, also kann man ihn finden und bestimmt dann auf dem Durchmesser MP die Länge x des Halbmessers aus der Gleichung

$$x^2 = MP \cdot MQ.$$

XXXV. *Gegeben ist der Mittelpunkt M, ein Paar Pol und Polare A und a und ein Paar konjugierter Punkte P und P_1.*

Die Gerade a ist die zum Durchmesser AM konjugierte Richtung; ist B der Schnittpunkt beider, so ist die Länge x des Halbmessers gegeben durch die Gleichung $x^2 = MA \cdot MB$. Dadurch aber ist die Aufgabe auf die vorige zurückgeführt.

XXXVI. *Gegeben ist ein Poldreieck, eine Axe und die Diagonale eines umgeschriebenen Rechtecks.*

Man konstruiere um das Poldreieck den Kreis und einen anderen mit der gegebenen Diagonale als Radius, welcher jenen rechtwinklig schneidet und dessen Mittelpunkt auf der Axe liegt, so ist letzterer auch der Mittelpunkt des Kegelschnittes.

XXXVII. *Von einem Kegelschnitte kennt man die Lage einer Axe und zwei Paare Pol und Polare.*

Es seien A und a, B und b die beiden Paare Pol und Polare. Man schneide die Axe mit a und b in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, fälle senkrecht auf die Axe $A\mathfrak{A}_1$ und $B\mathfrak{B}_1$ und konstruiere das Punktpaar, welches $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$ harmonisch trennt, so liegt es auf dem Kegelschnitte.

XXXVIII. *Von einem Kegelschnitte kennt man eine Axe der Lage nach, ein Paar Pol und Polare und zwei konjugierte Punkte.*

Es sei B der Brennpunkt, A und a das Paar Pol und Polare. Letztere schneide die Axe in C; man fälle c von A aus senkrecht auf die Axe, so ist c die Polare von C. Schneidet man noch a mit c in D, so ist AC die Polare von D. Fig. 137.

Sind P und P_1 die gegebenen konjugierten Punkte, so schneide man c mit PP_1 in R; auf c ist durch die beiden konjugierten Punkte A und D und durch den Centralpunkt Q, den Schnittpunkt mit der Axe, die Involution konjugierter Punkte bestimmt. Ist $\mathfrak{R}$ der zu R konjugierte Punkt, so ist $C\mathfrak{R}$ die Polare von R; sie schneidet PP_1 in dem zu R konjugierten Punkte R_1.

Giebt es ein Punktpaar, welches die Strecken PP_1 und RR_1 harmonisch teilt, so gehört es dem Kegelschnitt an.

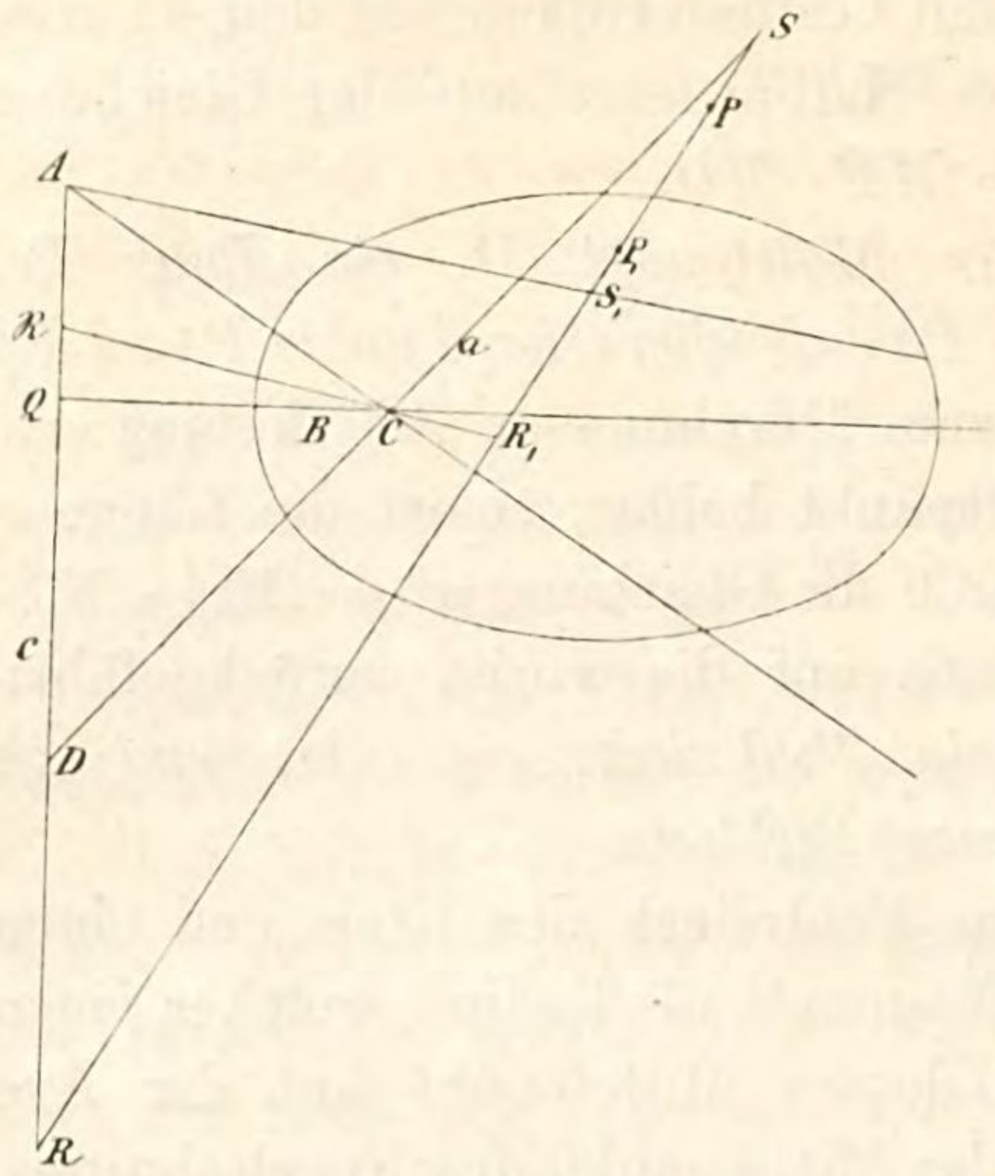


Fig. 137.

Wenn es kein solches Punktpaar giebt, so schneide man PP_1 mit a in S, konstruiere zu S auf PP_1 den involutorisch zugeordneten Punkt S_1, so ist AS_1 die Polare von S und schneidet $\Re R_1$ im Pole G von PP_1. Man verbindet G mit der innerhalb des Kegelschnittes liegenden Ecke des Poldreiecks ACD und erhält auf der Verbindungslinie zwei Paare konjugierter Punkte. Dasjenige Punktpaar, welches beide harmonisch trennt, liegt auf dem Kegelschnitte.

XXXIX. *Von einer Parabel kennt man den Brennpunkt und ein Paar Pol und Polare.*

Der Brennpunkt sei B, das Paar Pol und Polare sei A und a. Errichtet man in B auf AB die Senkrechte, so trifft sie die Polare a in einem Punkte C der Leitlinie, denn der Pol von AB mufs sowohl auf der in B errichteten Senkrechten, als auf a, als auf der Leitlinie liegen. Man kennt somit einen Punkt der Leitlinie l. Um einen zweiten Punkt derselben zu erhalten, denke man sich AD senkrecht auf die Leitlinie gefällt, dann liegt der Pol von AD im Unendlichen

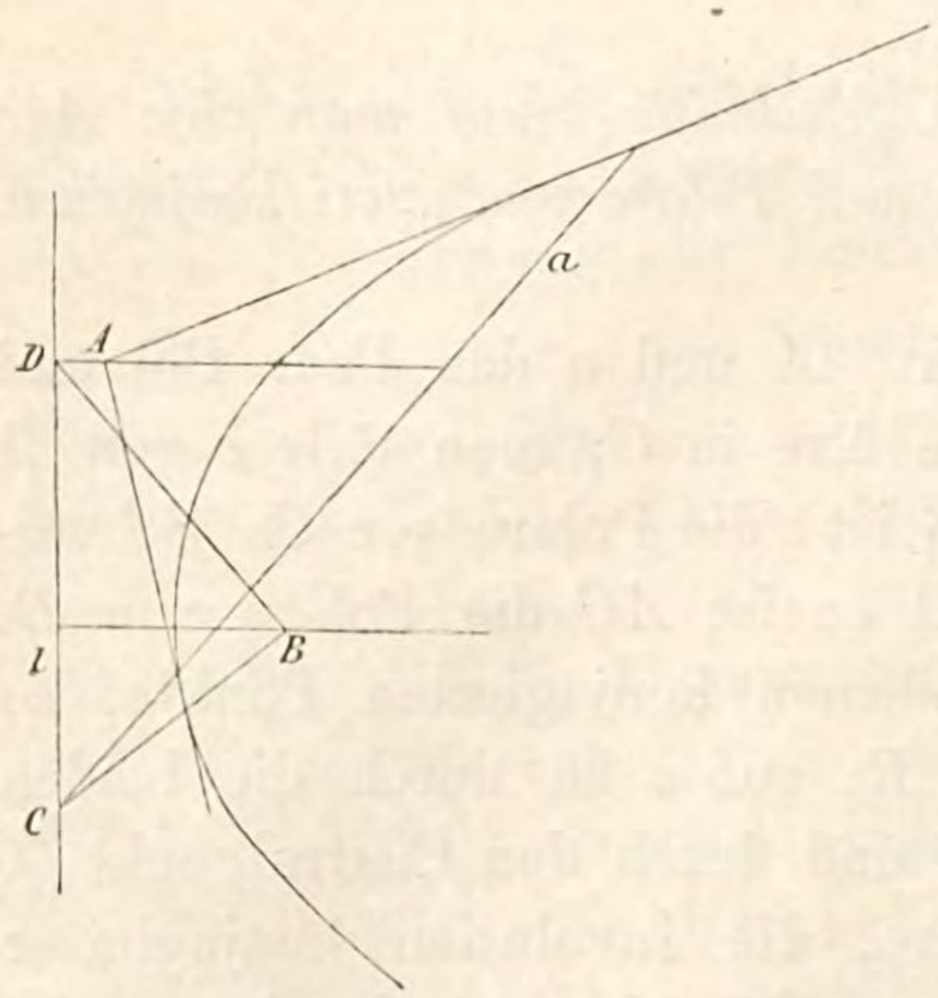


Fig. 138.

auf a und auf der Polare d von D, welche im Brennpunkte B auf DB senkrecht steht. Diese mufs daher zu a parallel sein, also ist

$$BD \perp a.$$

Man findet also D, indem man von B die Senkrechte auf a fällt und mit dem Halbkreise über AC als Durchmesser zum Durchschnitt bringt.

XXXX. *Von einer Parabel kennt man die Leitlinie und ein Paar Pol und Polare.* Fig. 138.

Die Leitlinie sei l, Pol und Polare seien A und a.

Der Brennpunkt B mufs auf einem Kreise über AC als Durchmesser und auf der Geraden liegen, welche man senkrecht von D auf a fällt.

XXXXI. *Von einer Parabel kennt man die Scheiteltangente und ein Paar Pol und Polare.*

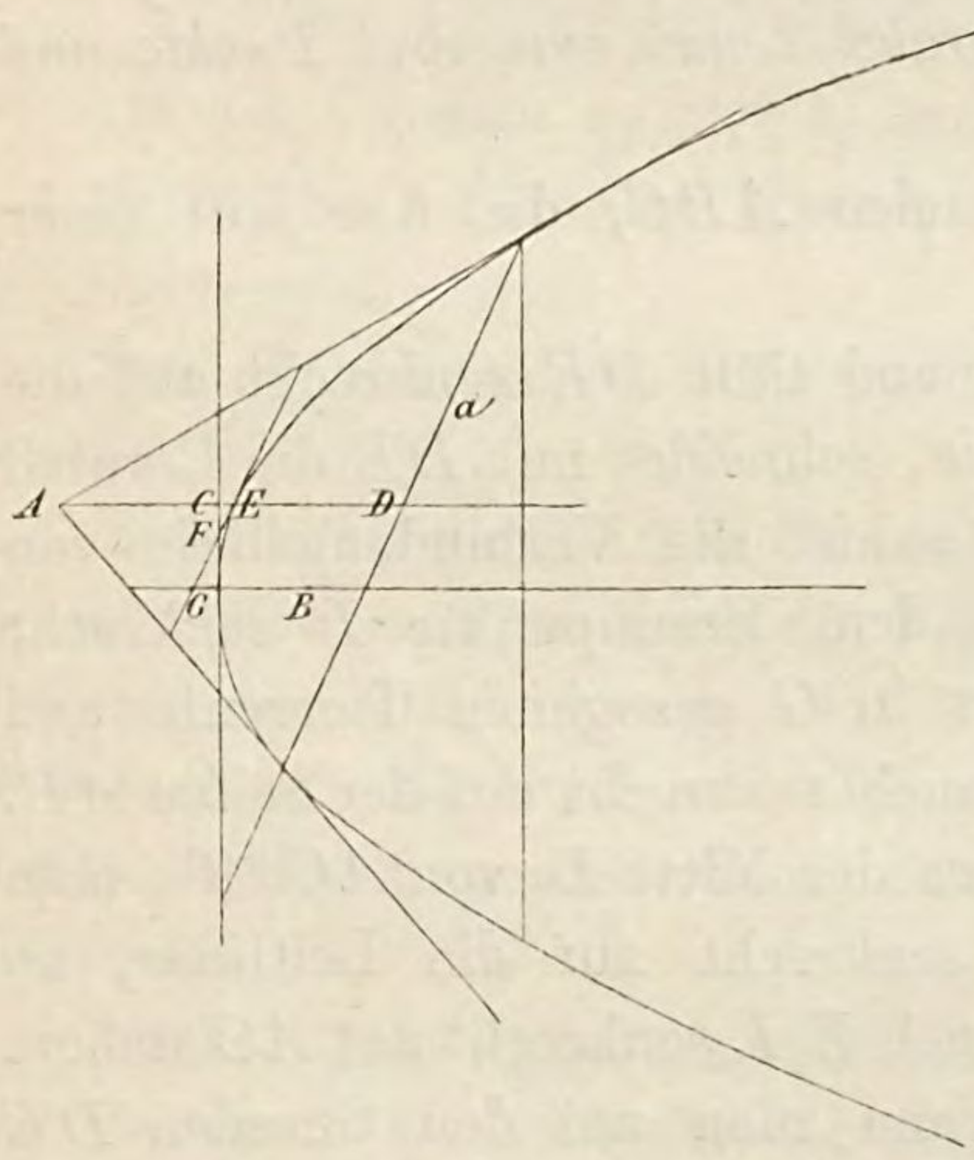


Fig. 139.

Die Scheiteltangente sei s, Pol und Polare seien A und a.

Fällt man AC senkrecht auf s, und ist D der Schnittpunkt von AC mit a, so ist die Mitte E von AD ein Punkt der Parabel und die Parallele durch E zu a ist eine Tangente der Parabel. Sie schneide s in F. — Ist B der gesuchte Brennpunkt, so mufs BF auf EF senkrecht stehen und zieht man BG senkrecht auf s bis zum Durchschnitte mit EF, so ist

$$FG = FE.$$

XXXXII. *Von einer Parabel kennt man die Lage der Axe und ein Paar Pol und Polare.*

Die Gerade g sei die Axe, A und a seien Pol und Polare.

Man schneide g mit a in C, fälle AD senkrecht auf g,

so ist der Scheitel S der Parabel derjenige Punkt, welcher CD halbiert. Damit ist die Aufgabe auf XXXXI. zurückgeführt.

XXXXIII. *Von einer Parabel kennt man zwei Punkte und die Lage der Axe.*

Die Punkte seien A und B, die Lage der Axe sei durch die Gerade g bestimmt.

Man schneide g mit AB in C, mache $ABCD$ harmonisch, so dafs C und D zugeordnet sind, fälle DE senkrecht auf g und halbiere CE in S, so ist S der Scheitel der Parabel.

XXXXIV. *Von einer Parabel kennt man zwei Tangenten und die Lage der Axe.*

Die beiden Tangenten a und b mögen sich in P schneiden; durch P ziehe man die Gerade c parallel zur Axe und eine zweite Gerade d so, dafs

$$\sphericalangle (ac) = (bd)$$

dann trifft d die Axe im Brennpunkte.

XXXXV. *Von einer Parabel kennt man drei Punkte und die Richtung der Axe.*

Die gegebenen Punkte seien ABC, die Axe soll einer Geraden g parallel laufen.

Halbiert man AB in D und fällt DE senkrecht auf die Leitlinie, schneidet mit DE die Parabel in G, so ist die Verbindungslinie von E mit dem Brennpunkte F senkrecht auf der in G gezogenen Tangente und daher auch senkrecht auf der Sehne AB.

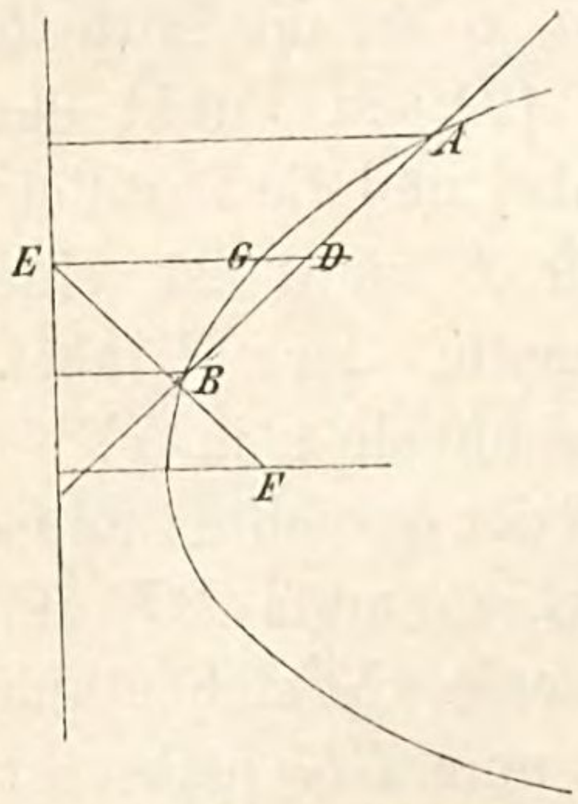


Fig. 140.

Aus der Mitte D_1 von AC fälle man D_1E_1 senkrecht auf die Leitlinie, so mufs auch E_1F senkrecht auf AC stehen.

Wenn man auf den Geraden DE und D_1E_1 irgend zwei Punkte X und X_1 nimmt, deren Verbindungsgerade senkrecht zur Axe steht, so müssen die Senkrechten aus ihnen auf die Sehnen AB und AC sich stets in einem Punkte Y der Axe schneiden. Man kann daher einen Punkt der Axe finden und die Parallele durch ihn zu g giebt dann die Axe selbst. Dadurch ist die Aufgabe auf XXXXIII. zurückgeführt.

XXXXVI. *Von einer Parabel kennt man drei Tangenten und die Richtung der Axe.*

Die gegebenen Tangenten seien abc, die Axe soll einer Geraden g parallel sein.

Die Schnittpunkte der Tangenten a und b, b und c, c und a mögen mit C, A, B bezeichnet werden. Zieht man durch diese Parallelen zur Axe, so halbieren sie die Berührungssehnen. Da aber die Parallelen bekannt sind, so kennt man auch die Richtung der Berührungssehnen. Zeichnet man demnach in das Dreick ABC ein anderes, dessen Seiten die bekannten Richtungen der Berührungssehnen haben, so sind seine Ecken die Berührungspunkte. Den Brennpunkt findet man, wenn man in A und B die Parallelen a_1 und b_1 zur Axe zieht und durch dieselben Punkte andere Gerade a_2 und b_2 zieht, so dafs

$$\sphericalangle (AC, a_1) = (AB, a_2) \text{ und } \sphericalangle (BC, b_1) = (BA, b_2)$$

ist und die Geraden a_2 und b_2 zum Durchschnitte bringt.

XXXXVII. *Von einer Parabel kennt man ein Poldreieck und die Richtung der Axe.*

Das Poldreieck sei ABC, die Axe sei der Geraden g parallel.

Zieht man durch A die Parallele zur Axe, welche BC in A_1 schneiden mag, so mufs die Polare von A_1 durch A gehen, also ist die Mitte A_2 von AA_1 ein Punkt der Parabel und die Parallele a durch A_2 eine Tangente derselben. In analoger Weise erhält man noch zwei Punkte der Parabel mit ihren Tangenten.

XXXXVIII. *Von einer Parabel kennt man Brennpunkt und Leitlinie; man soll ihre Schnittpunkte mit einer Geraden g konstruieren.*

Brennpunkt und Leitlinie seien B und l, die gegebene Fig. 141.
Gerade sei g.

α. Man kann zunächst die zu g parallele Tangente und ihren Berührungspunkt konstruieren. Dazu fälle man BA senkrecht auf die Leitlinie, halbiere AB in C, errichte in C die Scheiteltangente c, und schneide sie mit der aus B auf g gefällten Senkrechten in D, so ist die durch D zu g gezogene

Parallele Tangente der Parabel. Um den Berührungspunkt zu finden, verlängere man BD bis zum Durchschnitte E mit der Leitlinie, so trifft die durch E zur Axe parallel gezogene Gerade die Tangente im Berührungspunkte F und die Gerade g im Halbierungspunkte G der auf ihr abgeschnittenen Parabelsehne.

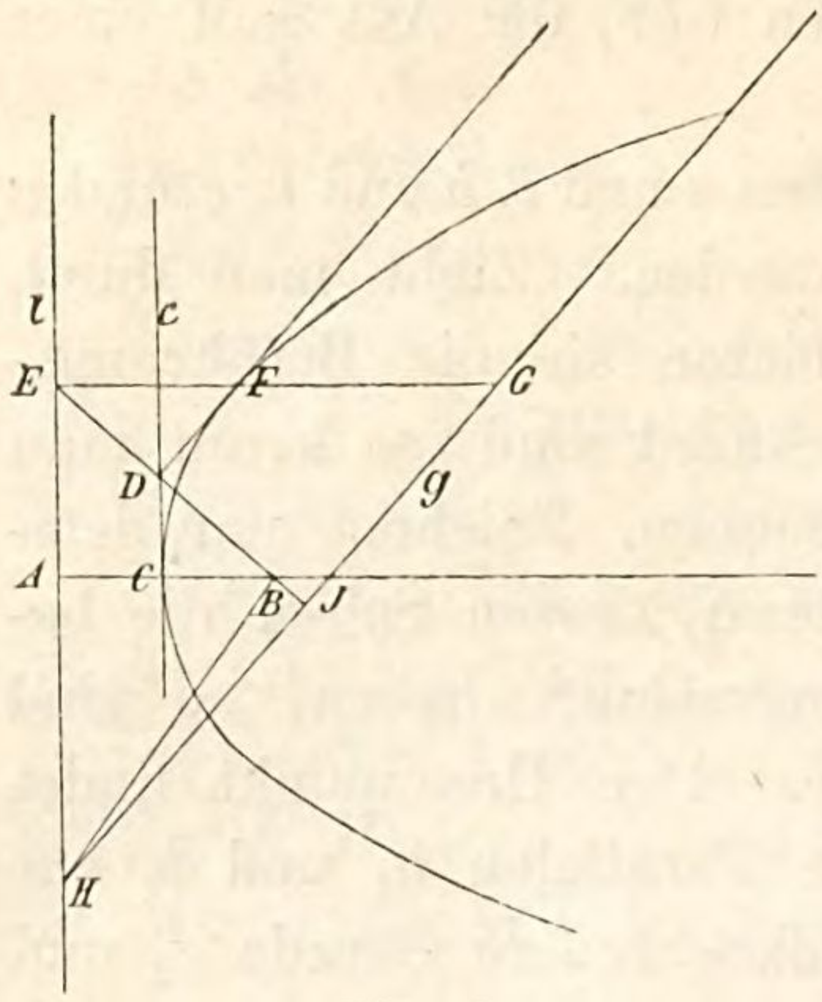


Fig. 141.

Schneidet man ferner die Leitlinie l mit g in H, zieht HB und in B darauf die Senkrechte, welche g in J treffen mag, so wird die Parabelsehne durch H und J harmonisch geteilt. Die Hälfte x dieser Sehne wird daher bestimmt durch die Gleichung

$$x^2 = GH \cdot GJ.$$

β. Sind K und L die gesuchten Schnittpunkte, KK_1 und LL_1 senkrecht zur Leitlinie, so ist

$$KB = KK_1 \text{ und } LB = LL_1.$$

Daher sind L und L_1 die Mittelpunkte zweier Kreise, welche B und l berühren. Man findet leicht einen zweiten Punkt B_1, durch den diese Kreise gehen müssen, nämlich den Gegenpunkt von B in Bezug auf g.

XXXXIX. *Von einem Kegelschnitte kennt man einen Brennpunkt, seine Leitlinie und einen Punkt; man soll seine Schnittpunkte mit einer Geraden bestimmen.*

Brennpunkt und Leitlinie seien B und l, der gegebene Punkt sei P, die gegebene Gerade g.

α. Man fälle BA und PD senkrecht auf l, teile AB in Verhältnisse $PD : PB$ in den Punkten C und C_1, so sind diese Punkte die Endpunkte der Hauptaxe. Man kann daher leicht den zweiten Brennpunkt B_1 und die zweite Leitlinie l_1 konstruieren.

Die gegebene Gerade g schneide l und l_1 in G und G_1; man konstruiere die Polaren dieser Punkte, indem man in B und B_1 auf GB und G_1B_1 die Senkrechten errichtet. Diese

mögen g in H und H_1 treffen, dann sind die Punkte, welche GH und G_1H_1 harmonisch teilen, die Schnittpunkte von g mit dem Kegelschnitte.

β. Nachdem man die Hauptaxe CC_1 und den zweiten Brennpunkt B_1 konstruiert hat, beschreibe man um B_1 mit CC_1 den Leitkreis von B, bestimme den Gegenpunkt B' von B, so sind die Mittelpunkte derjenigen Kreise, welche BB' und den Leitkreis von B berühren, die Schnittpunkte mit dem Kegelschnitte.

XXXXX. *Von zwei confocalen Kegelschnitten K und K_1 kennt man den gemeinschaftlichen Brennpunkt und je drei Punkte; man soll die Schnittpunkte konstruieren.*

Der Brennpunkt sei B, die drei Punkte PQR und $P_1Q_1R_1$.

Ist S ein gemeinschaftlicher Punkt und denkt man sich B mit S verbunden und über der Verbindungsstrecke als Durchmesser einen Kreis beschrieben, so berührt dieser die Scheitelkreise beider Kegelschnitte.

Man hat also die Scheitelkreise zu konstruieren und die Mittelpunkte derjenigen Kreise zu bestimmen, welche diese berühren und durch den gemeinschaftlichen Brennpunkt gehen.

354a. *Aufgaben.*

I. Ein Kegelschnitt ist durch fünf Punkte gegeben; man soll seine Schnittpunkte mit einer Geraden konstruieren.

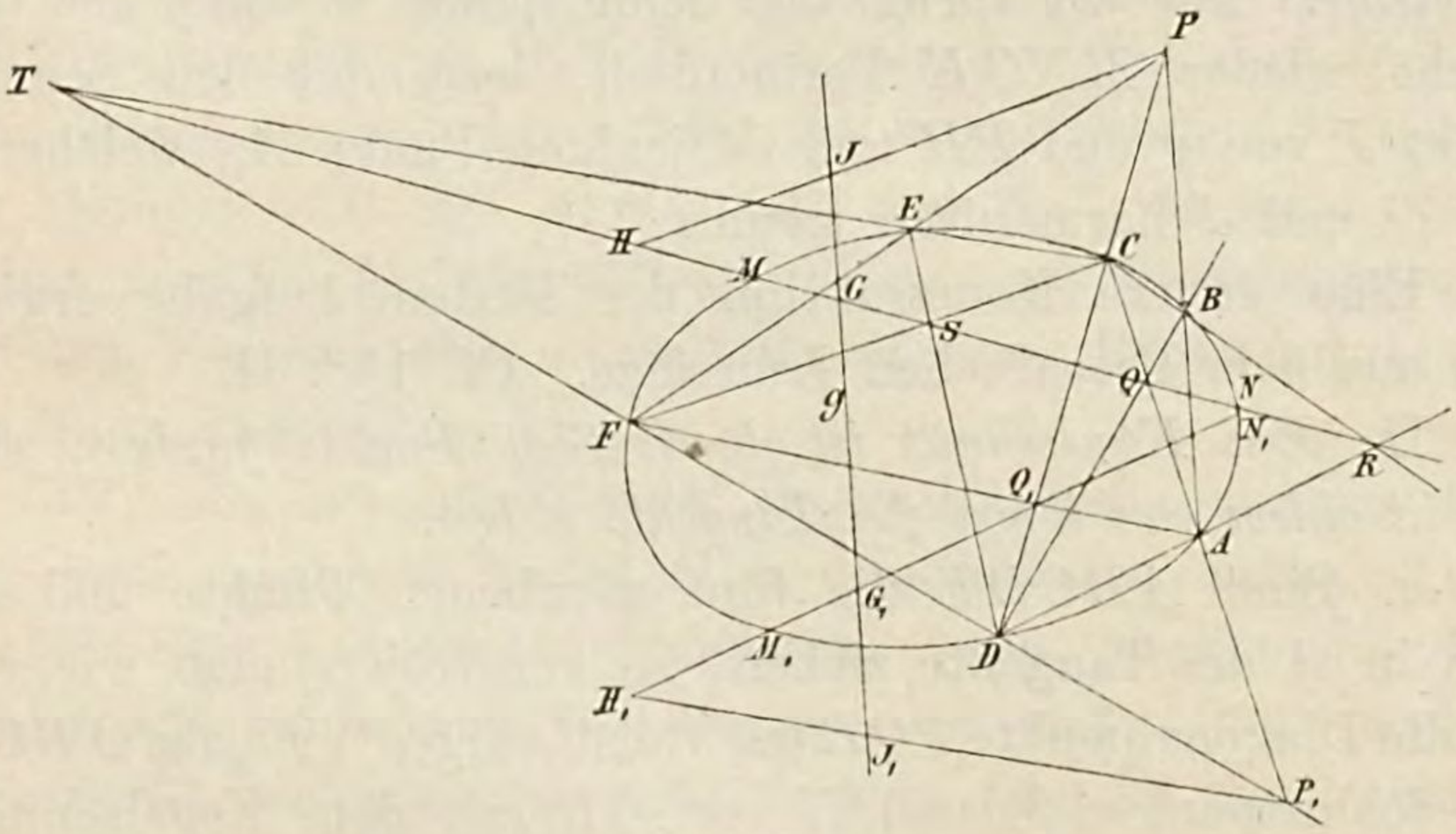


Fig. 142.

α. Die gegebenen Punkte seien $ABCDE$, die gegebene Gerade g. Man konstruiere die drei Diagonalpunkte PQR des

vollständigen Vierecks $ABCD$, so daſs P der Schnittpunkt von AB und CD, Q derjenige von AC und BD und endlich R derjenige von AD und BC ist. Dann ist RQ die Polare von P. Auf PE konstruiere man den Punkt F, welcher E von P und QR harmonisch trennt, so liegt er auf dem Kegelschnitte. Die Schnittpunkte S, T von CE und DF, CF und DE liegen auch auf der Polare QR von P. Auf dieser sind diejenigen Punkte M und N, welche die Strecken QR und ST harmonisch teilen, Punkte des Kegelschnittes.

In gleicher Weise bestimme man die Diagonalpunkte $P_1Q_1R_1$ des vollständigen Vierecks $ACFD$ und auf der Polare Q_1R_1 von P_1 die Schnittpunkte M_1N_1 mit dem Kegelschnitte.

Es mag die Gerade g die Polaren MN und M_1N_1 von P und P_1 in G und G_1 schneiden; man mache $MNGH$ und MNG_1H_1 harmonisch, so daſs H und H_1 die den Punkten G und G_1 zugeordneten Punkte sind, so sind PH und P_1H_1 die Polaren von G und G_1. Bezeichnet man die Schnittpunkte dieser Polaren und der Geraden g mit J und J_1, so sind diejenigen Punkte, welche die Strecken GJ und G_1J_1 harmonisch teilen, die Schnittpunkte der Geraden g mit dem Kegelschnitte.

β. Wenn die Gerade g durch einen der gegebenen Punkte z. B. A geht, so vereinfacht sich die Konstruktion, da man den Punkt P_1 und dessen Polare nicht mehr braucht. Man konstruiert nur wie vorhin den Schnittpunkt G von g und QR, macht wieder $MNGH$ harmonisch, bestimmt den Schnittpunkt J von g und PH und denjenigen Punkt A_1, welcher A von G und J harmonisch trennt.

Eine andere Konstruktion der letzten Aufgabe ergiebt sich aus dem Pascal'schen Lehrsatze. Cf. 158. II.

II. *Ein Kegelschnitt ist durch fünf Punkte gegeben; man soll in einem von ihnen die Tangente ziehen.*

α. Sind $ABCDE$ die fünf gegebenen Punkte und soll man in A die Tangente ziehen, so konstruiere man wie vorhin die Diagonalpunkte PQR des vollständigen Vierecks $ABCD$, die Schnittpunkte M und N von QR mit dem Kegelschnitte und denjenigen Punkt L, welcher die Gerade AP harmonisch von M und N trennt, so ist AL eine Tangente des Kegelschnittes.

β. Eine zweite Konstruktion liefert der Pascal'sche Lehrsatz.

Man bestimme die Schnittpunkte M von AB und DE,

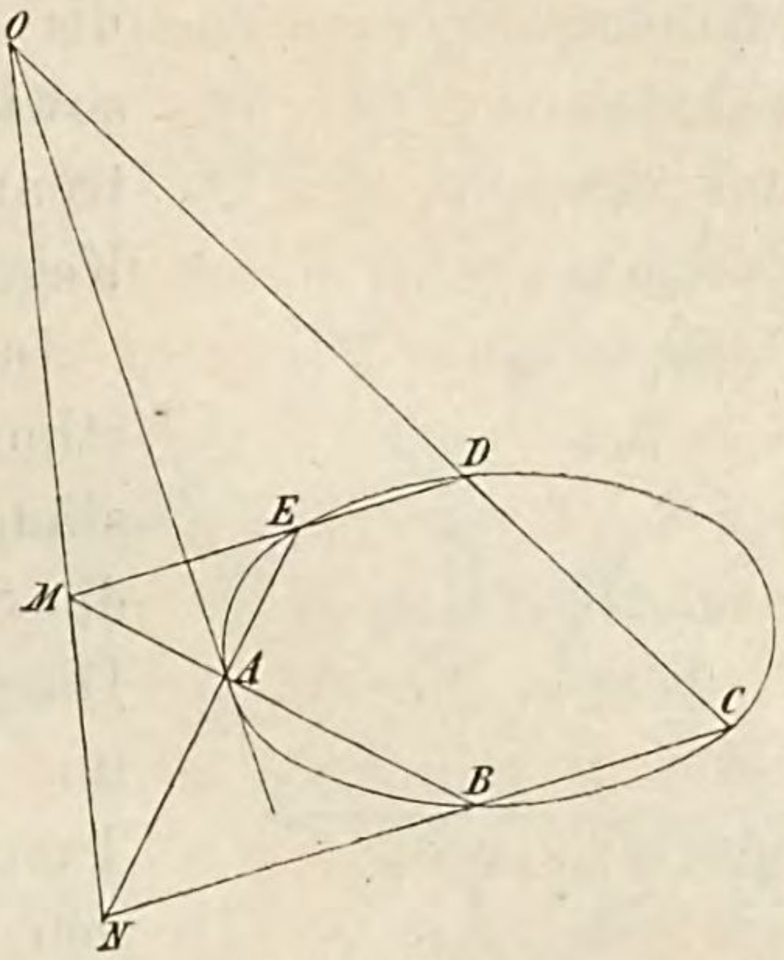


Fig. 143.

N von AE und BC, O von MN und CD, so soll AO Tangente des Kegelschnittes sein. Cf. 105. 157c.

III. *An einen durch fünf Punkte gegebenen Kegelschnitt von einem gegebenen Punkte U die Tangenten zu ziehen.*

Die fünf gegebenen Punkte seien $ABCDE$. Man konstruiere wieder die drei Diagonalpunkte PQR des vollständigen Vierecks $ABCD$ und auf QR die Schnittpunkte M und N mit dem Kegelschnitte, darauf mit Hülfe der Aufgabe 354a. I β. die Schnittpunkte A_1 und B_1 der Geraden UA und UB mit dem Kegelschnitte und endlich die Schnittpunkte V und W der Geraden AB und A_1B_1, AB_1 und A_1B, so ist VW die Polare von U. Auf dieser konstruiere man die Schnittpunkte mit dem Kegelschnitte, so sind dieselben die Berührungspunkte der Tangenten durch U.

IV. *An einen durch fünf Tangenten gegebenen Kegelschnitt von einem gegebenen Punkte U die Tangenten zu ziehen.*

α. Die gegebenen Tangenten seien $abcde$; die Verbindungslinien der Gegeneckenpaare ab und cd, ac und bd, ad und bc bezeichne man mit p, q, r, dann ist der Punkt qr der Pol von p. Im Schnittpunkte pe konstruiere man denjenigen Strahl f, welcher e von p und qr harmonisch trennt, so berührt er den Kegelschnitt. Die Geraden s, t, welche die

Schnittpunkte von ce und df, de und cf verbinden, müssen auch durch den Punkt qr gehen. In diesem sind diejenigen Geraden m und n, welche die Strahlen q und r, sowie s und t harmonisch trennen, Tangenten des Kegelschnittes.

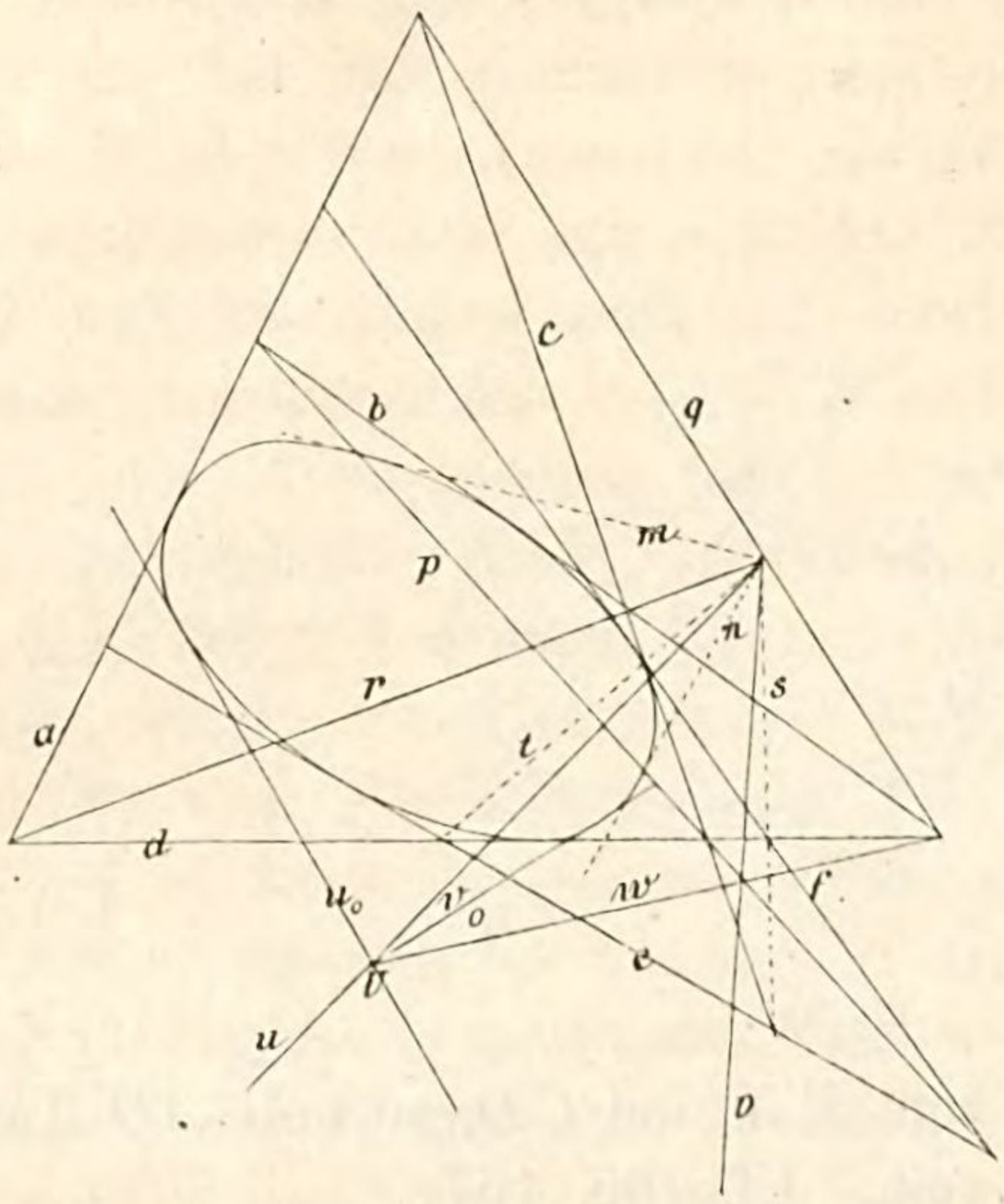


Fig. 144.

In gleicher Weise bestimme man im vollständigen Vierseite $acfd$ die Seiten p_1, q_1, r_1 des Diagonaldreiecks und im Punkte $q_1 r_1$ die Tangenten m_1 und n_1 an den Kegelschnitt.

Man verbinde U mit den Punkten mn und $m_1 n_1$ durch die Geraden u und u_1, mache $mnuv$ und $m_1 n_1 u_1 v_1$ harmonisch, so daſs v und v_1 den Geraden u und u_1 bezüglich zugeordnet sind, so sind die Punkte pv und $p_1 v_1$ die Pole von u und u_1. Die Verbindungslinien dieser Pole mit U und U_1 seien w und w_1, so sind diejenigen Strahlen $u_0 v_0$, welche u und w, sowie u_1 und w_1 harmonisch trennen, die Tangenten durch U an den Kegelschnitt.

β. Wenn der Punkt auf einer der gegebenen Tangenten z. B. a liegt, so vereinfacht sich die Konstruktion, da man das zweite Diagonaldreiseit nicht mehr braucht. Man konstruiert nur, wie vorhin die Verbindungsgerade u von U mit dem Punkte mn, macht wieder $mnuv$ harmonisch, bestimmt die Gerade w, welche U mit dem Pole pv von u verbindet und konstruiert endlich denjenigen Strahl, welcher a von u und w harmonisch trennt.

Eine andere Konstruktion des letzten Teiles der Aufgabe ergiebt sich aus dem Lehrsatze von Brianchon. Cf. 159. II.

V. *Ein Kegelschnitt ist durch fünf Tangenten gegeben; man soll auf einer von ihnen den Berührungspunkt konstruieren.*

α. Sind $abcde$ die fünf gegebenen Tangenten und soll

man auf a den Berührungspunkt konstruieren, so bestimme man zunächst das Diagonaldreiseit pqr des vollständigen Vierseits $abcd$, die Tangenten m und n durch qr an den Kegelschnitt und diejenige Gerade l, welche den Punkt ap von m und n harmonisch trennt, so ist al der Berührungspunkt auf a.

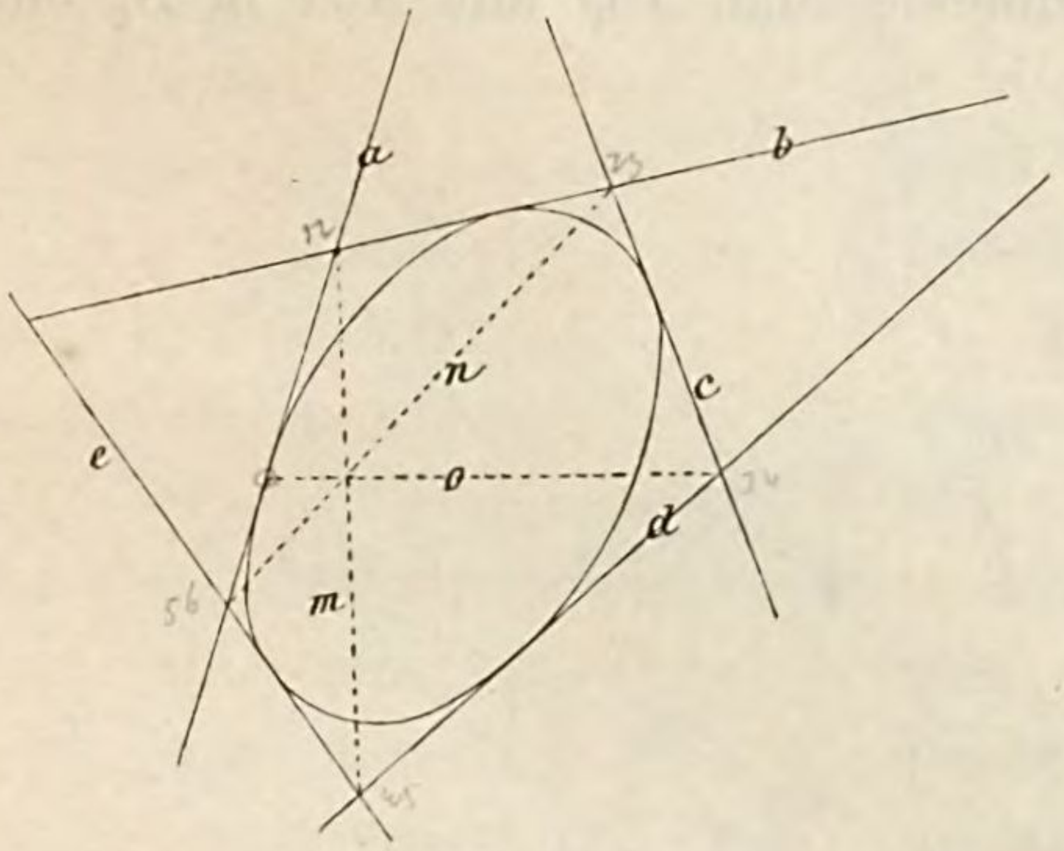


Fig. 145.

β. Der Satz von Brianchon giebt die folgende Konstruktion.

Man bestimme die Verbindungsgeraden m der Punkte ab und de, n der Punkte ae und bc, o der Punkte mn und cd, so soll der Schnittpunkt ao ein Punkt des Kegelschnittes sein.

VI. *Von einem Kegelschnitte kennt man fünf Tangenten $abcde$; man soll seine Schnittpunkte mit einer Geraden g konstruieren.*

α. Man konstruiere das Diagonaldreiseit pqr des vollständigen Vierseits $abcd$ und im Punkte qr die Tangenten m und n an den Kegelschnitt, darauf mit Hilfe von IVβ. die Tangenten a_1 und b_1 von den Punkten ag und bg an den Kegelschnitt, und endlich die Geraden v und w, welche die Punkte ab und a_1b_1, ab_1 und a_1b verbinden, so ist der Punkt vw der Pol von g. Durch diesen konstruiere man die Tangenten an den Kegelschnitt nach IVα. und auf ihnen nach V. die Berührungspunkte, so sind es die Schnittpunkte von g mit dem Kegelschnitte.

β. Wenn man mit Hilfe von V. auf jeder der Tangenten den Berührungspunkt bestimmt, so ist die Aufgabe auf I. zurückgeführt.

VIII. *Ein Kegelschnitt ist durch vier Punkte $ABCD$ und die Tangente a in A gegeben; man soll seine Schnittpunkte mit einer gegebenen Geraden g konstruieren.*

α. Zunächst bestimme man das Diagonaldreieck PQR des vollständigen Vierseits $ABCD$, schneide QR mit AB in S

und mit a in T, so sind diejenigen Punkte, M und N, welche Q und R, sowie S und T harmonisch trennen, Punkte des Kegelschnittes.

In gleicher Weise schneide man PQ mit AD in S_1 und

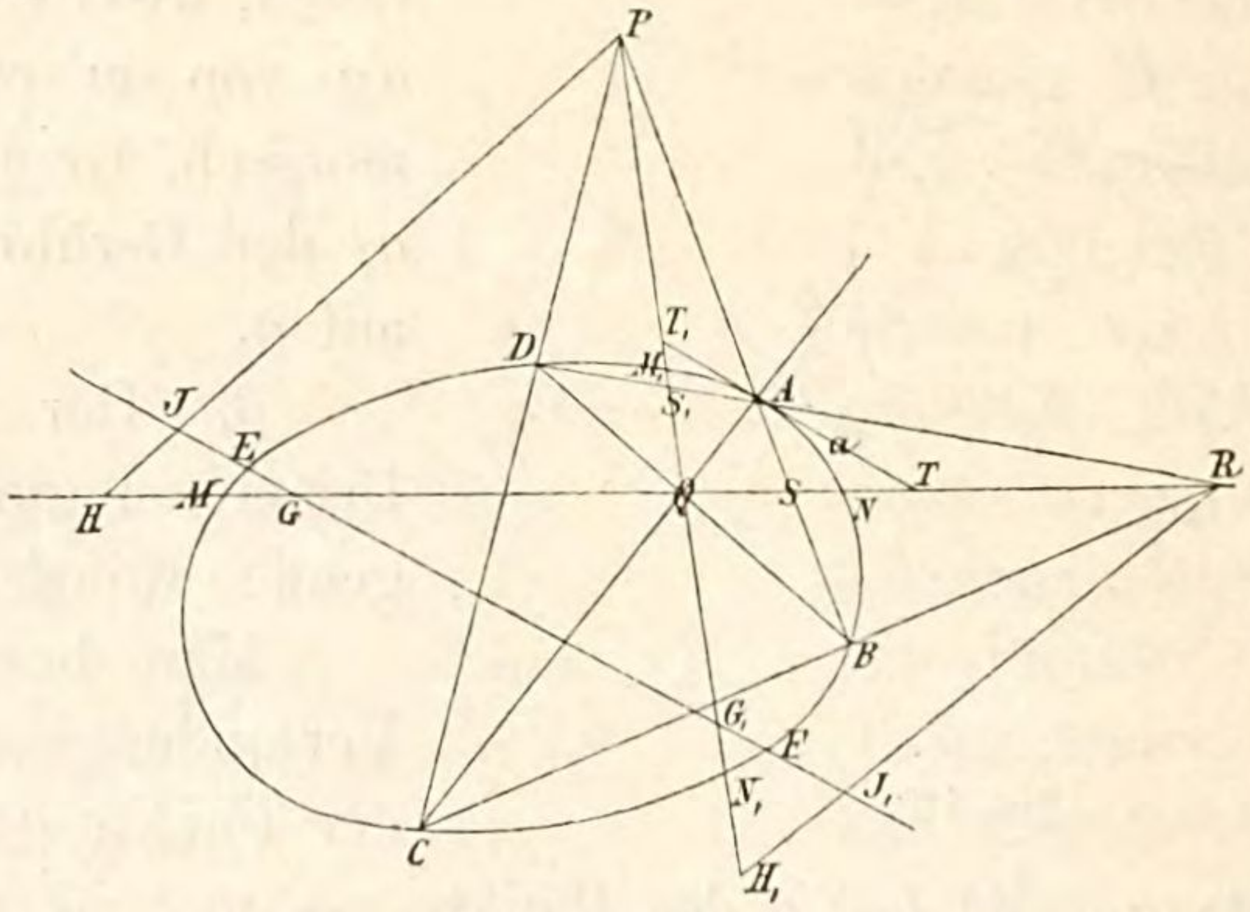


Fig. 146.

mit a in T_1 und konstruiere diejenigen Punkte M_1 und N_1, welche P und Q, sowie S_1 und T_1 harmonisch trennen.

Darauf schneide man MN und M_1N_1 mit g in G und G_1, mache $MNGH$ und $M_1N_1G_1H_1$ harmonisch, schneide g mit HP und H_1R in J und J_1, so sind die Punkte E und F, welche GJ sowie G_1J_1 harmonisch teilen, die Schnittpunkte von g mit dem Kegelschnitte.

β. Die Gerade g gehe durch einen der gegebenen Punkte, etwa durch B.

Man konstruiere wie in α. das Diagonaldreieck PQR und auf QR die Schnittpunkte M und N mit dem Kegelschnitte, schneide QR mit g in G, mache $MNGH$ harmonisch, so ist PH die Polare von G, schneide g mit PH in J und mache $GJBB_1$ harmonisch, so dafs B und B_1 zugeordnet sind, so ist B_1 der zweite Schnittpunkt von g mit den Kegelschnitte.

Eine andere Konstruktion folgt auch hier aus dem Pascalschen Satze.

Man schneide AD mit g in U, a mit PU in V und g mit CV in B_1, so ist B_1 der zweite Schnittpunkt von g mit dem Kegelschnitte.

VIII. *Ein Kegelschnitt ist durch vier Punkte $ABCD$ und*

die Tangente a in A gegeben; man soll die Tangenten in den übrigen Punkten konstruieren.

Man konstruiere wieder das Diagonaldreieck PQR von $ABCD$ und schneide QR mit a in E, so ist BE die Tangente in B. — Denn die Polare von E ist PA.

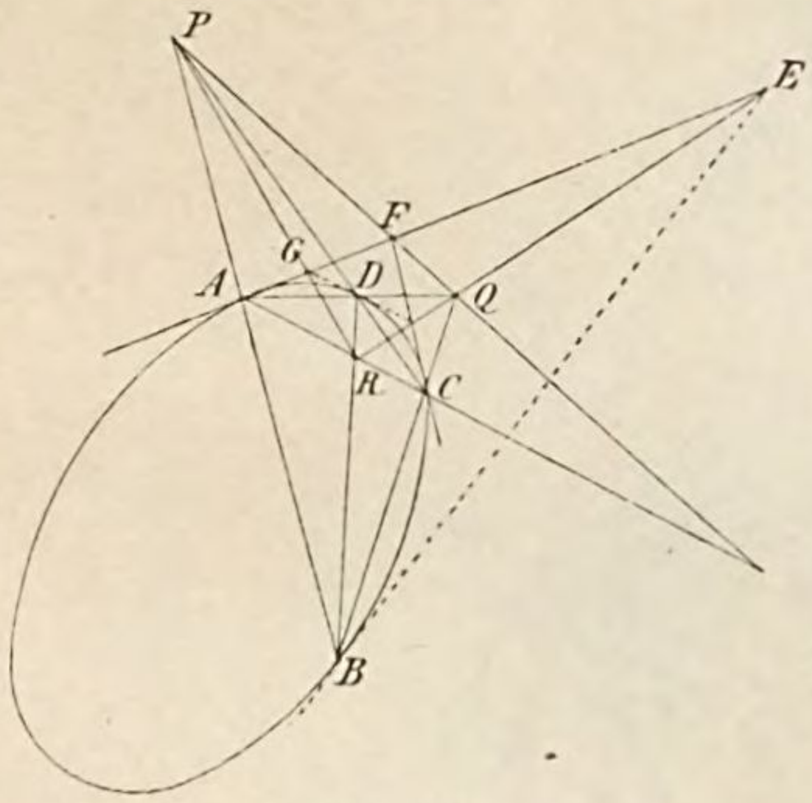


Fig. 147.

Um die Tangente in C zu konstruieren, schneide man PQ mit a in F und ziehe CF.

Die Tangente in D erhält man, wenn man den Schnittpunkt G von a und PR mit D verbindet.

IX. *Ein Kegelschnitt ist durch vier Tangenten $abcd$ und den Berührungspunkt A auf a bestimmt; man soll an ihn von einem beliebigen Punkte G die Tangenten ziehen.*

α. Von dem vollständigen Vierseit $abcd$ konstruiere man das Diagonaldreiseit pqr, verbinde qr mit ab durch s und mit A durch t, so sind diejenigen Geraden m und n, welche q und r, sowie s und t harmonisch trennen, Tangenten des Kegelschnittes. Fig. 148.

In gleicher Weise verbinde man den Punkt pq mit ad durch s_1 und mit A durch t_1 und konstruiere diejenigen Strahlen m_1 und n_1, welche p und q, sowie s_1 und t_1 harmonisch trennen, so sind auch m_1 und n_1 Tangenten des Kegelschnittes.

Darauf verbinde man die Punkte mn und m_1n_1 mit G durch die Geraden g und g_1, mache $mngh$ und $m_1n_1g_1h_1$ harmonisch, so dafs gh und g_1h_1 zugeordnet sind, verbinde G mit den Punkten hp und h_1r durch die Geraden i und i_1, so sind die Strahlen e und f, welche g und i, sowie g_1 und i_1 harmonisch trennen, die Tangenten von G an den Kegelschnitt.

β. Der Punkt G liege auf der Tangente a.

Nachdem man wieder das Diagonaldreiseit pqr des vollständigen Vierseits $abcd$ konstruiert hat, lege man durch die Ecke qr die beiden Tangenten m und n an den Kegelschnitt

ziehe durch qr die Gerade g nach G, mache $mngh$ harmonisch, so dafs g und h zugeordnete Strahlen sind, verbinde G

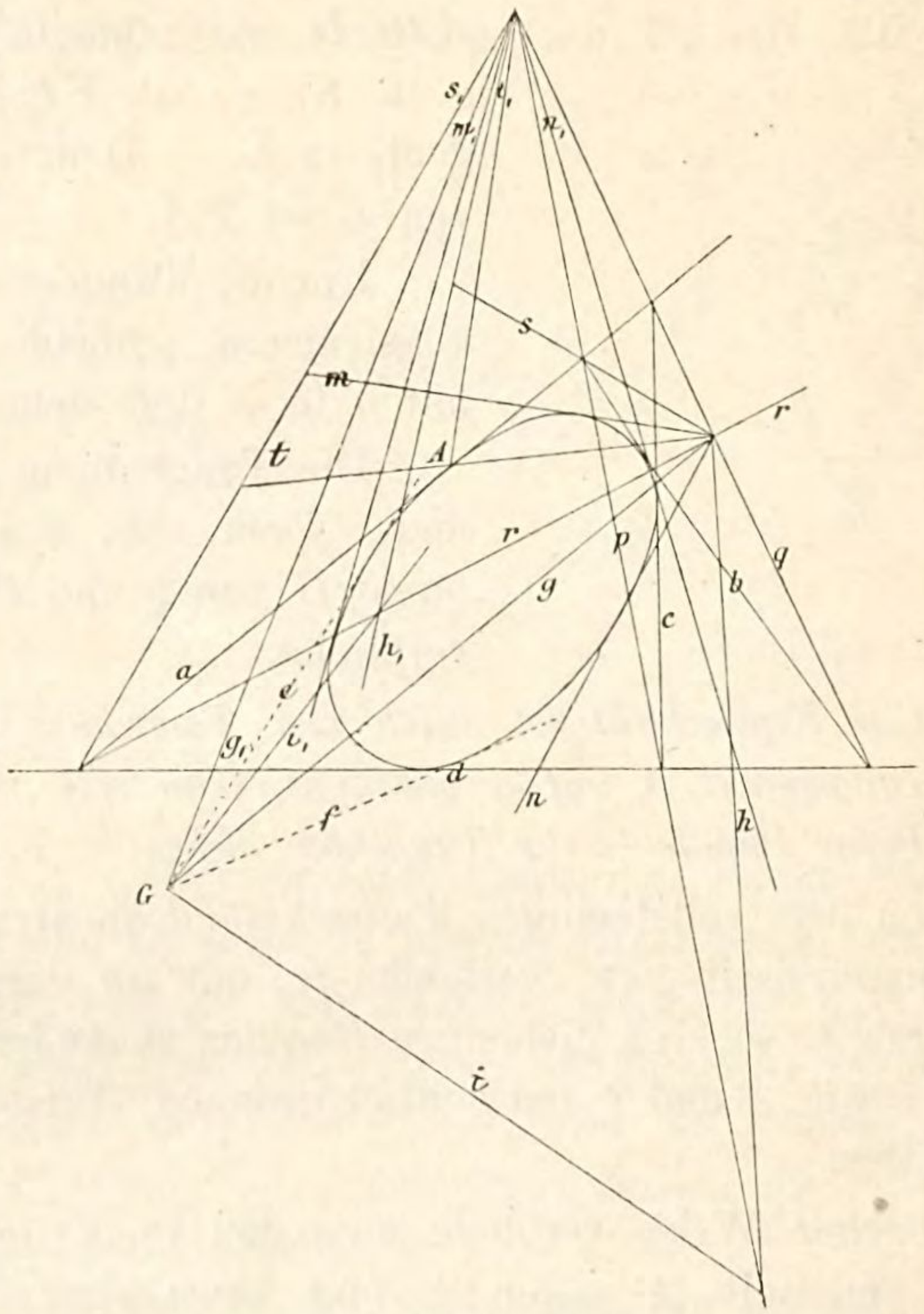


Fig. 148.

mit dem Schnittpunkte hp durch die Gerade i, so ist derjenige Strahl, welcher g und i harmonisch von a trennt, die zweite Tangente von G an den Kegelschnitt.

X. *Ein Kegelschnitt ist durch vier Tangenten abcd und den Berührungspunkt A auf a gegeben; man soll die Berührungspunkte auf den übrigen Tangenten konstruieren.*

Man bestimme zunächst das Poldreiseit pqr von $abcd$, verbinde die Ecke qr mit A durch die Gerade e, so ist der Schnittpunkt be der Berührungspunkt auf b; denn der Punkt ap ist der Pol von e.

In gleicher Art findet man den Berührungspunkt auf c,

indem man den Punkt pq mit A durch die Gerade f verbindet und c mit f schneidet.

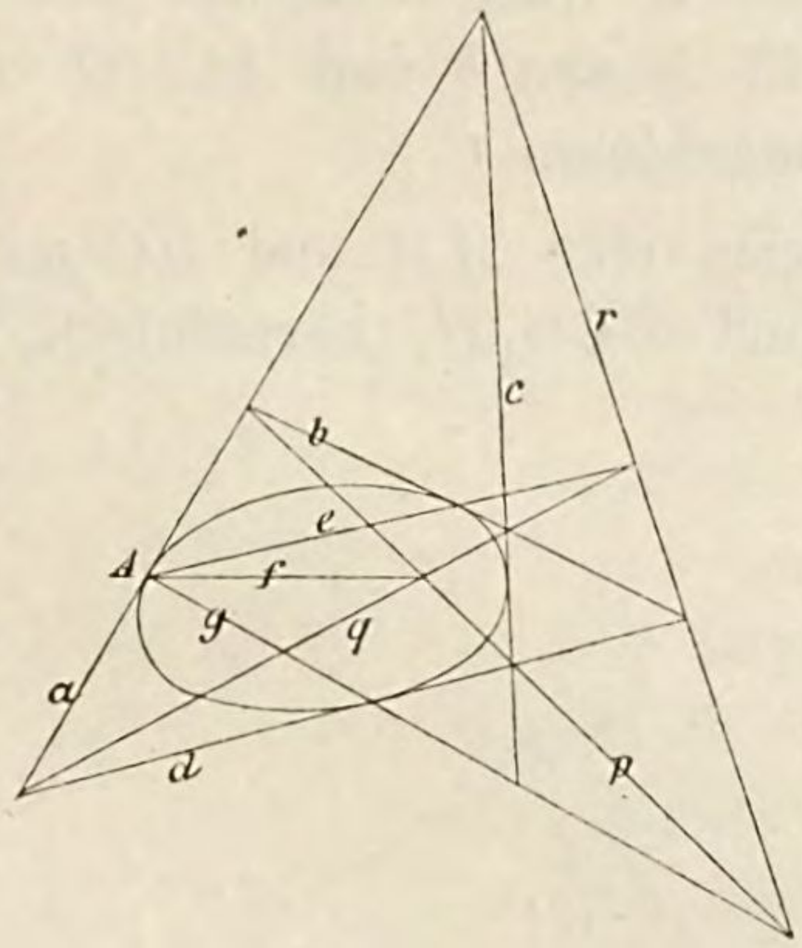


Fig. 149.

Den Berührungspunkt auf d endlich erhält man, indem man die Ecke pr mit A durch die Gerade g verbindet und g mit d zum Durchschnitte bringt.

XI. *Von einem Kegelschnitte kennt man vier Punkte $ABCD$ und die Tangente a durch A; man soll von einem Punkte G an den Kegelschnitt die Tangenten ziehen.*

Dazu konstruiere man nach VIII. die Tangenten bcd in den Punkten BCD und verfahre nach IX.

XII. *Von einem Kegelschnitte kennt man vier Tangenten $abcd$ und den Berührungspunkt A auf a; man soll seine Schnittpunkte mit einer Geraden bestimmen.*

Zu dem Zwecke konstruiere man nach X. die Berührungspunkte BCD auf bcd und verfahre nach VII.

XIII. *Von einem Kegelschnitte kennt man drei Punkte ABC und die Tangenten a und b in A und B; man soll seine Schnittpunkte mit einer Geraden g konstruieren.*

α. Wenn man den Punkt C mit dem Schnittpunkte ab durch die Gerade c verbindet, so ist derjenige Punkt D dieser Geraden, welcher C von dem Punkte ab und der Geraden AB harmonisch trennt, ein Punkt des Kegelschnittes. Damit wäre die Aufgabe auf VIII. zurückgeführt.

β. Die Konstruktion gestaltet sich aber etwas einfacher, wenn man zuerst in C die Tangente c mit Hilfe des Satzes von Pascal konstruiert. Dazu bestimme man die Schnittpunkte M von a und BC, N von b und AC, O von MN und AB, so ist OC die Tangente in C.

Darauf schneide man AB und BC mit g in G und G_1, mache $ABGH$ und BCG_1H_1 harmonisch, so dafs GH und

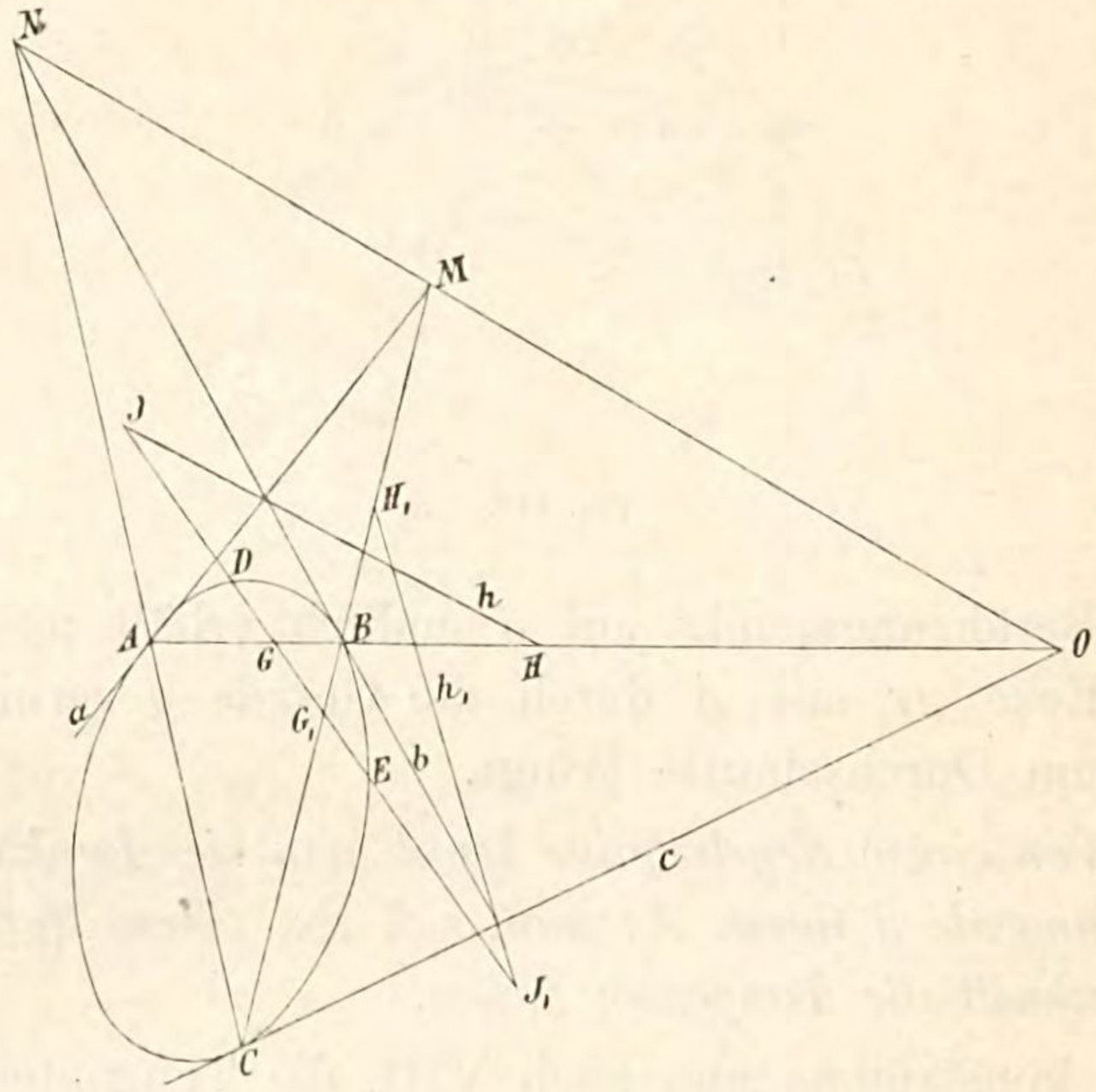


Fig. 150.

G_1H_1 zugeordnete Punkte sind, verbinde H mit dem Schnittpunkte ab durch h und H_1 mit dem Punkte bc durch h_1, schneide g mit h und h_1 in J und J_1 und konstruiere die beiden Punkte D und E, welche die Strecken GJ und G_1J_1 harmonisch teilen, so sind es die Schnittpunkte von g mit dem Kegelschnitte.

XIV. *Von einem Kegelschnitte kennt man drei Tangenten abc und die Berührungspunkte A und B auf a und b; man soll an ihn die Tangenten von einem Punkte C legen.*

α. Wenn man die Tangente c mit der Geraden AB in E schneidet, so ist diejenige Gerade d durch E, welche die Tangente c von der Geraden AB und derjenigen Geraden, welche E mit dem Schnittpunkte ab verbindet, eine Tangente

des Kegelschnittes. Dadurch ist die Aufgabe auf IX. zurückgeführt.

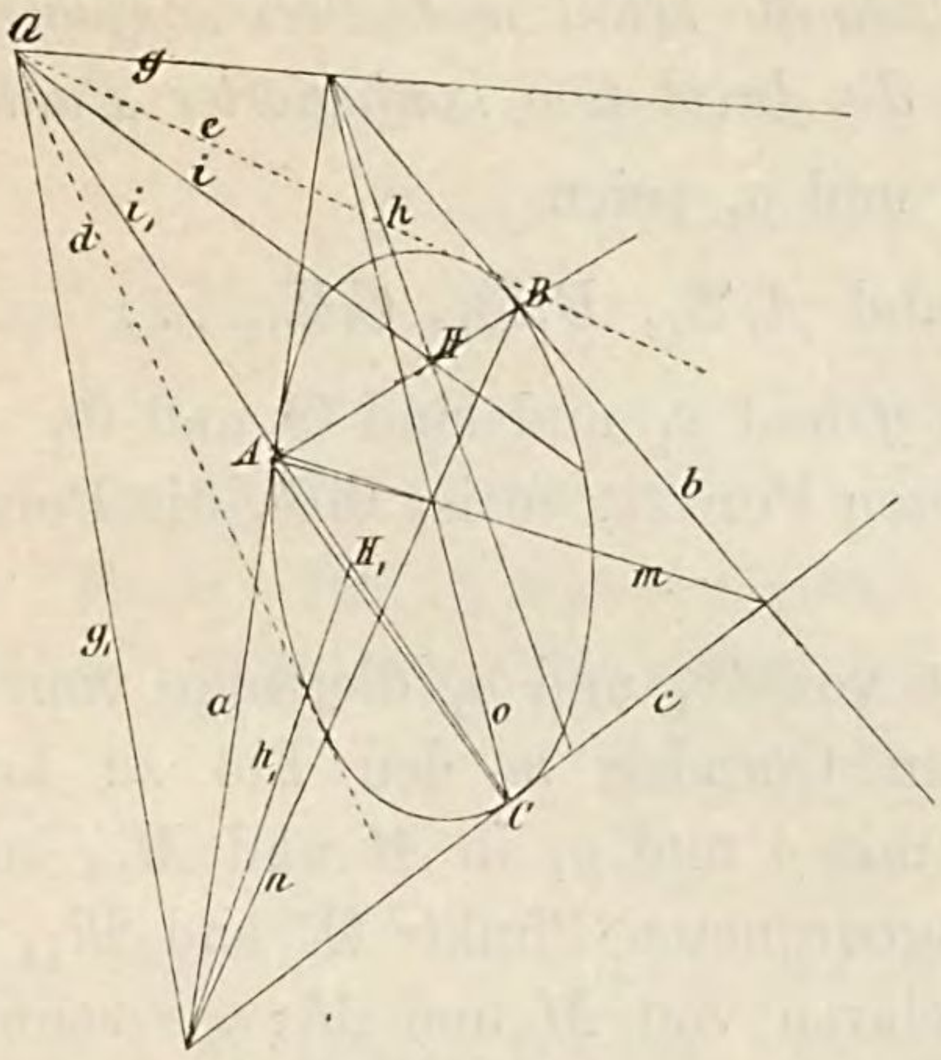


Fig 151.

β. Man gelangt schneller zum Ziele, wenn man zunächst mit Hilfe des Satzes von Brianchon den Berührungspunkt C von c konstruiert. Dies geschieht, indem man A mit dem Punkte bc durch die Gerade m, B mit ac durch n und endlich den Punkt mn mit ab durch die Gerade o verbindet; diese trifft c im Berührungspunkte.

Darauf verbinde man G mit den Punkten ab und ac durch die Geraden g und g_1 mache $abgh$ und acg_1h_1 harmonisch, so dafs gh und g_1h_1 zugeordnete Strahlen sind, schneide AB mit h in H und AC mit h_1 in H_1, verbinde G mit H und H_1 durch die Geraden i und i_1, so sind diejenigen Strahlen d und e, welche g und i, sowie g_1 und i_1 harmonisch trennen, die Tangenten von G an den Kegelschnitt.

Denn zunächst sind H und H_1 die Pole von g und g_1, also g und i sowol wie g_1 und i_1 konjugierte Strahlen; daher sind die Strahlen, welche beide Strahlenpaare harmonisch trennen, Tangenten des Kegelschnittes.

XV. *Wenn von einem Kegelschnitte drei Punkte ABC und die Tangenten a und b durch A und B gegeben sind, so soll man an ihn die Tangenten durch einen beliebigen Punkt legen.*

Man konstruiere die Tangente c in C und führt die Aufgabe auf XIV. zurück.

XVI. *Wenn von einem Kegelschnitte drei Tangenten abc und die Berührungspunkte A und B auf a und b gegeben sind, so soll man seine Schnittpunkte mit einer Geraden bestimmen.*

Man konstruiere den Berührungspunkt C auf c und hat die Aufgabe auf XIII. zurückgeführt.

XVII. *Von einem Kegelschnitte kennt man zwei konjugierte Strahlen gg_1 und auf jedem die Involution konjugierter Punkte.*

Die Involutionen auf g und g_1 seien

$$A\mathfrak{A},\ B\mathfrak{B},\ C\mathfrak{C},\ \ldots \text{ und } A_1\mathfrak{A}_1,\ B_1\mathfrak{B}_1,\ C_1\mathfrak{C}_1,\ \ldots$$

Ist G der Schnittpunkt von g und g_1 und sind $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}_1$ die ihm involutorisch zugeordneten Punkte, so ist $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1$ die Polare von G.

Ferner ist g die Polare von $\mathfrak{G}_1$ und g_1 diejenige von $\mathfrak{G}$.

Um zu einer beliebigen Geraden m den Pol zu konstruieren, schneide man sie mit g und g_1 in M und M_1, konstruiere die involutorisch zugeordneten Punkte $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}_1$, so sind $\mathfrak{M}\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{M}_1\mathfrak{G}$ die Polaren von M und M_1; sie schneiden sich im Pole M_o von m.

Einer der drei Punkte $G\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1$ liegt innerhalb des Kegelschnittes; es sei der Punkt G, dann muſs die Gerade M_oG den Kegelschnitt schneiden. Man erhält die Schnittpunkte, wenn man M_oG mit $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1$ in $\mathfrak{G}_o$ und mit m in $\mathfrak{M}_o$ schneidet und diejenigen Punkte konstruiert, welche $G\mathfrak{G}_o$ und $M_o\mathfrak{M}_o$ harmonisch teilen.

XVIII. *Von einem Kegelschnitte kennt man ein Poldreieck und auf einer Geraden die Involution konjugierter Punkte.*

Das Poldreieck sei PP_1P_2, die Involution konjugierter Punkte auf g sei $A\mathfrak{A},\ B\mathfrak{B},\ C\mathfrak{C},\ \ldots$. die Seiten

$$PP_1,\ P_1P_2,\ P_2P$$

schneiden g in $Q_2,\ Q,\ Q_1$. Zu diesen Punkten seien involutorisch zugeordnet $\mathfrak{Q}_2,\ \mathfrak{Q},\ \mathfrak{Q}_1$.

Dann müssen die Polaren von $\mathfrak{Q}_2\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_1$ bezüglich durch Q_2QQ_1 aber auch durch P_2PP_1 gehen, also sind

$$P_2Q_2,\ PQ,\ P_1Q_1 \text{ die Polaren von}$$
$$\mathfrak{Q}_2,\ \mathfrak{Q},\ \mathfrak{Q}_1.$$

Liegt die Ecke P des Poldreiecks innerhalb des Kegelschnittes, so ziehe man $P\mathfrak{Q}_2$, $P\mathfrak{Q}$, $P\mathfrak{Q}_1$ und erhält auf diesen

Geraden die Schnittpunkte mit dem Kegelschnitte als diejenigen Punkte, welche

P und P_1P_2 sowie $\mathfrak{Q}_2$ und P_2Q_2
P und P_1P_2 sowie $\mathfrak{Q}$ und PQ
P und P_1P_2 sowie $\mathfrak{Q}_1$ und P_1Q_1

harmonisch trennen.

XIX. *Von einem Kegelschnitte kennt man ein Poldreieck und ein Paar Pol und Polare.*

Es sei PP_1P_2 das Poldreieck, A und a das Paar Pol und Polare. Man schneide a mit den Seiten

$$PP_1,\ P_1P_2,\ P_2P$$

in $Q_2,\quad Q,\quad Q_1$

dann sind $AP_2,\ AP,\ AP_1$

die Polaren dieser Punkte. Es liege P innerhalb des Kegelschnittes, dann müssen die Geraden PQ_1 und PQ_2 den Kegelschnitt treffen. Um auf der ersteren die Schnittpunkte mit dem Kegelschnitte zu finden, bestimme man ihre Schnittpunkte $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ mit AP_1 und AP_2 und konstruiere die Punkte

R_1 und R_1', welche PP_2 und $\mathfrak{P}_1Q_1$
R_2 und R_2', welche PP_1 und $\mathfrak{P}_2Q_2$

harmonisch teilen.

XX. *Von einem Kegelschnitte kennt man ein Poldreieck und zwei Punkte.* XVIII.

XXI. *Von einem Kegelschnitte kennt man ein Paar Pol und Polare, A und a, auf ihnen die Involutionen konjugierter Strahlen und Punkte und ein Paar konjugierter Punkte X und X_1.*

Die Gerade XX_1 schneide a *in* Y; zu Y sei Y' auf a der involutorisch zugeordnete Punkt, dann ist AY' die Polare von Y, diese schneidet XX_1 in dem zu Y konjugierten Punkt Y_1.

Die drei Punkte AYY' bilden ein Poldreieck und da man aufser diesem noch die Involution konjugierter Punkte XX_1, YY_1, ... kennt, so ist die Aufgabe auf XVIII. zurückgeführt.

XXII. *Von einem Kegelschnitte kennt man ein Paar konjugierter Punkte XX_1 und zwei Paar Pol und Polare.*

A und a, sowie A_1 und a_1 seien die beiden Paare Pol und Polare; die Polaren a und a_1 schneiden sich in A_2 und die Verbindungslinie von A und A_1 ist a_2, dann sind auch A_2 und a_2 Pol und Polare. In A_2 sind A_2A und a sowie A_2A_1 und a_1 je zwei konjugierte Strahlen, auf a_2 sind ihre Schnittpunkte je zwei konjugierte Punkte, also ist die Aufgabe auf XXI. zurückgeführt.

Dritter Abschnitt.

Kegelschnittbüschel und Kegelschnittschar.

§ 22.

Das Kegelschnittbüschel mit vier reellen Grundpunkten.

355. *Durch vier Punkte $ABCD$ lassen sich einfach unendlich viele Kegelschnitte legen, d. h. so viele als es Punkte auf einer Geraden giebt. — Die Gesamtheit aller Kegelschnitte durch vier Punkte heifst ein „Kegelschnittbüschel“, mit den „Grundpunkten“ $ABCD$. — Durch einen beliebigen Punkt geht ein einziger Kegelschnitt des Büschels.*

Nach 182. ist durch fünf Punkte ein einziger Kegelschnitt stets bestimmt, also lassen sich durch vier Punkte $ABCD$ unendlich viele Kegelschnitte legen. Legt man durch einen der Grundpunkte z. B. A eine Gerade, so wird jeder Punkt derselben von einem Kegelschnitte des Büschels getroffen. Also hat dasselbe soviel Kegelschnitte, als die Gerade Punkte.

Man bezeichnet ein Büschel mit $K(ABCD)$.

356. *Die Kegelschnitte eines Büschels durch vier Punkte $ABCD$ schneiden jede Gerade g in einer Involution, zu welcher auch die Paare von Schnittpunkten mit den Gegenseitenpaaren des Vierecks $ABCD$ gehören. Diese sind daher als degenerierte Kegelschnitte des Büschels anzusehen.*

Ist K irgend ein Kegelschnitt des Büschels, so stelle man eine harmonische Verwandtschaft her, in welcher demselben ein Kreis verwandt ist (176). Dem Vierecke $ABCD$ ist ein Viereck $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ und der Geraden g eine Gerade $\mathfrak{g}$ verwandt. Letztere wird von dem Kreise $\mathfrak{K}$ und den Gegenseitenpaaren des Vierecks $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ in einer Involution geschnitten (98), also

muss g durch K und die Gegenseitenpaare von $ABCD$ auch in einer Involution geschnitten werden (79f.). Da letztere aber durch die Schnittpunkte mit den Gegenseitenpaaren bestimmt ist, so folgt sofort, dafs die Schnittpunkte von g mit einem beliebigen Kegelschnitte ihr angehören.

357. *Unter allen Kegelschnitten eines Büschels giebt es höchstens zwei, welche eine Gerade g berühren.*

Die Involution, in welcher g von den Kegelschnitten getroffen wird, hat zwei Doppelpunkte. Durch diese gehen zwei Kegelschnitte des Büschels und diese müssen g berühren.

358. *Die Polaren eines Punktes P in Bezug auf alle Kegelschnitte eines Büschels schneiden sich in einem Punkte Q;* P und Q heifsen *konjugierte Punkte* bezüglich des Büschels.

Die Polaren von P in Bezug auf zwei Kegelschnitte des Büschels mögen sich in einem Punkte Q schneiden; die Gerade PQ wird von allen Kegelschnitten des Büschels in einer Involution getroffen, deren Doppelpunkte P und Q sind. Diese Punkte werden also durch jeden Kegelschnitt und durch die Gegenseitenpaare des Vierecks der Grundpunkte harmonisch getrennt (36g), also treffen sich sämtliche Polaren von P in Q.

359. *Die Schnittpunkte der Gegenseitenpaare des Vierecks der Grundpunkte bilden ein Poldreieck für alle Kegelschnitte.* 128. 358.

360. *Die Pole einer Geraden g bezüglich der Kegelschnitte eines Büschels liegen auf einem Kegelschnitte, dem „Polarkegelschnitte“ der Geraden. Dieser geht durch die Ecken des gemeinschaftlichen Poldreiecks und enthält die konjugierten Punkte aller Punkte der Geraden.*

Auf g seien $HJKL$ vier harmonische Punkte; die Polaren derselben in Bezug auf einen beliebigen Kegelschnitt K des Büschels sind vier harmonische Strahlen, die sich im Pole P von g bezüglich K treffen. Die Polaren eines jeden dieser Punkte bezüglich aller Kegelschnitte des Büschels schneiden sich im konjugierten Punkte. Sind $H'J'K'L'$ die konjugierten Punkte zu $HJKL$, so gehen die Polaren von $HJKL$ in Bezug auf einen beliebigen Kegelschnitt des Büschels durch $H'J'K'L'$. Der Ort des Scheitels eines harmonischen Strahlenbüschels,

dessen Strahlen durch vier feste Punkte gehen, ist aber ein Kegelschnitt (188); mithin liegen die Pole von g bezüglich aller Kegelschnitte des Büschels auf einem Kegelschnitte $\mathfrak{K}$.

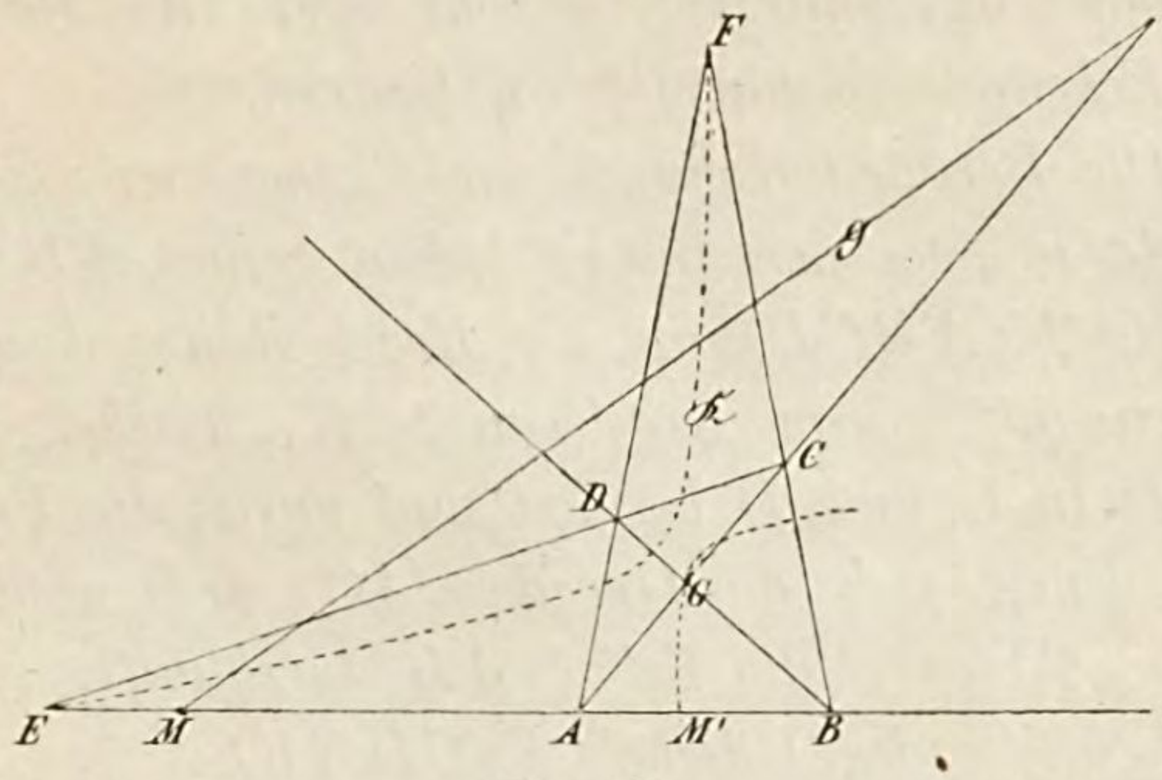


Fig. 152.

Sind $ABCD$ die Grundpunkte, EFG die Ecken des Poldreiecks, so geht durch den Punkt E kein wirklicher Kegelschnitt des Büschels. Man hat das durch E gehende Gegenseitenpaar als einen Kegelschnitt desselben anzusehen.

Es giebt also in einem Büschel mit vier reellen Grundpunkten drei in Geradenpaare degenerierte Kegelschnitte, deren Scheitel die Ecken des gemeinschaftlichen Poldreiecks EFG sind.

Diese Ecken sind also bezüglich der durch sie gehenden Geradenpaare die Pole von g; also geht der Polarkegelschnitt $\mathfrak{K}$ von g bezüglich des Büschels durch die Ecken des gemeinschaftlichen Poldreiecks.

Dieses folgt auch daraus, dafs jede Seite dieses Poldreiecks die gemeinschaftliche Polare ihrer Gegenecke bezüglich aller Kegelschnitte des Büschels ist. Denn schneidet g die Seite FG in E_1, so müssen die Polaren von E_1 bezüglich der Kegelschnitte des Büschels sich in E schneiden; es sind also E und E_1 konjugierte Punkte in Bezug auf das Büschel und da der Polarkegelschnitt $\mathfrak{K}$ von g der Ort der den Punkten von g bezüglich des Büschels konjugierten Punkte ist, so mufs E auf $\mathfrak{K}$ liegen. In gleicher Weise ergiebt sich, dafs auch F und G Punkte von $\mathfrak{K}$ sind.

Die Gerade g schneide die Gerade EA, d. i. den einen Teil des Geradenpaares in E, welches zu den Kegelschnitten des Büschels gehört, in M; es müssen sich die Polaren von

M bezüglich der beiden anderen Geradenpaare und daher bezüglich aller Kegelschnitte des Büschels in M' auf EA schneiden, so dafs $MM'AB$ harmonische Punkte sind. Somit folgt:

Der Polarkegelschnitt von g geht durch die Punkte, welche g von den Eckenpaaren harmonisch trennen.

361. *Die Berührungspunkte der Tangenten, welche sich aus einem Punkte P einer gemeinschaftlichen Sehne AB eines Kegelschnittbüschels K(ABCD) an die Kegelschnitte desselben ziehen lassen, liegen auf einem Kegelschnitte* $\mathfrak{K}$, *welcher die Geraden PC und PD in C und D berührt und durch die Punkte E und F geht, in denen sich die Geraden AC, BD und AD, BC schneiden. — Wenn P die Sehne AB durchläuft, so durchläuft* $\mathfrak{K}$ *die Kegelschnitte des Büschels* $\mathfrak{K}(CDEF)$.

Es sei $K(ABCD)$ ein Kegelschnittbüschel mit vier reellen Grundpunkten; die drei Geradenpaare desselben schneiden sich in E, F, G. Die Punkte $CDEF$ und $ABEF$ bilden die Grundpunkte zweier Kegelschnittbüschel $\mathfrak{K}(CDEF)$ und $\mathfrak{K}'(ABEF)$. Von einem Punkte P auf AB zieht man die Tangenten PT und PT_1 an einen Kegelschnitt K, so sind $C(ABTT_1)$ und $D(BATT_1)$ je vier harmonische Strahlen. Die Strahlen CA und DB, CB und DA schneiden sich in E und F; also liegen $CDEFTT_1$ auf einem Kegelschnitte $\mathfrak{K}$, dem geometrischen Orte des Scheitels eines harmonischen Büschels, dessen Strahlen durch $EFTT_1$ gehen (188). Da $C(EFTT_1)$ vier harmonische Sehnen des Kegelschnittes $\mathfrak{K}$ und CE, CF zugeordnet sind, so mufs der Pol von EF bezüglich $\mathfrak{K}$ auf TT_1 liegen; dieser Pol liegt aber auch auf AB, denn AB ist die Polare des Schnittpunktes H von CD und EF, folglich ist der Schnittpunkt P_1 von AB und TT_1 der Pol von EF bezüglich $\mathfrak{K}$ und daher sind P_1E und P_1F Tangenten an $\mathfrak{K}$. Weil TT_1 die Polare von P bezüglich K ist, so sind PP_1AB harmonisch, also PP_1 konjugierte Punkte für K. Deshalb müssen PC und PD Tangenten an $\mathfrak{K}$ sein (138). Wählt man irgend einen anderen Kegelschnitt aus dem Büschel $K(ABCD)$ und zieht an ihn von P die Tangenten, so liegen die Berührungspunkte auf einem Kegelschnitte, welcher durch E uud F geht und PC und PD in C und D berührt, also mit $\mathfrak{K}$ zusammenfällt. Deshalb liegen sämtliche Berührungspunkte der von P an die

Kegelschnitte des Büschels $K(ABCD)$ gezogenen Tangenten auf dem Kegelschnitte $\mathfrak{K}$. Wenn P die Sehne AB durchläuft, so durchläuft $\mathfrak{K}$ die Kegelschnitte eines Büschels mit den Grundpunkten $CDEF$. Die beiden Büschel $K(ABCD)$ und $\mathfrak{K}(CDEF)$ nennt man *konjugierte Kegelschnittbüschel.*

362. Der Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ steht zu den Kegelschnitten des Büschels $K(ABCD)$ in der Beziehung, dafs jede durch P gezogene Gerade g von $\mathfrak{K}$ und einem Kegelschnitte K in solchen vier harmonischen Punkten geschnitten wird, dafs die Schnittpunkte $\mathfrak{S}\mathfrak{S}_1$ mit $\mathfrak{K}$ sowohl wie SS_1 mit K zugeordnete Punkte sind. Denn die Gerade g wird in ihren Schnittpunkten mit $\mathfrak{K}$ von zwei Kegelschnitten des Büschels $K(ABCD)$ berührt und diese Punkte sind daher die Doppelpunkte derjenigen Involution, in welcher g von den Kegelschnitten des Büschels getroffen wird. Da $EFTT_1$ vier harmonische Punkte von $\mathfrak{K}$ sind, so mufs der Pol $\mathfrak{P}$ von TT_1 bezüglich $\mathfrak{K}$ auf EF liegen. Zieht man aber von $\mathfrak{P}$ auf EF die Tangenten an die Kegelschnitte des Büschels $\mathfrak{K}(CDEF)$, so liegen die Berührungspunkte auf einem Kegelschnitte K des Büschels $K(ABCD)$ und somit wird auch jede durch $\mathfrak{P}$ gezogene Gerade von K und jedem Kegelschnitte des Büschels $\mathfrak{K}(CDEF)$ in vier harmonischen Punkten geschnitten.

Wenn die Gerade g den Kegelschnitt K nicht trifft, so trifft sie doch andere Kegelschnitte des Büschels $K(ABCD)$, welche sämtlich die Punkte $\mathfrak{S}\mathfrak{S}_1$ harmonisch trennen. In Bezug auf diese müssen die Polaren von $\mathfrak{S}$ durch $\mathfrak{S}_1$ gehen; da aber die Polaren eines Punktes in Bezug auf alle Kegelschnitte eines Büschels sich in einem Punkte schneiden, so mufs auch die Polare von $\mathfrak{S}$ in Bezug auf K durch $\mathfrak{S}_1$ gehen und $\mathfrak{S}\mathfrak{S}_1$ sind konjugierte Punkte in Bezug auf K und alle Kegelschnitte des Büschels $K(ABCD)$. Also:

Die Endpunkte jeder durch P in $\mathfrak{K}$ gezogenen Sehne sind konjugierte Punkte in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels $K(ABCD)$; der Pol $\mathfrak{P}$ einer Berührungssehne TT_1 des Punktes P in Bezug auf den Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ liegt auf EF und es sind die Endpunkte jeder durch $\mathfrak{P}$ in K gezogenen Sehne konjugierte Punkte in Bezug auf $\mathfrak{K}$ und alle Kegelschnitte des Büschels $\mathfrak{K}(CDEF)$.

Um das letzte Resultat kurz auszudrücken, soll die Beziehung, in welcher die Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ und K stehen, als *harmonische Beziehung* bezeichnet werden; die Punkte P und $\mathfrak{P}$ sollen *Pole* der harmonischen Beziehung heifsen, sie sind die Pole der gemeinschaftlichen Sekante CD bezüglich beider Kegelschnitte K und $\mathfrak{K}$.

Es stehen also zwei Kegelschnitte in harmonischer Beziehung, wenn jede Gerade, welche durch einen der Pole der Verbindungslinie zweier reellen Schnittpunkte gezogen wird, von den Kegelschnitten in harmonischen und zwar von jedem in zugeordneten Punkten geschnitten wird.

363. Zieht man von P_1 an die Kegelschnitte des Büschels $\mathfrak{K}'(ABEF)$ die Tangenten, so liegen die Berührungspunkte auf einem Kegelschnitte durch $CDEF$, der in E und F die Geraden EP_1 und FP_1 berührt und deshalb mit $\mathfrak{K}$ zusammenfällt.

Wenn man aber von P_1 an die Kegelschnitte $K(ABCD)$ die Tangenten zieht, so liegen die Berührungspunkte auf einem Kegelschnitte $\mathfrak{K}_1$ des Büschels $\mathfrak{K}(CDEF)$; dieser berührt die Geraden P_1C und P_1D in C und D und geht durch die Punkte E und F.

Durch P sei g eine beliebige Gerade; sie wird von den Kegelschnitten des Büschels $K(ABCD)$ in einer Involution geschnitten, deren Doppelpunkte M und N die Schnittpunkte mit $\mathfrak{K}$ sein müssen, da in ihnen g von zwei Kegelschnitten des Büschels $K(ABCD)$ berührt wird.

Trifft g den Kegelschnitt $\mathfrak{K}_1$ in M_1 und N_1, so sind M_1N_1EF harmonisch, da EF die Polare von P bezüglich $\mathfrak{K}_1$ ist, also sind die Büschel $C(M_1N_1EF)$ und $D(M_1N_1FE)$ harmonisch und die Punkte $ABCDM_1N_1$ liegen auf einem Kegelschnitte, denn CE und DF schneiden sich in A, CF und DE in B (188). Da dieser Kegelschnitt dem Büschel $K(ABCD)$ angehört, so sind M_1N_1 durch die Punkte MN harmonisch getrennt. Also:

Sind P und P_1 zwei konjugierte Punkte auf einer gemeinschaftlichen Sekante AB und zieht man von ihnen Tangenten an die Kegelschnitte der Büschel $K(ABCD)$ und $\mathfrak{K}'(ABEF)$, so liegen die Berührungspunkte auf demselben Kegelschnitte $\mathfrak{K}$. Zieht

man aber von P_1 die Tangenten an die Kegelschnitte des Büschels $K(ABCD)$, so liegen die Berührungspunkte auf einem anderen Kegelschnitte $\mathfrak{K}_1$. Die Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$ stehen in der Beziehung zu einander, daſs jede durch P oder P_1 gelegte Gerade von beiden in vier harmonischen Punkten, und zwar von jedem in zugeordneten Punkten geschnitten wird.

364. *Wenn drei Kegelschnitte sich in denselben beiden Punkten A und B schneiden, so treffen sich ihre drei übrigen gemeinschaftlichen Sekanten in einem Punkte. Zieht man von diesem die Tangenten, so liegen die sechs Berührungspunkte auf einem Kegelschnitte, der durch A und B geht.*

Die drei Kegelschnitte $C_1C_2C_3$ schneiden sich in den beiden Punkten A und B; es seien ferner D_3E_3 die Schnittpunkte von C_1C_2, D_2E_2 diejenigen von C_1C_3, D_1E_1 diejenigen von C_2C_3. Von dem Schnittpunkte P der Sekanten D_1E_1 und D_2E_2 ziehe man Tangenten an $C_1C_2C_3$, deren Berührungspunkte B_1B_1', B_2B_2', B_3B_3' sein mögen. Nach 362. liegen $B_2B_2'B_3B_3'$ und $B_1B_1'B_3B_3'$ je auf einem Kegelschnitte, welcher die Geraden PA und PB in A und B berührt; deshalb fallen beide Kegelschnitte in einen π zusammen. Jede Gerade g durch P wird von π in zwei Punkten geschnitten, welche durch jeden der Kegelschnitte $C_1C_2C_3$ harmonisch getrennt werden (362), also auch die Gerade, welche P mit einem der Schnittpunkte D_3E_3 z. B. D_3 von C_1C_2 verbindet. Diese werde von π in Q und R, von C_1 in D_3 und S_1, von C_2 in D_3 und S_2 geschnitten; da nun QRD_3S_1 und QRD_3S_2 harmonisch sind, so müssen S_1 und S_2 mit E_3 zusammenfallen, also liegt P auch auf D_3E_3.

§ 23.

Die Kegelschnittschar mit vier reellen Tangenten.

365. *An vier Gerade lassen sich einfach unendlich viele Berührungskegelschnitte legen, d. h. soviel, als es Strahlen durch einen Punkt giebt. — Die Gesamtheit aller Kegelschnitte mit vier gemeinschaftlichen Tangenten heiſst eine Kegelschnittschar. — Eine beliebige Gerade wird von einem einzigen Kegelschnitte der Schar berührt.*

Nach 183. ist durch fünf Tangenten ein einziger Kegel-

schnitt bestimmt, also lassen sich an vier Tangenten *abcd* unendlich viele Kegelschnitte legen, deren Gesamtheit „*Kegelschnittschar*“ heifst. Zieht man durch einen beliebigen Punkt einer Tangente die Geraden eines Büschels, so wird jede Gerade von einem Kegelschnitte der Schar berührt.

366. *Die Tangenten von einem Punkte P an die Kegelschnitte einer Schar mit vier gemeinschaftlichen Tangenten abcd und die Geraden, welche P mit den Gegeneckenpaaren des vollständigen Vierseits abcd verbinden, bilden eine Involution.*

Ist K irgend ein Kegelschnitt der Schar, so stelle man eine harmonische Verwandtschaft her, in welcher demselben ein Kreis $\mathfrak{K}$ verwandt ist (176). Dem Vierseite *abcd* ist ein anderes $\mathfrak{abcd}$ und dem Punkte P ein anderer $\mathfrak{P}$ verwandt. Die Tangenten von $\mathfrak{P}$ an $\mathfrak{K}$ und die Geraden, welche $\mathfrak{P}$ mit den Gegeneckenpaaren des vollständigen Vierseits *abcd* verbinden, sind nach 98a. Strahlenpaare einer Involution, also sind auch nach den Gesetzen der Verwandtschaft (79f) die Tangenten von P an K und die Geraden, welche P mit den Gegeneckenpaaren des vollständigen Vierseits *abcd* verbinden, in Involution. Diese wird aber schon durch die Verbindungslinien mit den Gegeneckenpaaren bestimmt; ihr gehören also die Tangenten von P an einen beliebigen Kegelschnitt der Schar an.

367. *Durch einen beliebigen Punkt P gehen höchstens zwei Kegelschnitte der Schar.*

Die Tangenteninvolution des Punktes P hat zwei Doppelstrahlen. In jedem fallen zwei Tangenten von P an einen Kegelschnitt der Schar zusammen; dieser geht also durch P.

368. *Die Pole einer Geraden p in Bezug auf die Kegelschnitte einer Schar liegen auf einer Geraden q; p und q heifsen konjugierte Gerade bezüglich der Schar.*

Die Pole von p bezüglich zweier Kegelschnitte der Schar mögen auf der Geraden q liegen; die Tangenten durch den Schnittpunkt pq bilden eine Involution, deren Doppelstrahlen p und q sind. Sie werden also durch jeden Kegelschnitt und die Gegeneckenpaare des Vierseits der gemeinschaftlichen Tangenten harmonisch getrennt, also liegen sämtliche Pole von p auf q.

369. *Die Mittelpunkte aller Kegelschnitte einer Schar liegen auf einer Geraden.*

Denn sie sind die Pole der unendlich fernen Geraden. 368.

370. *Die Verbindungsgeraden der Gegeneckenpaare des Vierseits der gemeinschaftlichen Tangenten bilden ein Poldreiseit für alle Kegelschnitte.* 368.

371. *Die Polaren eines Punktes P bezüglich der Kegelschnitte einer Schar umhüllen einen Kegelschnitt, den „Polarkegelschnitt" des Punktes P. Dieser berührt die Seiten des gemeinschaftlichen Poldreiseits und hat die konjugierten Geraden aller Geraden durch P zu Tangenten.*

Durch P seien $hikl$ vier harmonische Strahlen, die Pole derselben in Bezug auf einen beliebigen Kegelschnitt K des Büschels sind vier harmonische Punkte, welche auf der Polare g von P bezüglich K liegen. Die Pole einer jeden dieser vier Geraden bezüglich aller Kegelschnitte der Schar liegen auf der konjugierten Geraden. Sind $h'i'k'l'$ die vier konjugierten Geraden zu $hikl$ bezüglich der Schar, so liegen die Pole von $hikl$ in Bezug auf einen beliebigen Kegelschnitt der Schar auf $h'i'k'l'$. Alle Geraden aber, welche vier feste Gerade in harmonischen Punkten schneiden, umhüllen einen Kegelschnitt (189); mithin sind alle den Geraden durch P konjugierte Gerade Tangenten eines Kegelschnittes.

Sind $abcd$ die vier gemeinschaftlichen Tangenten, efg die Seiten des Poldreiseits, so berührt die Gerade e kein wirklicher Kegelschnitt der Schar. Man hat das aufliegende Gegeneckenpaar als einen Kegelschnitt anzusehen.

Es giebt also in einer Schar mit vier gemeinschaftlichen Tangenten drei in Punktpaare degenerierte Kegelschnitte, deren Verbindungslinien die Seiten des gemeinschaftlichen Poldreiseits sind.

Diese Seiten sind also bezüglich der auf ihnen liegenden Punktpaare die Polaren von P, also berührt der Polarkegelschnitt von P die Seiten des gemeinschaftlichen Poldreiseits.

Letzteres folgt auch daraus, dafs jede Ecke dieses Poldreiseits der gemeinschaftliche Pol ihrer Gegenseite bezüglich aller Kegelschnitte der Schar ist. Denn ist e_1 die Verbindungsgerade des Punktes fg mit P, so müssen die Pole von e_1 bezüglich der Kegelschnitte der Schar auf e liegen; es sind also

e und e_1 konjugierte Gerade in Bezug auf die Schar und da der Polarkegelschnitt $\mathfrak{K}$ von P der Ort der den Strahlen von P bezüglich der Schar konjugierten Geraden ist, so mufs e eine Tangente von $\mathfrak{K}$ sein. In gleicher Weise ergiebt sich, dafs auch f und g Tangenten dieses Kegelschnittes sind.

372. *Zieht man durch einen Schnittpunkt zweier gemeinschaftlichen Tangenten a und b einer Schar eine Gerade p, so umhüllen die Tangenten in ihren Schnittpunkten mit den Kegelschnitten der Schar einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, welcher die gemeinschaftlichen Tangenten c und d in ihren Schnittpunkten mit p berührt und die Geraden e und f zu Tangenten hat, welche die Schnittpunkte ac, bd und ad, bc verbinden. — Wenn p sich um ab dreht, so durchläuft $\mathfrak{K}$ die Kegelschnitte der Schar $\mathfrak{K}(cdef)$.*

Es sei $K(abcd)$ eine Kegelschnittschar mit vier gemeinschaftlichen Tangenten $abcd$; die drei Punktpaare derselben liegen auf den Seiten efg des gemeinschaftlichen Poldreiecks. Die Geraden $cdef$ und $abef$ konstituieren zwei neue Kegelschnittscharen $\mathfrak{K}(cdef)$ und $\mathfrak{K}'(abef)$. Einen Kegelschnitt K der Schar $K(abcd)$ schneide man mit einer Geraden p, welche durch ab geht, und ziehe in den Schnittpunkten die Tangenten t und t_1, so sind $c(ab\mathrm{tt}_1)$ und $d(ba\mathrm{tt}_1)$ je vier harmonische Punkte. Die Punkte ca und db, cb und da liegen auf e und f, also sind $cdef\mathrm{tt}_1$ Tangenten eines Kegelschnittes $\mathfrak{K}$, welcher der Ort derjenigen Geraden ist, die von $ef\mathrm{tt}_1$ harmonisch geschnitten werden (189). Da $c(ef\mathrm{tt}_1)$ vier harmonische Punkte einer Tangente von $\mathfrak{K}$ und ce, cf einander zugeordnet sind, so mufs die Polare von ef bezüglich $\mathfrak{K}$ durch tt_1 gehen; dieselbe geht aber auch durch ab, denn ab ist der Pol der Geraden h, welche die Punkte cd und ef verbindet, folglich ist die Gerade p_1, welche ab und tt_1 verbindet, die Polare von ef bezüglich $\mathfrak{K}$ und daher sind p_1c und p_1f Punkte von $\mathfrak{K}$. Weil tt_1 der Pol von p bezüglich K ist, so sind pp_1ab harmonisch, also pp_1 konjugierte Strahlen für K. Deshalb müssen pc und pd Punkte von $\mathfrak{K}$ sein (139).

Wählt man irgend einen anderen Kegelschnitt aus der Schar $K(abcd)$ und zieht in seinen Schnittpunkten mit p die Tangenten an ihn, so berühren diese einen Kegelschnitt,

welcher e und f zu Tangenten hat und die Geraden c und d in den Punkten pc und pd berührt, also mit $\mathfrak{K}$ zusammenfällt.

Deshalb berühren die Tangenten in allen Schnittpunkten von p mit den Kegelschnitten der Schar $K(abcd)$ den Kegelschnitt $\mathfrak{K}$.

373. Zieht man von einem beliebigen Punkte G von p Tangenten $\mathfrak{s}\mathfrak{s}_1$ an $\mathfrak{K}$ und ss_1 an einen Kegelschnitt der Schar $K(abcd)$, so sind $\mathfrak{s}\mathfrak{s}_1$ und ss_1 je zwei zugeordnete Strahlen eines harmonischen Büschels. Denn durch den Punkt G gehen diejenigen beiden Kegelschnitte der Schar, welche in ihm die Tangenten $\mathfrak{s}\mathfrak{s}_1$ berühren, also sind diese die Doppelstrahlen der Tangenteninvolution durch G. Da $ef\mathfrak{t}\mathfrak{t}_1$ vier harmonische Tangenten von $\mathfrak{K}$ sind, so mufs die Polare $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{t}\mathfrak{t}_1$ bezüglich $\mathfrak{K}$ durch ef gehen. Schneidet man aber mit $\mathfrak{p}$ die Kegelschnitte der Schar $\mathfrak{K}(cdef)$, so berühren die Tangenten in den Schnittpunkten einen Kegelschnitt der Schar $K(abcd)$ und somit sind auch die Tangenten von einem beliebigen Punkte von $\mathfrak{p}$ an K und irgend einen Kegelschnitt der Schar $\mathfrak{K}(cdef)$ harmonisch.

Wenn G innerhalb des Kegelschnittes K liegt und sich von ihm also keine Tangenten an K ziehen lassen, so lassen sich doch an andere Kegelschnitte der Schar $K(abcd)$ Tangenten ziehen, welche sämtlich durch $\mathfrak{s}\mathfrak{s}_1$ harmonisch getrennt werden. In Bezug auf diese Kegelschnitte müssen die Pole von $\mathfrak{s}$ auf $\mathfrak{s}_1$ liegen; da aber die Pole einer Geraden in Bezug auf alle Kegelschnitte einer Schar auf einer Geraden liegen, so mufs auch der Pol von $\mathfrak{s}$ bezüglich K auf $\mathfrak{s}_1$ liegen und es sind $\mathfrak{s}\mathfrak{s}_1$ konjugierte Gerade in Bezug auf K und alle Kegelschnitte der Schar $K(abcd)$. Also:

Zieht man von irgend einem Punkte G der Geraden p Tangenten $\mathfrak{s}\mathfrak{s}_1$ an $\mathfrak{K}$, so sind dieselben konjugiert in Bezug auf alle Kegelschnitte der Schar $K(abcd)$; die Polare $\mathfrak{p}$ des Schnittpunktes $\mathfrak{t}\mathfrak{t}_1$ zweier Tangenten eines Kegelschnittes K in denjenigen Punkten, in denen K von p getroffen wird, bezüglich $\mathfrak{K}$ geht durch ef und es sind die Tangenten von irgend einem Punkte der Geraden $\mathfrak{p}$ an den Kegelschnitt K konjugierte Strahlen in Bezug auf $\mathfrak{K}$ und alle Kegelschnitte der Schar $\mathfrak{K}(cdef)$.

Die Beziehung zwischen den Kegelschnitten K und $\mathfrak{K}$ heifse harmonische Beziehung; die Geraden p und $\mathfrak{p}$ seien zugeordnete Gerade in derselben; sie sind die Polaren eines Schnittpunktes gemeinschaftlicher Tangenten von K und $\mathfrak{K}$.

Zwei Kegelschnitte K und $\mathfrak{K}$ stehen also in harmonischer Beziehung, wenn die Tangenten an einen von einem Punkte einer Polare eines Schnittpunktes gemeinschaftlicher Tangenten durch die Tangenten an den anderen harmonisch getrennt werden.

374. Schneidet man die Kegelschnitte der Schar $\mathfrak{K}'(abef)$ mit p_1, so umhüllen die Tangenten in den Schnittpunkten einen Kegelschnitt, welcher die Geraden $cdef$ berührt und durch die Punkte cp_1 und fp_1 geht und daher mit $\mathfrak{K}$ zusammenfällt.

Wenn man aber mit p_1 die Kegelschnitte der Schar $K(abcd)$ schneidet und in den Schnittpunkten die Tangenten zieht, so berühren sie einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}_1$ der Schar $\mathfrak{K}(adef)$; dieser berührt c und d in den Punkten cp_1 und dp_1, und berührt e und f.

Auf p sei G ein beliebiger Punkt, dessen Tangenten an die Kegelschnitte der Schar $K(abcd)$ eine Involution bilden. Die Doppelstrahlen m und n der letzteren sind Tangenten von $\mathfrak{K}$, da sie in G von zwei Kegelschnitten der Schar berührt werden.

Sind m_1 und n_1 die Tangenten von G an $\mathfrak{K}_1$, so sind $m_1 n_1 ef$ harmonisch, da ef der Pol von p bezüglich $\mathfrak{K}_1$ ist, also sind die Punktreihen $c(m_1 n_1 ef)$ und $d(m_1 n_1 ef)$ harmonisch und die Geraden $abcdm_1 n_1$ umhüllen einen Kegelschnitt. Denn die Punkte ce und df liegen auf a, cf und de auf b (189.). Da dieser Kegelschnitt der Schar $K(abcd)$ angehört, so sind $m_1 n_1$ durch mn harmonisch getrennt. Also:

Sind p und p_1 zwei konjugierte Strahlen durch einen Schnittpunkt ab zweier gemeinschaftlichen Tangenten der Schar $K(abcd)$ und schneidet man sie mit den Kegelschnitten der Scharen $K(abcd)$ und $\mathfrak{K}'(abef)$, so umhüllen die Tangenten in den Schnittpunkten denselben Kegelschnitt $\mathfrak{K}$. Zieht man aber in den Schnittpunkten von p_1 mit den Kegelschnitten der Schar $K(abcd)$ Tangenten, so umhüllen dieselben einen anderen Kegelschnitt $\mathfrak{K}_1$. Die Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$ stehen in der Beziehung zu einander, dafs die von einem Punkte auf p oder p_1 an $\mathfrak{K}$ gelegten Tangenten durch die an $\mathfrak{K}_1$ gelegten harmonisch getrennt werden.

375. *Wenn drei Kegelschnitte dieselben beiden Tangenten a und b haben und demselben Winkel eingeschrieben sind, so liegen die drei übrigen Schnittpunkte gemeinschaftlicher Tangenten auf einer Geraden. Zieht man in ihren Schnittpunkten mit dem Kegelschnitte Tangenten, so umhüllen sie einen Kegelschnitt, der auch a und b berührt.*

Die drei Kegelschnitte $C_1C_2C_3$ berühren in demselben Winkel die Geraden a und b; es seien d_3e_3, d_2e_2, d_1e_1 die gemeinschaftlichen Tangenten von C_1C_2, C_1C_3, C_2C_3. Mit der Verbindungslinie p der Punkte d_1e_1 und d_2e_2 schneide man die drei Kegelschnitte und ziehe in ihnen die Tangenten b_1b_1', b_2b_2', b_3b_3'. Nach 372. liegen $b_2b_2'b_3b_3'$ und $b_1b_1'b_3b_3'$ je auf einem Kegelschnitte, welcher a und b in pa und pb berührt; deshalb fallen beide Kegelschnitte in einen π zusammen. Von jedem Punkte G auf p lassen sich an π zwei Tangenten ziehen, welche durch jeden der Kegelschnitte $C_1C_2C_3$ harmonisch getrennt werden (373.), also auch von dem Punkte, in welchen p von einer der Geraden d_3e_3 z. B. d_3 geschnitten wird. Die Tangenten von ihm an π seien q und r, an C_1 und C_2 seien sie bezüglich d_3 und s_1, d_3 und s_2. Da nun qrd_3s_1 und qrd_3s_2 harmonisch sind, so müssen s_1 und s_2 mit e_3 zusammenfallen, also geht p durch d_3e_3.

§ 24.

Gemeinschaftliche Punkte und Tangenten.

376. *Wenn drei Kegelschnitte $C_1C_2C_3$ durch dieselben beiden Punkte AB gehen, so liegen viermal drei der Durchschnittspunkte ihrer gemeinschaftlichen Tangenten je auf einer Geraden.*

Die Tangenten in A und B an $C_1C_2C_3$ schneiden sich in $B_1B_2B_3$; die Verbindungslinien dieser Punkte seien $x_1 = B_2B_3$, $x_2 = B_1B_3$, $x_3 = B_1B_2$. Ferner seien $r_1s_1t_1u_1$ die gemeinschaftlichen Tangenten von C_2C_3, $r_2s_2t_2u_2$ diejenigen von C_1C_3 und endlich $r_3s_3t_3u_3$ diejenigen von C_1C_2, dann sind die Punkte $x_1(x_2x_3r_1t_1)$, $x_2(x_1x_3r_2t_2)$ und $x_3(x_1x_2r_3t_3)$ harmonisch. Denn x_1 ist eine Seite des Poldreiecks von C_2C_3; auf ihr liegen zwei Durchschnitte gemeinschaftlicher Tangenten, $G_{23}G'_{23}$; daher sind $A(B_2B_3G_{23}G'_{23})$ harmonisch. 366. 36 g. Die Verbindungslinien der Punkte (x_3r_3) und (x_3t_3) mit (r_2s_2) seien

β und β', diejenigen von $(x_1 r_1)$ und $(x_1 t_1)$ mit $(r_2 s_2)$ seien γ und γ' und die Tangenten von $(r_2 s_2)$ an C_2 seien vv', dann sind die Geraden $\beta\beta' vv' r_2 s_2$ und $\gamma\gamma' vv' r_2 s_2$ in Involution, weil die Tangenten von einem Punkte an zwei Kegelschnitte und seine Verbindungslinien mit zwei Durchschnitten gemeinsamer Tangenten in Involution sind, wenn diese Durchschnitte ein Punktpaar derjenigen Kegelschnittschar bilden, welche durch die beiden Kegelschnitte bestimmt ist. Ist π die Verbindungslinie von $(r_2 s_2)$ mit $(x_1 x_3)$, so sind wegen der vorher angeführten harmonischen Punkte $\beta\beta' x_2 \pi$ und $\gamma\gamma' x_2 \pi$ je vier harmonische Strahlen. Die Strahlenpaare $\beta\beta'$ und $\gamma\gamma'$ sind also sowohl in Involution mit $vv' r_2 s_2$, als harmonisch mit $x_2\pi$ und müssen daher zusammenfallen, denn es giebt nur ein Strahlenpaar einer Involution, welches mit einem gegebenen Punktpaare harmonisch liegt. 42a.

Nachdem so gezeigt ist, dafs die Schnittpunkte $u_1 t_1$, $r_2 s_2$, $r_3 s_3$ und $r_1 s_1$, $r_2 s_2$, $u_3 t_3$ gemeinschaftlicher Tangenten auf zwei Geraden β und β' liegen, kann man leicht erkennen, dafs es noch zwei andere Gerade giebt, auf denen drei Schnittpunkte gemeinschaftlicher Tangenten liegen. In den harmonischen Punktreihen $x_1(x_2 x_3 r_1 t_1)$ und $x_2(x_1 x_3 r_2 t_2)$ fallen die Punkte $(x_1 x_2)$ und $(x_2 x_1)$ zusammen; die Verbindungslinien der drei anderen Punktpaare schneiden sich also in einem Punkte, der auf x_3 liegt. Nun liegen $(x_1 r_1)$ und $(x_2 r_2)$ auf β', welche Gerade durch $(x_3 t_3)$ geht, also mufs auch die Verbindungslinie von $(x_1 t_1)$ und $(x_2 t_2)$ durch $(x_3 t_3)$ gehen, d. h. die Tangentendurchschnitte $(x_1 t_1)$, $(x_2 t_2)$, $(x_3 t_3)$ liegen in einer Geraden und ebenso folgt, dafs $(x_1 r_1)$, $(x_2 t_2)$, $(x_3 r_3)$ auch auf einer Geraden liegen.

377. *Zieht man von irgend einem Punkte P einer gemeinschaftlichen Sekante AB zweier Kegelschnitte KK_1, die sich in vier Punkten $ABCD$ schneiden, zwei Gerade, so liegen die vier Schnittpunkte, in denen die eine K, die andere K_1 schneidet, auf einem Kegelschnitte $\mathfrak{K}$, welcher durch C und D geht.*

Die Schnittpunkte von K mit der einen und von K_1 mit der anderen Geraden seien HJ und $H_1 J_1$; durch $CDHJ$ lassen sich unendlich viele Kegelschnitte legen, welche K_1 wegen 364.

in solchen Sehnen schneiden, die sich in P treffen; einer von ihnen mufs auch durch $H_1 J_1$ gehen.

Fallen HJ und $H_1 J_1$ je in einen Punkt H und H_1 zusammen, so nimmt der Satz die Fassung an:

Zieht man von irgend einem Punkte P einer gemeinschaftlichen Sekante AB zweier Kegelschnitte K und K_1 Tangenten PH an K und PH_1 an K_1, so läfst sich durch die beiden anderen Schnittpunkte C und D von K und K_1 ein Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ legen, welcher K in H und K_1 in H_1 berührt.

Die Berührungspunkte H und H_1 können als die Schnittpunkte gemeinschaftlicher Tangenten von $K\mathfrak{K}$ und $K_1\mathfrak{K}$ angesehen werden und liegen deshalb mit einem Schnittpunkte gemeinschaftlicher Tangenten von K und K_1 in einer Geraden (376.), also:

Legt man durch zwei Schnittpunkte zweier Kegelschnitte einen dritten, welcher beide berührt, so liegen die Berührungspunkte mit einem Schnittpunkte gemeinsamer Tangenten von K und K_1 in einer Geraden.

378. Zwei Kegelschnitte $K_1 K_2$ schneiden sich in $A_3 B_3 C_3 D_3$; es sei $E_3 F_3 G_3$ das gemeinschaftliche Poldreieck und zwar treffen sich $A_3 B_3$ und $C_3 D_3$ in G_3, $A_3 C_3$ und $B_3 D_3$ in F_3, $B_3 C_3$ und $A_3 D_3$ in E_3. Auf den Seiten dieses Poldreiecks liegen zu je zwei die Schnittpunkte gemeinschaftlicher Tangenten und zwar auf g_3 oder $E_3 F_3$ die Punkte G_{12} und G'_{12}, auf f_3 oder $E_3 G_3$ die Punkte F_{12} und F'_{12}, auf e_3 oder $F_3 G_3$ die Punkte E_{12} und E'_{12}. Durch einen von ihnen, G_{12}, ziehe man zwei Gerade ll', welche K_1 in $A_2 B_2 C_2 D_2$ und K_2 in $A_1 B_1 C_1 D_1$ treffen. Die gemeinschaftlichen Tangenten von G_{12} seien t und t′ und die beiden Strahlen, welche ll' und tt′ harmonisch trennen, seien b_3 und b_3'. Die Berührungssehnen b_1 und b_2 der gemeinschaftlichen Tangenten mit K_1 und K_2 treffen sich in G_3 und die Gerade b_3 in G_1 und G_2. Dann sind die Büschel $G_1(G_2 G_3 A_1 D_1)$, $G_2(G_1 G_3 A_2 D_2)$, $G_3(G_1 G_2 A_3 D_3)$ harmonisch. Denn die Schnittpunkte $(A_1 D_1,\ B_1 C_1)$ und $(A_2 D_2,\ B_2 C_2)$ liegen sowohl auf b_2 und b_1, als auf b_3'. Die Sehne $B_2 D_2$ werde von $G_3 A_3$ und $G_3 D_3$ in β und β', von $G_1 A_1$ und $G_1 D_1$ in γ und γ' und von K_2 in v und v' geschnitten; da zwei Kegelschnitte und ihre gemeinschaftlichen Sehnen jede Gerade

in einer Involution schneiden, so sind $B_2 D_2 \beta \beta' v v'$ und $B_2 D_2 \gamma \gamma' v v'$ in Involution und $\beta \beta'$ müssen mit $\gamma \gamma'$ zusammenfallen; denn ist π der Schnittpunkt von $B_2 D_2$ mit $G_1 G_3$, so sind $\beta \beta' G_2 \pi$ und $\gamma \gamma' G_2 \pi$ je vier harmonische Punkte und $\beta \beta'$ und $\gamma \gamma'$ müssen also gleichzeitig der Involution $A_2 B_2 v v'$ angehören und $G_2 \pi$ harmonisch trennen.

In β und β' schneiden sich $A_3 B_3$, $B_2 D_2$, $B_1 D_1$ und $C_3 D_3$, $A_2 B_2$, $C_1 D_1$. Daraus folgt leicht (cf. 376), dafs noch $A_2 C_2$ und $A_1 C_1$, $C_2 D_2$ und $C_1 D_1$, $A_2 B_2$ und $A_1 B_1$ sich auf $A_3 B_3$, $C_2 D_2$ und $A_1 B_1$, $B_2 D_2$ und $A_1 C_1$, $A_2 C_2$ und $B_1 D_1$ sich auf $C_3 D_3$ schneiden. Es schneiden sich also auf jeder der durch G_3 gehenden gemeinschaftlichen Sehnen $A_3 B_3$ und $C_3 D_3$ viermal je zwei Verbindungslinien der acht Schnittpunkte, in denen K_1 und K_2 von dem Geradenpaar (ll') getroffen wird und achtmal liegen vier dieser Schnittpunkte auf einem Kegelschnitte, der entweder durch $A_3 B_3$ oder $C_3 D_3$ geht. Mit $A_3 B_3$ liegen auf einem Kegelschnitte die Punkte $A_1 B_1 C_2 D_2$, $A_2 B_2 C_1 D_1$, $A_1 C_1 B_2 D_2$, $A_2 C_2 B_1 D_1$; mit $C_3 D_3$ die Punkte $A_1 B_1 A_2 B_2$, $C_1 D_1 C_2 D_2$, $A_1 C_1 A_2 C_2$, $B_1 D_1 B_2 D_2$.

Läfst man die Geraden ll' sich um G_{12} drehen, so ändern sich diese Kegelschnitte, treffen sich aber entweder in $A_3 B_3$ oder $C_3 D_3$. Hält man die Gerade l und die Schnittpunkte $A_1 A_2$ fest, dreht aber l', so erhält man ein Büschel von Kegelschnitten $k(A_1 A_2 C_3 D_3)$. Zieht man an die Kegelschnitte desselben die Tangenten von G_{12}, so liegen die Berührungspunkte auf einem Kegelschnitte γ_{12}, welche in C_3 und D_3 die Geraden $G_{12} C_3$ und $G_{12} D_3$ berührt. Einer der Kegelschnitte k schneidet die Kegelschnitte K_1 und K_2 in den Punkten B_1 und B_2, die mit G_{12} in einer Geraden liegen und diese Punkte bestimmen in gleicher Weise ein Büschel $(B_1 B_2 C_3 D_3)$. Die Berührungspunkte der von G_{12} an die Kegelschnitte desselben gezogenen Tangenten liegen auf einem Kegelschnitte, der mit γ_{12} zusammenfallen mufs, denn er berührt auch $G_{12} C_3$ und $G_{12} D_3$ und geht durch die Berührungspunkte auf demjenigen Kegelschnitte $(A_1 B_1 A_2 B_2 C_3 D_3)$, welcher beiden Büscheln gemeinsam ist. Wenn man demnach l und l' sich beliebig drehen läfst, so erhält man eine doppelt unendliche Mannigfaltigkeit von Kegelschnitten, zu denen auch diejenigen Kegelschnitte

durch $C_3 D_3$ gehören, welche K_1 und K_2 berühren. Zu allen diesen Kegelschnitten steht γ_{12} in harmonischer Beziehung.

Umgekehrt läfst sich nun zeigen, dafs jeder Kegelschnitt durch $C_3 D_3$, welcher zu γ_{12} in harmonischer Beziehung steht, zu jenen Kegelschnitten $k \ldots$ gehört, d. h. dafs er K_1 und K_2 in solchen vier Punkten schneidet, dafs zwei ihrer Verbindungslinien durch G_{12} gehen. Ist π ein Kegelschnitt durch $C_3 D_3$, welcher mit γ_{12} in harmonischer Beziehung steht, und schneidet er γ_{12} in P und Q, so müssen die Tangenten in P und Q an π sich in G_{12} treffen, also swei Gerade l und l' sein. Ein Kegelschnitt aus der Reihe $k \ldots$ ist aber dadurch bestimmt, dafs er durch $C_3 D_3$ geht und zwei beliebige Gerade l und l' durch G_{12} in ihren Schnittpunkten mit γ_{12} berührt. Also gehört π zu den Kegelschnitten $k \ldots$ Zusammenfassend:

Wenn zwei Kegelschnitte K_1 und K_2 sich in vier reellen Punkten schneiden und man zieht durch irgend einen Durchschnittspunkt G_{12} gemeinschaftlicher Tangenten zwei Gerade l und l', so schneiden sich von den Verbindungslinien der acht Schnittpunkte viermal je zwei auf der einen und viermal auf der anderen derjenigen beiden gemeinschaftlichen Sekanten s und s', die sich im Pol derjenigen Seite des gemeinschaftlichen Poldreiecks treffen, auf welcher G_{12} liegt. Achtmal liegen je vier jener Schnittpunkte mit den beiden auf s oder s' liegenden Schnittpunkten $A_3 B_3$ oder $C_3 D_3$ von K_1 und K_2 auf einem Kegelschnitte k. Drehen sich l und l' um G_{12}, so durchläuft k eine Reihe von Kegelschnitten von doppelt unendlicher Mächtigkeit. Zu diesen gehören alle Kegelschnitte durch $A_3 B_3$ oder $C_3 D_3$, welche K_1 und K_2 berühren oder zu ihnen in harmonischer Beziehung stehen. Zieht man von G_{12} an alle diese Kegelschnitte, welche durch $C_3 D_3$ gehen, Tangenten, so liegen die Berührungspunkte auf einem Kegelschnitte γ_{12}, welcher $G_{12} C_3$ und $G_{12} D_3$ in C_3 und D_3 berührt und zu allen Kegelschnitten $k \ldots$ in harmonischer Beziehung steht. In gleicher Weise geben die durch $A_3 B_3$ gehenden Kegelschnitte $k \ldots$ zu einem Kegelschnitte δ_{12} Veranlassung, der $G_{12} A_3$ und $G_{12} B_3$ in A_3 und B_3 berührt und zu allen in harmonischer Beziehung steht.

379. Drei Kegelschnitte $C_1 C_2 C_3$ haben zwei gemeinschaftliche

Punkte A und B; die Durchschnitte gemeinschaftlicher Tangenten $G_{12}G'_{12}G_{23}G'_{23}G_{13}G'_{13}$ sind die sechs Ecken eines vollständigen Vierseits (376), dessen Seiten $G_{12}G_{23}G_{13}$, $G_{12}G'_{13}G'_{23}$, $G_{23}G'_{13}G'_{12}$, $G_{13}G'_{23}G'_{12}$ sein mögen. Diejenigen drei gemeinschaftlichen Sekanten von $C_1C_2C_3$, welche nicht durch A oder B gehen, schneiden sich (364) in einem Punkte P; zieht man von ihm die Tangenten an die Kegelschnitte, so liegen die Berührungspunkte auf einem Kegelschnitte π, der zu $C_1C_2C_3$ in harmonischer Beziehung steht und durch A und B geht. Es giebt drei Büschel von Kegelschnitten durch A und B, welche zu C_1C_2, C_2C_3, C_3C_1 in harmonischer Beziehung stehen; zieht man an die Kegelschnitte derselben von G_{12}, G_{23}, G_{13} Tangenten, so liegen die Berührungspunkte auf drei Kegelschnitten γ_{12}, γ_{23}, γ_{13} durch AB, welche zu jenen Büscheln und also auch zu dem allen drei angehörenden Kegelschnitte π in harmonischer Beziehung stehen. Ist C der Pol von AB bezüglich π. sind $D_{12}E_{12}$, $D_{23}E_{23}$, $D_{13}E_{13}$ die Berührungspunkte der von G_{12}, G_{23}, G_{13} an π gezogenen Tangenten, so sind $G_{12}D_{12}$ und $G_{12}E_{12}$ Tangenten von γ_{12} in $D_{12}E_{12}$, $G_{23}D_{23}$ und $G_{23}E_{23}$ Tangenten von γ_{23} in $D_{23}E_{23}$, $G_{13}D_{13}$ und $G_{13}E_{13}$ Tangenten von γ_{13} in $D_{13}E_{13}$. Da die drei Geraden $D_{12}E_{12}$, $D_{23}E_{23}$, $D_{13}E_{13}$ sich in einem Punkte D, dem Pole der Geraden $G_{12}G_{23}G_{13}$ bezüglich π, schneiden, so sind C und D konjugierte Punkte bezüglich $\gamma_{12}\gamma_{23}\gamma_{13}$. Die Gerade CD treffe π noch in $C'D'$; da nun für die drei Kegelschnitte $\gamma_{12}\gamma_{23}\gamma_{13}$ sowohl C und D, wie C' und D' konjugierte Punkte sind, so treffen sie sich in denselben beiden (reellen oder imaginären) Punkten auf CD und gehören einem Büschel an. Zu den Punkten von CD gehören demnach Kegelschnitte eines Büschels, welche zu $\gamma_{12}\gamma_{23}\gamma_{13}$ in harmonischer Beziehung stehen, durch A und B gehen und deshalb (cf. 378) die Kegelschnitte $C_1C_2C_3$ in solchen Punkten schneiden, dafs zwei Verbindungslinien der Schnittpunkte auf C_1C_2 durch G_{12}, auf C_2C_3 durch G_{23}, auf C_1C_3 durch G_{13} gehen. Jede der drei Geraden $G_{12}G'_{13}G'_{23}$, $G_{23}G'_{13}G'_{12}$, $G_{13}G'_{23}G'_{12}$ giebt zu einem analogen Fall Veranlassung.

Kommt zu den drei Kegelschnitten $C_1C_2C_3$ noch ein vierter C_4, so hat dieser mit jenen noch sechs Durchschnitte gemein-

samer Tangenten, $G_{14}G'_{14}G_{24}G'_{24}G_{34}G'_{34}$. Sie bilden mit den ersten folgende Gruppen von Ecken vollständiger Vierseite

$$G_{12}G_{23}G_{13}G_{14}G_{24}G_{34},\ G_{12}G_{23}G_{13}G'_{14}G'_{24}G'_{34},$$
$$G_{12}G'_{13}G'_{23}G_{14}G_{24}G'_{34},\ G_{12}G'_{13}G'_{23}G'_{14}G'_{24}G_{34},$$
$$G_{23}G'_{13}G'_{12}G_{24}G_{34}G'_{14},\ G_{23}G'_{13}G'_{12}G'_{24}G'_{34}G_{14},$$
$$G_{13}G'_{23}G'_{12}G_{14}G_{34}G'_{24},\ G_{13}G'_{23}G'_{12}G'_{14}G'_{34}G_{24}.$$

Nimmt man die vier Geraden $G_{12}G_{23}G_{13}$, $G_{12}G_{24}G_{14}$, $G_{23}G_{24}G_{34}$, $G_{13}G_{14}G_{34}$ und denkt sich die zu jeder Geraden gehörenden Kegelschnittbüschel konstruiert, welche zu den Kegelschnitten $\gamma_{12}\gamma_{23}\gamma_{13}$, $\gamma_{12}\gamma_{24}\gamma_{14}$, $\gamma_{23}\gamma_{24}\gamma_{34}$, $\gamma_{13}\gamma_{14}\gamma_{34}$ in harmonischer Beziehung stehen, wenn $\gamma_{14}\gamma_{24}\gamma_{34}$ auf dieselbe Art wie $\gamma_{12}\gamma_{13}\gamma_{23}$ konstruiert sind, so müssen sich diejenigen vier gemeinschaftlichen Sekanten jener Büschel, welche nicht durch A und B gehen, in einem Punkte treffen. Sind CD und C_1D_1 die gemeinschaftlichen Sekanten der beiden Büschel $\gamma_{12}\gamma_{23}\gamma_{14}$ und $\gamma_{12}\gamma_{24}\gamma_{14}$ und zieht man von ihrem Schnittpunkte R Tangenten an die fünf Kegelschnitte $\gamma_{12}\gamma_{23}\gamma_{13}\gamma_{24}\gamma_{14}$, so liegen die Berührungspunkte auf einem Kegelschnitte ϱ, welcher zu jenen in harmonischer Beziehung steht. Da er also zu $\gamma_{23}\gamma_{24}$ und $\gamma_{13}\gamma_{14}$ in harmonischer Beziehung steht, $\gamma_{23}\gamma_{24}\gamma_{34}$ und $\gamma_{13}\gamma_{14}\gamma_{34}$ aber ein Büschel bilden, so liegt R auf denjenigen gemeinschaftlichen Sekanten dieser Büschel, welche nicht durch A oder B gehen. Der Kegelschnitt ϱ steht also zu allen sechs Kegelschnitten $\gamma_{12}\gamma_{23}\gamma_{13}\gamma_{14}\gamma_{24}\gamma_{34}$ in harmonischer Beziehung und schneidet daher jeden der Kegelschnitte $C_1C_2C_3C_4$ noch in solchen zwei Punkten, dafs die Verbindungslinien der auf C_1C_2, C_2C_3, C_1C_3, C_1C_4, C_2C_4, C_3C_4 befindlichen Punkte sich zu zwei bezüglich in G_{12}, G_{23}, G_{13}, G_{14}, G_{24}, G_{34} schneiden. Da die Punkte G sich auf acht vollständige Vierseite verteilen, so giebt es im Ganzen acht Kegelschnitte ϱ und somit acht Auflösungen der Aufgabe:

Einen Kegelschnitt zu konstruieren, der vier gegebene Kegelschnitte $C_1C_2C_3C_4$, welche zwei gemeinschaftliche Punkte A und B haben, in diesen und aufserdem in solchen Punkten schneidet, dafs die Verbindungslinien der auf C_1C_2, C_2C_3, C_1C_3, C_1C_4, C_2C_4, C_3C_4 befindlichen Schnittpunkte zu swei bezüglich durch solche Durchschnitte gemeinschaftlicher Tangenten dieser Kegelschnitt-

paare gehen, welche die sechs Ecken eines vollständigen Vierseits bilden.

380. Die Kegelschnitte C_1 und C_2 schneiden sich in $ABCD$; die gemeinschaftlichen Sekanten AB oder s und CD oder t treffen sich in P. Auf der für beide Kegelschnitte gemeinsamen Polare p von P liegen die Tangentendurchschnitte G_{12} und G'_{12}. Diese sind mit den Punkten, in denen p von C_1 und C_2 geschnitten werden, in Involution, also läfst sich durch $G_{12}G'_{12}$ ein Kegelschnitt C_{12} des Büschels $(ABCD)$ legen. Die Tangente durch G_{12} berühre C_1 in B_1, C_2 in B_2 und schneide C_{12} noch in B_3; auf der Geraden p seien S_1 und S_2 die Pole von s, T_1 und T_2 diejenigen von t bezüglich C_1 und C_2. Die Geraden B_1T_1, B_2T_2 sind konjugiert zur Tangente B_1B_2 bezüglich C_1, C_2; daher schneiden B_1T_1 und B_2T_2 die Sekante t in demselben Punkte Q, welcher dem Schnittpunkte R von B_1B_2 und t bezüglich des Kegelschnittbüschels konjugiert ist. Da die Geraden $B_3B_2B_1G_{12}$ und $B_3G'_{12}$ die Sekante t in konjugierten Punkten bezüglich C_{12} schneiden und der eine Schnittpunkt Q ist, so mufs der andere R sein. Auf der gemeinschaftlichen Tangente B_1B_2 bestimmen die Kegelschnitte des Büschels $(ABCD)$ eine Involution, deren Doppelpunkte B_1 und B_2 sind. Daher sind $B_1B_2B_3G_{12}$ harmonische Punkte, $Q\,(B_1B_2B_3G_{12})$ harmonische Strahlen und $T_1T_2G'_{12}G_{12}$ harmonische Punkte. In gleicher Weise folgt, dafs $S_1S_2G'_{12}G_{12}$ harmonische Punkte sind.

Wenn sich zwei Kegelschnitte C_1 und C_2 in vier reellen Punkten schneiden, so liegen zwei solche Durchschnitte $G_{12}G'_{12}$ gemeinsamer Tangenten, die auf einer Seite des gemeinschaftlichen Poldreieckes liegen, auf einem Kegelschnitte des durch C_1 und C_2 bestimmten Büschels und werden harmonisch getrennt durch die Pole von jeder der beiden gemeinschaftlichen Sekanten, welche sich in der Ecke des Poldreiecks schneiden, die der Seite $G_{12}G'_{12}$ gegenüberliegt.

§ 25.

Das Kegelschnittbüschel mit zwei und vier imaginären Grundpunkten.

381. Die Gesamtheit aller Kegelschnitte, welche den Kreisen eines Kreisbüschels harmonisch verwandt sind, bildet

ein „*Kegelschnittbüschel*“. Daraus folgt: die Gesamtheit aller Kegelschnitte, welche die Punktpaare zweier Involutionen als Paare konjugierter Punkte haben, bildet ein Kegelschnittbüschel.

382. *Zwei Kegelschnitte, die sich in zwei reellen Punkten schneiden, lassen sich durch harmonische Verwandtschaft in zwei Kreise verwandeln.*

Es seien A und B die beiden reellen Schnittpunkte zweier Kegelschnitte K und K_1, $CDEF$ vier harmonische Punkte von K, also $A\,(CDEF)$ und $B\,(CDEF)$ harmonische Büschel. Diese treffen K_1 in $C_1D_1E_1F_1$ und $C_1'D_1'E_1'F_1'$; dann sind auch $C_1\,(C_1'D_1'E_1'F_1')$ und $C_1'\,(C_1D_1E_1F_1)$ harmonische Büschel und da diese den Strahl C_1C_1' gemeinsam haben, so liegen die Schnittpunkte der übrigen Strahlenpaare auf einer Geraden g. Man stelle nun eine harmonische Verwandtschaft her, in welcher dem Kegelschnitte K_1 ein Kreis $\mathfrak{K}_1$ und der Geraden g die unendlich ferne Gerade g_∞ verwandt ist. Bezeichnet man die verwandten Punkte mit deutschen Buchstaben, so sind auf $\mathfrak{K}_1$ die Bogen $\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_1'$, $\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_1'$, $\mathfrak{E}_1\mathfrak{E}_1'$, $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_1'$ einander gleich, weil die Geraden $\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1'$ und $\mathfrak{C}_1'\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{C}_1\mathfrak{E}_1'$ und $\mathfrak{C}_1'\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{C}_1\mathfrak{F}_1'$ und $\mathfrak{C}_1'\mathfrak{F}_1$ sich auf g_∞ schneiden und daher parallel sind. Deshalb müssen die Winkel $\mathfrak{ACB}$, $\mathfrak{ADB}$, $\mathfrak{AEB}$, $\mathfrak{AFB}$ einander gleich sein, nämlich gleich der Hälfte der Summe der Bogen $\mathfrak{AB}$ und $\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_1'$. Folglich liegen die sechs Punkte $\mathfrak{ABCDEF}$ auf einem Kreise $\mathfrak{K}$, welcher dem Kegelschnitte K verwandt ist.

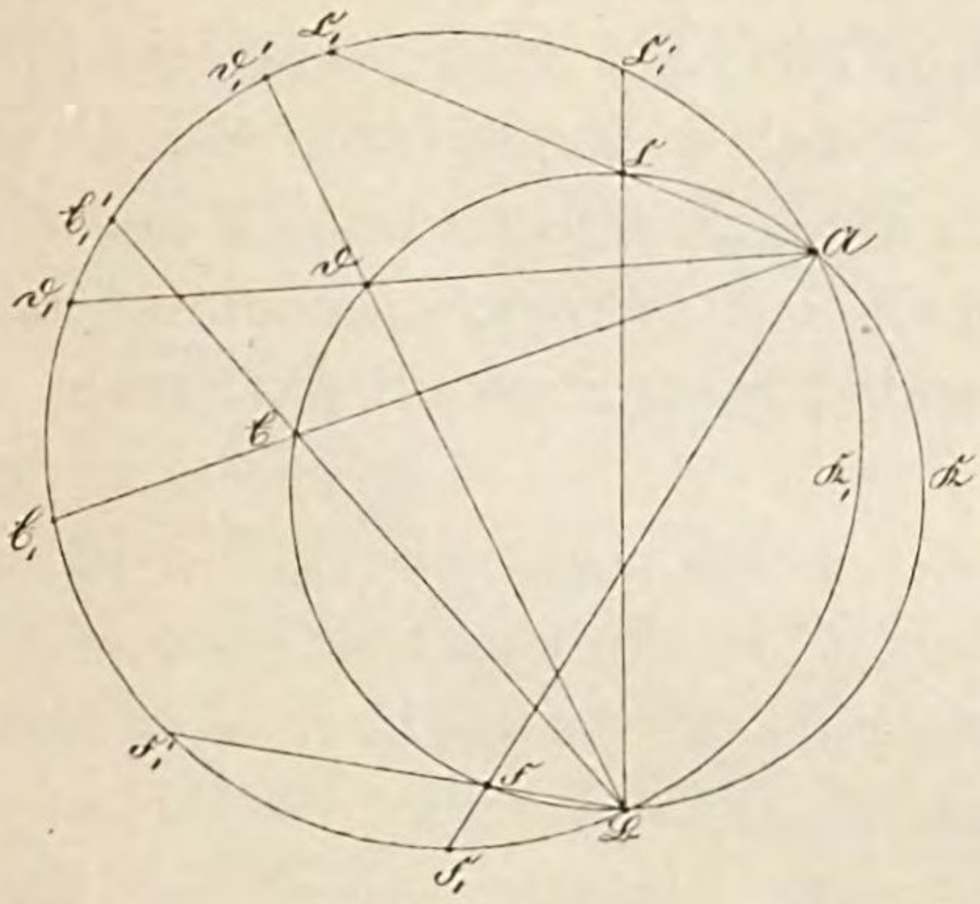


Fig. 153.

Anderer Beweis. Von den Kegelschnitten K und K_1 soll der leichteren Anschauung wegen angenommen werden, dafs sie Ellipsen sind; denn irgend zwei Kegelschnitte, die keine Ellipsen sind, kann man durch harmonische Verwandtschaft stets in Ellipsen verwandeln. Man hat die Mittellinie

der Verwandtschaft nur so zu wählen, dafs sie keinen der Kegelschnitte schneidet.

Denkt man sich eine Gerade, welche K berührt und ganz im äufseren Gebiete von K_1 liegt, so bewegt, dafs sie stets Tangente von K bleibt, so wird sie zunächst dafs äufsere Gebiet von K_1 durchlaufen, um dann auch in das innere Ge-

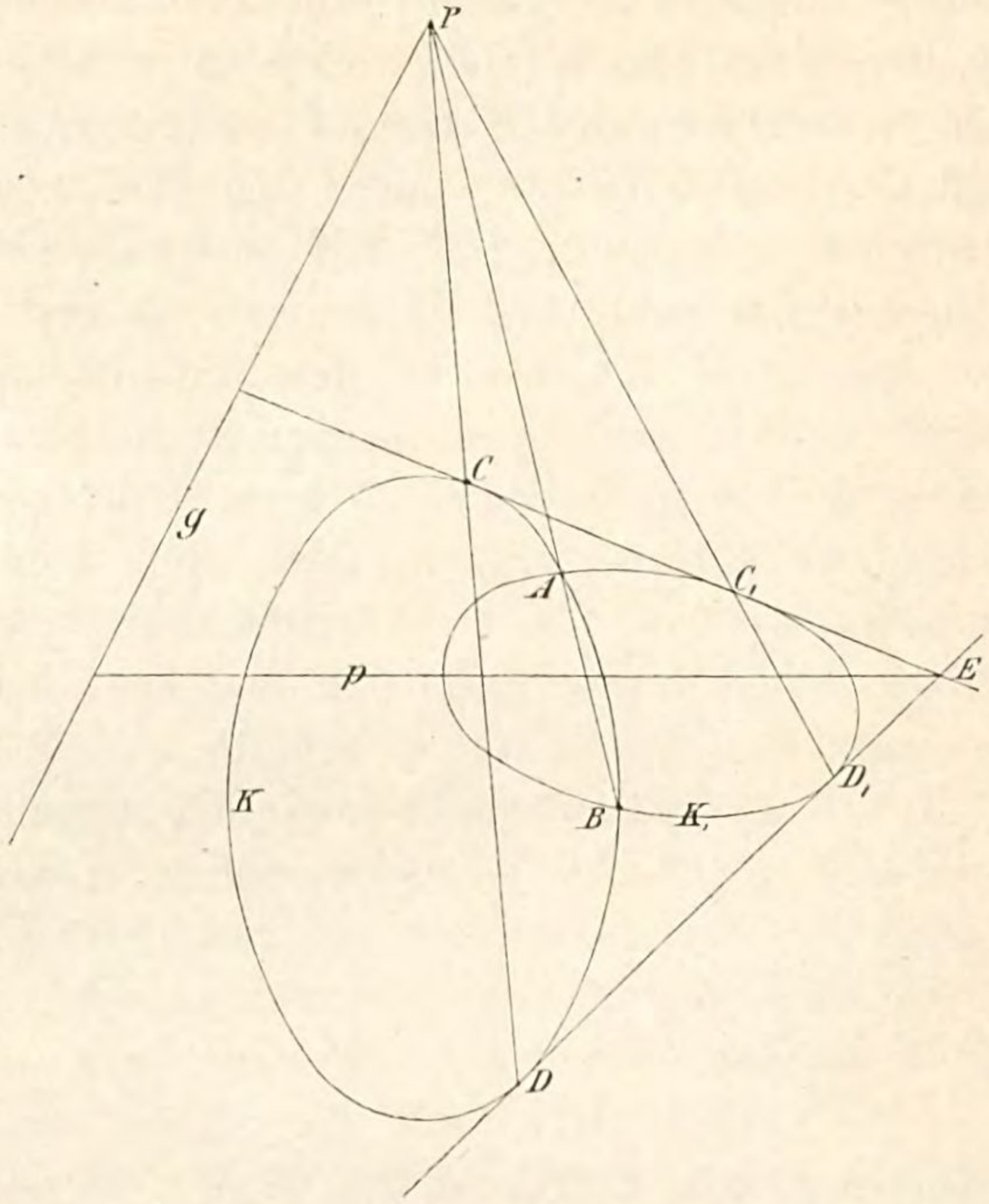


Fig. 154.

biet von K_1 einzutreten und schliefslich auch wieder aus demselben auszutreten. Sie mufs daher zweimal K_1 berühren. Demnach haben K und K_1 zwei gemeinschaftliche Tangenten, welche in C und C_1, D und D_1 berühren und sich in E schneiden mögen.

Die Geraden CD und C_1D_1, die Polaren von E in Bezug auf K und K_1, mögen sich in P schneiden; es hat dann P bezüglich beider Kegelschnitte dieselbe Polare p, welche auch durch E gehen mufs.

Daraus schliefst man weiter, dafs auch die gemeinschaftliche Sekante AB durch P geht. Denn zieht man PA und

träfe diese Gerade K in F, K_1 in F_1, so würden P und p sowol durch A und F, als A und F_1 harmonisch getrennt.

Zu PC, PC_1, PA sei g der vierte harmonische, dem letzten zugeordnete Strahl. Man konstruiere eine solche harmonische Verwandschaft, dafs dem Kegelschnitte K_1 ein Kreis $\mathfrak{K}$ und der Geraden g die unendlich entfernte Gerade g_∞ verwandt ist. Die zu PC, PC_1, PA verwandten Geraden $\mathfrak{P}_\infty\mathfrak{C}$, $\mathfrak{P}_\infty\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{P}_\infty\mathfrak{A}$ werden parallel und weil $\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1$ auf $\mathfrak{p}$, der zu p verwandten Geraden senkrecht steht, denn $\mathfrak{p}$ geht durch den Mittelpunkt des Kreises $\mathfrak{K}_1$, so müssen auch $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ auf $\mathfrak{p}$ senkrecht stehen und zwar liegt $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ in der Mitte von $\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1$. Die Punkte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ liegen symmetrisch zu $\mathfrak{p}$, also läfst sich durch dieselben ein Kreis $\mathfrak{K}$ legen, welcher $\mathfrak{E}\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{E}\mathfrak{D}$ berührt. Geschieht dies in $\mathfrak{C}'$ und $\mathfrak{D}'$, so liegt $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ in der Mitte von $\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{C}'\mathfrak{D}'$, denn es ist die Potenzlinie von $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}'$. Daher mufs der Kreis $\mathfrak{K}'$ mit dem Kreise zusammenfallen, welcher dem Kegelschnitte K verwandt ist.

Somit sind den Kegelschnitten K und K_1 die Kreise $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$ verwandt.

383. Aus der Verwandtschaft zweier Kegelschnitte, die sich in zwei reellen Punkten schneiden, mit zwei Kreisen, ergeben sich unmittelbar die folgenden Sätze:

a. *Wenn zwei Kegelschnitte nur zwei reelle Schnittpunkte haben, so haben sie auch nur zwei reelle gemeinschaftliche Tangenten.*

b. *Zwei Kegelschnitte mit zwei reellen Schnittpunkten bestimmen ein Büschel.*

c. *Aufser der Geraden AB, welche die Schnittpunkte beider Kegelschnitte verbindet und für beide dieselbe Involution konjugierter Punkte hat, giebt es noch eine zweite Gerade g von derselben Eigenschaft. Die imaginären Doppelpunkte der Involution konjugierter Punkte auf g sind die imaginären Schnittpunkte der beiden Kegelschnitte. Man nennt g die ideelle gemeinschaftliche Sekante.*

d. *Die Kegelschnitte des Büschels schneiden jede Gerade in den Punktpaaren einer Involution.* (36 c.)

e. *Von allen Kegelschnitten des Büschels berühren höchstens zwei eine Gerade.* (36 g.)

f. *Von allen Kegelschnitten des Büschels geht nur einer durch einen bestimmten Punkt.*

g. *Das aus der reellen und ideellen gemeinschaftlichen Sekante bestehende Geradenpaar ist ein Kegelschnitt des Büschels,* denn durch keinen Punkt desselben kann ein anderer Kegelschnitt des Büschels gehen.

h. *Das gemeinschaftliche Poldreieck hat eine reelle Ecke* (P) *und zwei imaginäre, die imaginären Doppelpunkte der Involution, in welcher die Polare p von P von den Kegelschnitten getroffen wird.*

i. *Die Polaren eines Punktes in Bezug auf alle Kegelschnitte eines Büschels schneiden sich in einem Punkte, dem konjugierten Punkte bezüglich des Büschels.* (34.)

k. *Die Pole einer Geraden in Bezug auf die Kegelschnitte des Büschels liegen auf einem Kegelschnitte, welcher auch durch die reelle Ecke des gemeinschaftlichen Poldreiecks geht. Auf ihm liegen auch die konjugierten Punkte aller Punkte der Geraden.* Beweis wie in 360.

l. *Zieht man durch den Schnittpunkt gemeinschaftlicher Tangenten, welcher auf der reellen Seite des gemeinsamen Poldreieckes liegt, zwei Gerade, so schneiden sie zwei beliebige Kegelschnitte des Büschels in solchen Punkten, dafs zwei Paare ihrer Verbindungslinien sich auf der reellen, die beiden andern Paare sich auf der ideellen gemeinschaftlichen Sekante schneiden.*

384. *Alle Kegelschnitte K, welche einen Brennpunkt F und seine Leitlinie f gemeinsam haben, bilden ein Büschel.*

Man stelle eine solche harmonische Verwandtschaft her, dafs F das Centrum und der Geraden f die g_∞ verwandt ist. Jedem Kegelschnitte mufs dann ein Kreis mit dem Mittelpunkt F verwandt sein, weil die circulare Involution konjugierter Strahlen des Brennpunktes sich selbst verwandt ist. Da aber alle konzentrischen Kreise eine Gerade in einer Involution schneiden, so müssen dies auch die Kegelschnitte K thun.

385. *Alle Kegelschnitte K, welche einen Punkt P und eine Gerade p zu Pol und Polare und eine auf p liegende Involution als Involution konjugierter Punkte haben, bilden ein Büschel.*

Wenn die Involution auf p Doppelpunkte, A und B hat, so müssen alle Kegelschnitte K die Geraden PA und PB in A und B berühren, haben also in A und B je zwei gemeinsame Punkte und bilden daher ein Büschel mit vier reellen Grundpunkten. 355.

Wenn die Involution auf p keine Doppelpunkte hat, so schneiden sich die Kreise über den einzelnen Punktpaaren in zwei Punkten F und F'. Man ziehe PF und konstruiere denjenigen Punkt O, welcher p von P und F harmonisch trennt und wähle O und p als Centrum und Axe einer harmonischen Verwandtschaft. In dieser sind allen Kegelschnitten, welche P und p als Pol und Polare haben, solche verwandt, welche F und p als Brennpunkt und Leitlinie haben, also folgt der Satz aus 384.

386. *Alle Kegelschnitte, welche zwei Involutionen auf den Geraden p und q als Involutionen konjugierter Punkte haben, bilden ein Büschel.*

Wenn beide Involutionen Doppelpunkte haben, so folgt der Satz aus 355.

Wenn die Involution auf p keine Doppelpunkte hat, so kann man nach 381. eine harmonische Verwandtschaft herstellen, in welcher der p die g_∞ und jedem Kegelschnitte ein Kreis verwandt ist. Alle diese Kreise haben die zu der Involution q verwandte Involution $\mathfrak{q}$ als Involution konjugierter Punkte, also $\mathfrak{q}$ als gemeinschaftliche reelle oder ideelle Sekante, jenachdem die Involution auf q Doppelpunkte hat oder nicht und der Satz ergiebt sich aus 36c. und 381.

387. *Alle Kegelschnitte, welche durch drei Punkte ABC gehen und zwei Punkte EE' zu konjugierten Punkten haben, bilden ein Büschel.*

Es seien FG, F_1G_1, F_2G_2, ... Punktpaare, welche EE' harmonisch teilen; durch $ABCFG$ und $ABCF_1G_1$ seien die Kegelschnitte K und K_1 gelegt, die sich noch in D schneiden müssen. Denn durchläuft ein Punkt von A ab den Kegelschnitt K_1 und tritt zunächst in das innere Gebiet von K, verläfst dasselbe bei B, durchläuft einen Teil von K_1 im äufseren Gebiete von K, tritt wieder bei C in das innere

Gebiet von K, so mufs er beim Austritt in das äufsere Gebiet noch einmal K in D schneiden. K und K_1 bestimmen ein Büschel und die Kegelschnitte desselben schneiden EE' in einer Involution (356), welche mit der Involution FG, F_1G_1, F_2G_2, ... identisch sein mufs, da sie mit ihr zwei Punktpaare gemein hat. Die Kegelschnitte des Büschels (KK_1) fallen daher mit den Kegelschnitten durch ABC zusammen, welche EE' zu konjugierten Punkten haben.

388. *Alle Kegelschnitte, welche durch zwei Punkte AB gehen und die Punkte CC' und DD' zu konjugierten Punkten haben, bilden ein Büschel.*

Die Punktpaare EF, E_1F_1, E_2F_2, ..., welche CC' und GH, G_1H_1, G_2H_2, ..., welche DD' harmonisch teilen, bilden zwei Involutionen. Man lege durch $ABEF$ die Kegelschnitte eines Büschels, so schneiden sie DD' in einer Involution, welche mit der Involution GH, G_1H_1, G_2H_2, ... ein Punktpaar gemein hat; dieses sei GH und es liegen also $ABEFGH$ auf einem Kegelschnitte K. Auf gleiche Weise folgt, dafs es im Büschel (ABE_1F_1) einen Kegelschnitt K_1 giebt, welcher durch eines der Punktpaare auf DD', etwa G_1H_1 geht. Die beiden Kegelschnitte K und K_1 bestimmen ein Büschel, in welchem A und B zwei reelle Grundpunkte sind. Ein Kegelschnitt desselben, K_o, mufs durch den Schnittpunkt E_o von CC' und DD' gehen und diese Geraden in zwei Punktpaaren der auf ihnen liegenden Involutionen schneiden. Diese Punktpaare seien E_oF_o und E_oG_o. Durch die fünf Punkte $ABE_oF_oG_o$ ist der Kegelschnitt K_o bestimmt und K_1 ist also ein Kegelschnitt des durch K und K_o bestimmten Büschels. Legt man noch durch ABE_2F_2 denjenigen Kegelschnitt K_2, welcher DD' in einem Punktpaare G_2H_2 der Involution schneidet, so folgt ganz ebenso, dafs K_2 auch dem durch K und K_o bestimmten Büschel angehört.

389. *Alle Kegelschnitte, welche durch einen Punkt A gehen und die Punkte CC', DD', EE' zu konjugierten Punkten haben, bilden ein Büschel.*

Wenn P ein beliebiger Punkt ist, so bilden alle Kegelschnitte durch A und P, welche CC' und DD' zu konjugierten Punkten haben, ein Büschel. Unter den Kegelschnitten des-

selben giebt es einen K, der EE' harmonisch teilt. Daraus folgt, dafs es unter allen Kegelschnitten durch A, welche CC', DD', EE' zu konjugierten Punkten haben, nur einen K giebt, welcher durch einen Punkt P und ebenso nur einen K_1 giebt, welcher durch einen Punkt P_1 geht. Beide müssen wenigstens noch einen Schnittpunkt B gemein haben und bestimmen daher ein Büschel. Sämtliche Kegelschnitte dieses Büschels schneiden die Geraden CC', DD', EE' in Involutionen, welche mit den Involutionen zusammenfallen müssen, deren Doppelpunkte CC', DD', EE' sind. Daher haben alle Kegelschnitte des Büschels (KK_1) diese Punkte zu konjugierten Punkten.

390. *Von allen Kegelschnitten, welche die Punkte AA', BB', CC', DD' zu konjugierten Punkten haben, geht nur ein einziger durch einen Punkt P.*

Alle Kegelschnitte durch P, welche AA', BB', CC' zu konjugierten Punkten haben, bilden ein Büschel. Unter ihnen giebt es einen, der DD' harmonisch teilt, also kann man schliefsen, dafs es unter allen Kegelschnitten, welche AA', BB', CC', DD' zu konjugierten Punkten haben, nur einen giebt, welcher durch P geht.

391. Die Sätze 387—390 gelten auch, wenn die konjugierten Punkte imaginär werden, also die imaginären Doppelpunkte von Involutionen sind, und lauten dann:

a. *Alle Kegelschnitte, welche durch drei Punkte ABC und die Punktpaare einer Involution gehen, bilden ein Büschel.*

b. *Alle Kegelschnitte, welche durch zwei Punkte A und B und die Punktpaare zweier Involutionen gehen, bilden ein Büschel.*

c. *Alle Kegelschnitte, welche durch einen Punkt A und die Punktpaare dreier Involutionen gehen, bilden ein Büschel.*

d. *Von allen Kegelschnitten, welche durch die Punktpaare von vier Involutionen gehen, geht nur ein einziger durch einen Punkt P.*

392. *Zwei Kegelschnitte, die keinen reellen Schnittpunkt haben, lassen sich in harmonisch verwandte Beziehung zu zwei Kreisen bringen.*

I. Fall. Der eine Kegelschnitt liegt ganz aufserhalb des anderen.

Sind K und K_1 die beiden Kegelschnitte, so ziehe man an K irgend eine Tangente, welche ganz in das äufsere Gebiet von K_1 fällt und lasse dieselbe sich auf K bewegen. Bevor sie in das innere Gebiet von K_1 eintritt und wieder aus demselben austritt, mufs sie K_1 berührt haben, also haben K und K_1 mindestens zwei gemeinsame Tangenten. Diese mögen sich in A schneiden und die Kegelschnitte in BC und B_1C_1 berühren; die Sehnen BC und B_1C_1 schneiden sich in

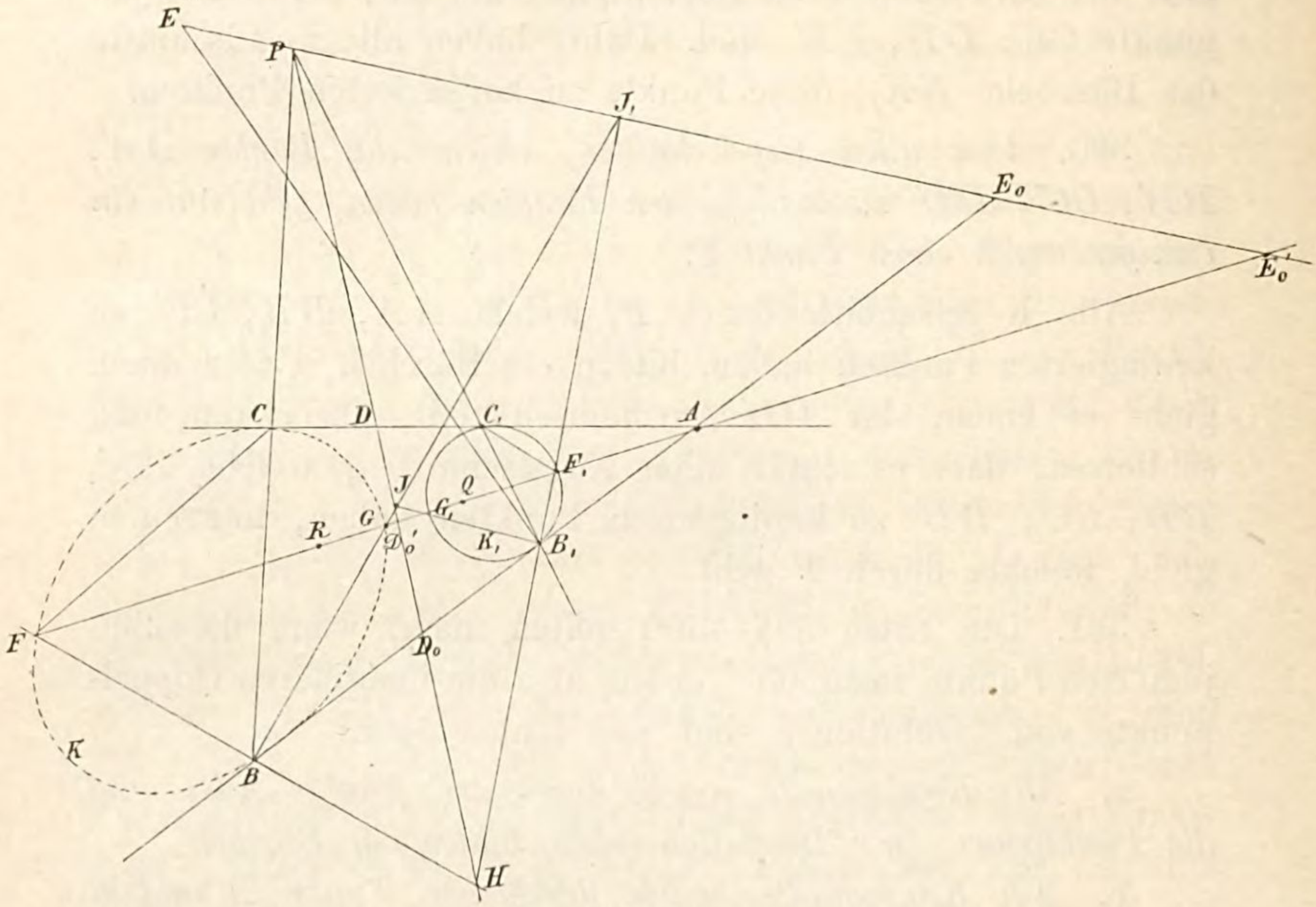


Fig. 155.

P. Die Polare von P mufs für beide Kegelschnitte mit derjenigen Geraden durch A zusammenfallen, welche PA von den beiden harmonisch trennt. Da P aufserhalb beider Kegelschnitte liegt, so mufs seine Polare beide schneiden. Es giebt daher zwei Punkte Q und R, welche die auf ihr von den Kegelschnitten ausgeschnittenen Sehnen harmonisch teilen. Die drei Punkte PQR bilden ein beiden Kegelschnitten gemeinsames Poldreieck.

Ist X_0 ein beliebiger Punkt der Tangente BB_1, sind X und X_1 die auf PX_0 liegenden konjugierten Punkte von X_0

bezüglich K und K_1, so durchlaufen X und X_1 zwei Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$, wenn X_o die Tangente durchläuft. (191.) Diese berühren AP in P und haben noch zwei gemeinsame Punkte D und E, die stets reell sein müssen. Der Kegelschnitt $\mathfrak{K}_1$ geht durch B_1. Durchläuft X_o die Strecke $B_1 A$, so durchläuft X_1 den Teil des Kegelschnittes $\mathfrak{K}_1$ von B_1 bis P. Der dem Punkte B_1 bezüglich K konjugierte Punkt B' der Geraden $B_1 P$ mufs also innerhalb $\mathfrak{K}_1$, B aufserhalb liegen, also liegt ein Teil von $\mathfrak{K}_1$ innerhalb, ein anderer aufserhalb $\mathfrak{K}$ und diese Kegelschnitte haben daher noch zwei reelle Schnittpunkte D und E.

Die Geraden PD und PE treffen die Tangente BB_1 in D_o und E_o, so sind DD_o und EE_o konjugierte Punkte in Bezug auf beide Kegelschnitte K und K_1. Treffen dieselben Geraden die Gerade QR noch in D'_o und E'_o, so sind auch PD'_o und PE'_o konjugierte Punkte für beide Kegelschnitte und daher sind alle Punktpaare der Involutionen DD_o, PD'_o, ... und EE_o und PE'_o, ... Paare konjugierter Punkte bezüglich beider Kegelschnitte, also die Geraden PD und PE sind ideelle gemeinschaftliche Sekanten.

Beschreibt man über DD_o, PD'_o, ... Kreise, so treffen sich diese in zwei Punkten O und O'; wählt man O als Centrum einer harmonischen Verwandtschaft und legt die Axe durch O' parallel zu DD_o, so sind den beiden Kegelschnitten Kreise verwandt. 176.

Anderer Beweis.

Sind $FGCB$ und $F_1G_1C_1B_1$ solche Punkte der beiden Kegelschnitte, dafs die Büschel $B\,(FGCA)$ und $B_1\,(F_1G_1C_1A)$ harmonisch sind, so haben sie den Strahl BA gemeinsam und es liegen also die Schnittpunkte PJH und PJ_1H_1 der übrigen Strahlen in einer Geraden. Man stelle eine harmonische Verwandtschaft her, in welcher dem Kegelschnitte K ein Kreis $\mathfrak{K}$ und der Geraden JH die g_∞ verwandt ist; dann mufs dem Kegelschnitte K_1 auch ein Kreis $\mathfrak{K}_1$ verwandt sein. (Die verwandten Punkte erhalten deutsche Buchstaben.) Denn da $\mathfrak{P}$ im Unendlichen liegt und QR die Polare von P für K und K_1 ist, so wird die verwandte Gerade $\mathfrak{QR}$ die Centrale von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$ sein, auf welcher die Gerade $\mathfrak{BC}$ und also

Fig. 155.

auch $\mathfrak{B}_1\mathfrak{E}_1$ senkrecht steht. Daher ist $\mathfrak{F}_1\mathfrak{G}_1$ eine Axe von $\mathfrak{K}_1$. Da ferner $\mathfrak{B}\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{B}_1\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{B}\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{B}_1\mathfrak{G}_1$ parallel sind, $\measuredangle \mathfrak{F}\mathfrak{B}\mathfrak{G} = 1\ R$ ist, so mufs auch $\measuredangle \mathfrak{F}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{G}_1 = 1\ R$ und $\mathfrak{K}_1$ ein Kreis sein.

Die Geraden PJ und PJ_1 sind also ideelle gemeinschaftliche Sekanten von K und K_1, da die verwandten Geraden g_∞ und $\mathfrak{P}\mathfrak{J}_1$ solche Sekanten der Kreise $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$ sind.

II. Fall. *Der Kegelschnitt K liegt ganz innerhalb K_1.*

Man kann annehmen, dafs der Kegelschnitt K eine Ellipse ist, denn wäre er Hyperbel oder Parabel, so läfst sich stets eine harmonische Verwandtschaft herstellen, in welcher einer der beiden verwandten Kegelschnitte $\mathfrak{K}\mathfrak{K}_1$ eine Ellipse ist.

Es seien $ABCD$ vier beliebige Punkte, deren Polaren in Bezug auf die beiden Kegelschnitte K und K_1 sich in $A'B'C'D'$ schneiden, so sind AA', BB', CC', DD' konjugiert bezüglich K und K_1. Nach 390. giebt es unendlich viele Kegelschnitte, welche die Punkte jener vier Paare zu konjugierten Punkten haben; von ihnen geht durch irgend einen Punkt P nur ein einziger K_2 und wenn P innerhalb K liegt, so mufs auch K_2 ganz innerhalb K liegen. Denn läge K_2 zum Teil aufserhalb K, so müssten K und K_2 einen gemeinsamen Punkt haben und durch diesen gingen dann zwei von den Kegelschnitten, die AA', BB', CC', DD' zu konjugierten Punkten haben, was gegen 390. verstöfst. Da aber K eine Ellipse ist, so mufs auch K_2 eine Ellipse sein. Letztere umschliefst ein kleineres Gebiet, als die erstere.

In gleicher Weise gelangt man zu einem Kegelschnitte K_3, der innerhalb K_2 liegt und wenn man sich dieses Verfahren unendlich oft wiederholt denkt, so mufs man, da die Zahl der Kegelschnitte, welche AA', BB', CC', DD' zu konjugierten Punkten haben, einfach unendlich grofs ist, schliefslich zu einem Kegelschnitte gelangen, der in einen Punkt degeneriert. Dieser Punkt sei Q und seine Polare bezüglich K sei q.

Die Kegelschnitte K und Q, letzterer als Punktkegelschnitt betrachtet, haben zwei ideelle gemeinschaftliche Sekanten (cf. 180a.). Ueber den Punktpaaren der Involution konjugierter Punkte auf der einen, s, dieser Sekanten denke man sich Kreise konstruiert; diese schneiden sich in zwei

Punkten O und O'. Wenn man eine harmonische Verwandtschaft mit dem Centrum O und der Mittellinie s herstellt, deren Axe also durch O' parallel der Mittellinie s läuft, so sind in derselben dem Kegelschnitte K ein Kreis $\mathfrak{K}$ und dem Punktkegelschnitte Q ein Punktkreis $\mathfrak{Q}$ verwandt.

Ist nämlich S der Pol von s bezüglich K und sind RR' zwei konjugierte Punkte auf s, so sind SR und $S'R'$ zwei konjugierte Strahlen für K. Die verwandten Geraden $\mathfrak{S}\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}\mathfrak{R}'$ sind parallel zu OR und OR', denn die den Punkten R und R' der Mittellinie verwandten Punkte liegen auf OR und OR' im Unendlichen; sie sind konjugiert bezüglich $\mathfrak{K}$ im Punkte $\mathfrak{S}$, dem Pole der zu s verwandten Geraden g_∞. Da $\mathfrak{S}$ somit der Mittelpunkt von $\mathfrak{K}$ ist und je zwei konjugierte Strahlen im Mittelpunkte, also je zwei konjugierte Durchmesser auf einander senkrecht stehen, so ist $\mathfrak{K}$ ein Kreis.

In gleicher Art läfst sich nachweisen, dafs $\mathfrak{Q}$ ein Punktkreis ist. Denn den für Q konjugierten Strahlen QR und QR' sind die senkrechten für $\mathfrak{Q}$ konjugierten Strahlen $\mathfrak{Q}\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{Q}\mathfrak{R}_1$ verwandt.

Der Kreis $\mathfrak{K}$ und der Punktkreis $\mathfrak{Q}$ konstituieren ein Kreisbüschel, für dessen einzelne Individuen die zu AA', BB', CC', DD' verwandten Punktpaare $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{D}\mathfrak{D}'$ auch aus konjugierten Punkten bestehen. Diesen Kreisen sind in der harmonischen Verwandtschaft solche Kegelschnitte verwandt, welche AA', BB', CC', DD' zu Paaren konjugierter Punkte haben. Da alle Kreise dieselbe Involution konjugierter Punkte auf jeder gemeinschaftlichen Sekante haben, so gilt dies auch für die verwandten Kegelschnitte; diese bilden also ein Büschel (386.), zu welchem (390.) auch K_1 gehört.

Anderer Beweis.

Man nehme wieder an, es seien die beiden Kegelschnitte K und K_1 Ellipsen und es liege K ganz innerhalb K_1; es seien ferner AA', BB', CC', DD' vier Paare konjugierter Punkte, so giebt es unendlich viele Kegelschnitte K_2 . . ., für welche die Punkte dieser Paare konjugierte Punkte sind. Die Gesamtheit dieser Kegelschnitte werde bezeichnet mit (KK_1). An K ziehe man im Punkte A_o, der beliebig angenommen werde, die Tangente t; diese mufs K_1 in A_1B_1 schneiden.

Es bewege sich A_1 in der Richtung $A_1 A_o$ nach A_2, so mufs der durch A_2 gehende Kegelschnitt K_2 von (KK_1) die Gerade t in einem Punkte B_2 schneiden, zu welchem B_1 gelangt, wenn er sich in der Richtung $B_1 A_o$ bewegt. Ebenso ergiebt sich, dafs wenn A_1 sich von A_o fort in der Richtung $A_o A_1$ bewegt, auch B_1 sich von A_o fort in der Richtung $A_o B_1$ bewegen mufs. Die Punkte A_1 und B_1, d. h. die Schnittpunkte

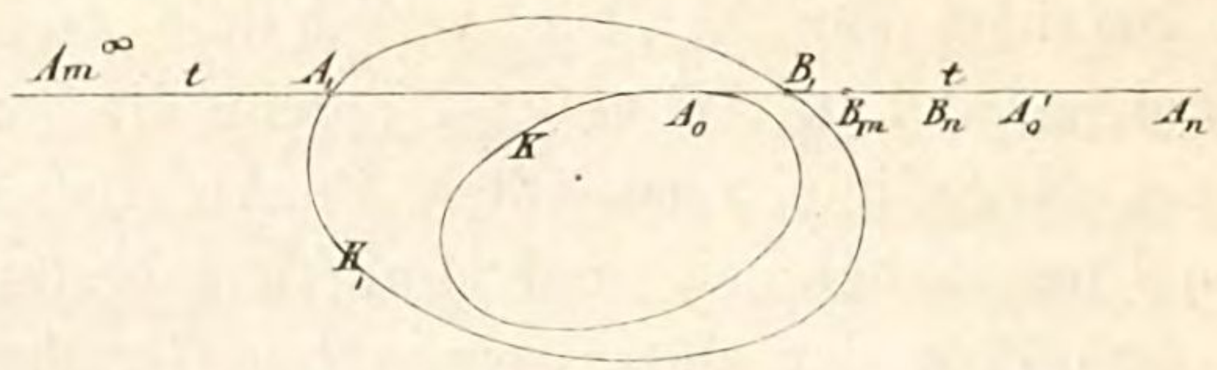


Fig. 156.

der Kegelschnitte (KK_1) mit t bewegen sich demnach in entgegengesetzter Richtung. Bei dieser Bewegung, die von A_1 aus in der Richtung $A_1 A_o$ vor sich gehen mag, treffen also die Punkte A_1 und B_1 in A_o zusammen, um sich dann wieder zu trennen. Der Punkt A_1 gelange ins Unendliche nach A_m^∞, dann wird sich B_1 im Allgemeinen an einer Stelle B_m im Endlichen befinden. Gelangt A_1 durchs Unendliche hindurch nach A_n, so hat sich B_1 nach einem Punkte B_n bewegt, dem Punkte A_n entgegen, sich ihm also genähert. Bei fortgesetzter Bewegung müssen also die Punkte A_1 und B_1 aufeinandertreffen, ehe sie in ihre alte Lage zurückkommen. Dies geschehe im Punkte A_o'. Durch ihn geht (390.) ein Kegelschnitt K' aus der Gesamtheit (KK_1), welcher also auch t berührt. Somit haben die Kegelschnitte KK' eine gemeinschaftliche Tangente und da beide keinen gemeinschaftlichen Punkt haben können (390.), so liegt jeder von ihnen ganz aufserhalb des anderen. Man kann also nach dem ersten Falle K und K' durch harmonische Verwandtschaft in zwei Kreise $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ verwandeln, welche die Punkte der Paare $\mathfrak{AA}'$, $\mathfrak{BB}'$, $\mathfrak{CC}'$, $\mathfrak{DD}'$, die den Punkten AA', BB', CC', DD' verwandt sind, zu konjugierten Punkten haben. Die Kreise $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ bestimmen ein Büschel $(\mathfrak{K}\mathfrak{K}')$ von Kreisen, denen ein Büschel von Kegelschnitten verwandt ist, welche mit den Kegelschnitten (KK_1) zusammenfallen müssen. Denn ist $\mathfrak{P}$ ein beliebiger Punkt, durch welchen der Kreis $\mathfrak{K}_\mathfrak{p}$ des Büschels

($\mathfrak{K}\mathfrak{K}'$) geht, so geht durch den verwandten Punkt P der zu $\mathfrak{K}_p$ verwandte Kegelschnitt $\mathfrak{K}_p$, aber auch ein Kegelschnitt K_p aus der Gesamtheit (KK_1). Beide haben die Punkte AA', BB', CC', DD' zu konjugierten Punkten, also müssen sie nach 390. zusammenfallen. Demnach lassen sich alle Kegelschnitte der Gesamtheit (KK_1) in Kreise verwandeln und es ist (KK_1) ein Kegelschnittbüschel.

393. *Irgend zwei Kegelschnitte K und K_1, die keine reellen Schnittpunkte haben, müssen sich in zwei Paaren konjugiert imaginärer Punkte schneiden.*

Denn man kann sie in harmonisch verwandte Beziehung zu zwei Kreisen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$ bringen, die sich auf ihrer Potenzlinie und auf g_∞ in zwei Paaren konjugiert imaginärer Punkte schneiden. Durch diese gehen alle Kreise des Kreisbüschels $(\mathfrak{K}\mathfrak{K}_1)$, die ihnen verwandten Kegelschnitte gehen durch die vier imaginären Schnittpunkte von K und K_1 und bilden *ein Kegelschnittbüschel mit vier imaginären Grundpunkten.* Für dasselbe gelten die Eigenschaften der beiden früher besprochenen Büschel.

a. *Unter allen Kegelschnitten des Büschels giebt es nur einen durch einen bestimmten Punkt.*

b. *In dem Büschel giebt es ein Paar von Geraden, bestehend aus den ideellen Sekanten, welche die Eigenschaft haben, daſs ein Paar konjugierter Punkte in Bezug auf einen Kegelschnitt des Büschels auch konjugiert ist in Bezug auf alle Kegelschnitte desselben. Diese Geraden schneiden sich in einer Ecke des allen Kegelschnitten gemeinsamen Poldreiecks.*

c. *Alle Kegelschnitte eines Büschels schneiden eine Gerade in einer Involution.* (36c.)

d. *Unter allen Kegelschnitten eines Büschels giebt es höchstens zwei, welche eine Gerade berühren.* 36g.

e. *Die Polaren eines Punktes in Bezug auf alle Kegelschnitte eines Büschels schneiden sich in einem Punkte, dem konjugierten Punkte bezüglich des Büschels.* (34.)

f. *Die Pole einer Geraden in Bezug auf die Kegelschnitte des Büschels liegen auf einem Kegelschnitte, welcher auch durch den Scheitel des einzigen Geradenpaares des Büschels geht. Auf*

ihm liegen auch die konjugierten Punkte aller Punkte der Geraden.

Beweis wie in 360.

g. *Zwei Kegelschnitte, von denen der eine ganz aufserhalb des anderen liegt, haben vier reelle Tangenten.*

394. *Die Berührungspunkte aller Tangenten, die sich von einem Punkte der einen ideellen Sekante an die Kegelschnitte des Büschels ziehen lassen, liegen auf einem Kegelschnitte, welcher die andere ideelle Sekante in denjenigen beiden imaginären Punkten schneidet, welche sie mit den Kegelschnitten des Büschels gemein hat.*

Es seien s und s_1 die beiden ideellen Sekanten des Büschels (KK_1) und auf s sei P ein beliebiger Punkt; man stelle eine solche involutorische Verwandtschaft her, dafs der s_1 die g_∞ und dem Büschel (KK_1) ein Büschel von Kreisen $(\mathfrak{K}\mathfrak{K}_1)$ verwandt ist; die verwandte Gerade $\mathfrak{s}$ ist die Potenzlinie des letzteren. Dem Punkte P ist ein Punkt $\mathfrak{P}$ auf ihr verwandt. Die Berührungspunkte der von $\mathfrak{P}$ an $(\mathfrak{K}\mathfrak{K}_1)$ gezogenen Tangenten liegen auf einem Kreise $\mathfrak{M}$, also liegen die verwandten Berührungspunkte auf einem Kegelschnitte M.

Da $\mathfrak{P}$ und g_∞ Pol und Polare für $\mathfrak{M}$ sind, so müssen P und s_1 Pol und Polare für M sein; da ferner $\mathfrak{M}$ die Potenzlinie in zwei Punkten schneidet, die für alle Kreise $(\mathfrak{K}\mathfrak{K}_1)$ konjugiert sind, so mufs auch M die Sekante s in zwei solchen Punkten schneiden, die für alle Kegelschnitte (KK_1) konjugiert sind.

Der Kreis $\mathfrak{M}$ geht durch die Kreispunkte auf g_∞, also mufs M durch die verwandten Punkte auf s_1 gehen; diese sind aber die Doppelpunkte der Involution konjugierter Punkte bezüglich aller Kegelschnitte des Büschels (KK_1).

395. Der Satz in 394. ist nur für den Fall eines Kegelschnittbüschels mit vier imaginären Grundpunkten bewiesen. Um ihn auch für den Fall abzuleiten, dafs zwei Grundpunkte reell und zwei imaginär sind, mufs man auf die Eigenschaften der Kreisbüschel zurückgehen.

Die Kreise $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$, welche keinen gemeinschaftlichen Punkt haben sollen, konstituieren ein Büschel $(\mathfrak{K}\mathfrak{K}_1)$ mit der

Potenzlinie $\mathfrak{p}$ und der Centrale $\mathfrak{m}$; die Kreise des konjugierten Büschels $(\mathfrak{M}\mathfrak{M}_1)$ haben $\mathfrak{p}$ zur Centrale (33) und schneiden $\mathfrak{m}$ in denjenigen beiden Punkten $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$, welche die auf $\mathfrak{m}$ liegenden Durchmesser harmonisch teilen. Nimmt man $\mathfrak{Q}$ zum Centrum einer harmonischen Verwandtschaft und legt die Axe $\mathfrak{q}$ durch $\mathfrak{R}$ parallel zu $\mathfrak{p}$, so sind die Kreise des Büschels $(\mathfrak{K}\mathfrak{K}_1)$ sich selbst verwandt, denn $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{q}$ sind für alle diese Kreise Pol und Polare. Der Potenzlinie $\mathfrak{p}$ ist g_∞ verwandt, denn $\mathfrak{p}$ halbiert senkrecht die Strecke $\mathfrak{Q}\mathfrak{R}$ und den Kreisen des Büschels $(\mathfrak{M}\mathfrak{M}_1)$ sind Kegelschnitte verwandt. Der Kreis um $\mathfrak{M}$ geht durch die Berührungspunkte der von $\mathfrak{M}$ an die Kreise des Büschels $(\mathfrak{K}\mathfrak{K}_1)$ gezogenen Tangenten und durch die Punkte $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$, also geht der ihm verwandte Kegelschnitt M durch die Berührungspunkte der aus dem auf g_∞ liegenden und zu $\mathfrak{M}$ verwandten Punkte M_∞ an die Kegelschnitte $(\mathfrak{K}\mathfrak{K}_1)$ gezogenen Tangenten. Da der Kreis $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{p}$ in zwei reellen Punkten geschnitten wird, so ist der verwandte Kegelschnitt M eine Hyperbel. Der Kreis $\mathfrak{M}$ werde von $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ geschnitten; der Pol von $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ in Bezug auf $\mathfrak{M}$ ist der Schnittpunkt $\mathfrak{P}_\infty$ von g_∞ mit der Centrale $\mathfrak{m}$; der ihm verwandte Punkt ist der Halbierungspunkt O von $\mathfrak{Q}\mathfrak{R}$ und da g_∞ und $\mathfrak{p}$ oder $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ verwandte Gerade sind, so mufs O der Mittelpunkt der Hyperbel M sein. Die Geraden $\mathfrak{Q}\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{Q}\mathfrak{B}$ stehen aufeinander senkrecht; sie sind sich selbst verwandt und schneiden g_∞ in ihren beiden Schnittpunkten A_∞ und B_∞ mit M. Also sind die Geraden OA_∞ und OB_∞ die Asymptoten der Hyperbel M und weil sie aufeinander senkrecht stehen, ist die Hyperbel eine gleichseitige.

Von dem auf g_∞ liegenden Punkte M_∞ sei eine Tangente an einen Kreis des Büschels $(\mathfrak{K}\mathfrak{K}_1)$, etwa $\mathfrak{K}_o$ gezogen und berühre in $\mathfrak{C}_o$. Durch $\mathfrak{C}_o$ geht ein Kreis des Büschels $(\mathfrak{M}\mathfrak{M}_1)$, etwa $\mathfrak{M}_o$ und da $\mathfrak{K}_o$ und $\mathfrak{M}_o$ sich rechtwinklig schneiden, so berührt $\mathfrak{M}_o$ in $\mathfrak{C}_o$ die zur Tangente $M_\infty\mathfrak{C}_o$ gezogene Senkrechte, welche g_∞ in M'_∞ schneidet. Die Gerade $M'_\infty\mathfrak{C}_o$ ist Tangente des Kreises $\mathfrak{M}_o$. Daraus folgt also, dafs die Berührungspunkte der von M_∞ an die Kreise des Büschels $(\mathfrak{K}\mathfrak{K}_1)$ gezogenen Tangenten mit den Berührungspunkten der von M'_∞ an die Kreise des Büschels $(\mathfrak{M}\mathfrak{M}_1)$ gezogenen Tangenten zu-

sammenfallen. Denn alle Tangenten von M_∞ sind einander parallel und ebenso alle von M'_∞ und die Richtung der letzteren ist rechtwinklig zu derjenigen der ersteren.

Alle Kreise $(\mathfrak{M}\mathfrak{M}_1)$ gehen durch die beiden auf g_∞ liegenden Kreispunkte, also müssen alle verwandten Hyperbeln (MM_1) durch die diesen verwandten Punkte auf $\mathfrak{p}$ gehen, d. h. die Involution auf $\mathfrak{p}$, welche der Involution konjugierter Punkte auf g_∞ in Bezug auf irgend einen Kreis verwandt ist, als Involution konjugierter Punkte haben. Alle gleichseitigen Hyperbeln (MM_1) bilden also ein Büschel mit zwei imaginären und zwei reellen Grundpunkten $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$.

Man hat also das Resultat:

Zieht man von einem im Unendlichen gelegenen Punkte Tangenten an die Kreise eines Büschels, so liegen die Berührungspunkte auf einer gleichseitigen Hyperbel. Durchläuft jener Punkt die unendlich ferne Gerade g_∞, so durchläuft die gleichseitige Hyperbel ein Büschel mit zwei reellen und zwei imaginären Schnittpunkten. Diese sind die Doppelpunkte der Involutionen, welche das Kreisbüschel und das ihm konjugierte Kreisbüschel auf der Centrale und Potenzlinie des ersteren bestimmen. Zieht man aus den Punkten eines Paares derjenigen Involution auf g_∞, welche die konjugierten Punkte bezüglich irgend eines Kreises auf derselben bilden, Tangenten und zwar von dem einen Punkte an das urprüngliche, von dem andern an das konjugierte Kreisbüschel, so liegen alle Berührungspunkte auf derselben gleichseitigen Hyperbel.

Daraus aber ergiebt sich vermittelst einer harmonischen Verwandtschaft:

Zieht man von einem Punkte M einer der beiden gemeinschaftlichen Sekanten eines Kegelschnittbüschels (B) mit zwei reellen und zwei imaginären Schnittpunkten Tangenten an die Kegelschnitte des Büschels, so liegen die Berührungspunkte auf einem Kegelschnitte. Durchläuft M die gemeinsame Sekante, so durchläuft dieser Kegelschnitt ein Büschel mit zwei reellen und zwei imaginären Grundpunkten. Ist (S) das Büschel, welches man erhält, wenn M die reelle Sekante durchläuft, und sind A und A' zwei konjugierte Punkte auf der ideellen Sekante bezüglich des Büschels (B), so liegen die Berührungspunkte der Tangenten

von A an die Kegelschnitte des letzeren mit denjenigen von A' an die des Büschels (S) auf demselben Kegelschnitte.

396. *Unter den Kegelschnitten eines Büschels mit vier reellen Grundpunkten, von denen keiner innerhalb des von den anderen gebildeten Dreieckes liegt, giebt es eine Gruppe von Ellipsen, zwei Parabeln und eine Gruppe von Hyperbeln, in welcher eine einzige gleichseitige Hyperbel vorkommt.*

Die Gegenseitenpaare eines konvexen Vierecks $ABCD$ mögen sich in E und F schneiden. Zieht man durch F zu EA und ED Parallelen, so liegen sie aufserhalb des Winkels AFB und die Gegenseitenpaare schneiden daher jede, also auch die unendlich ferne Gerade, in zwei Punktpaaren, welche eine Involution mit reellen Doppelpunkten konstituieren. Da diese Involution mit derjenigen identisch ist, in welcher die Kegelschnitte des Büschels $K(ABCD)$ die unendlich ferne Gerade schneiden (356), so ergiebt sich zunächst, dafs es unter den Kegelschnitten des Büschels unendlich viele Hyperbeln und zwei Parabeln giebt, deren Berührungspunkte mit g_∞ die Doppelpunkte der Involution auf g_∞ sind.

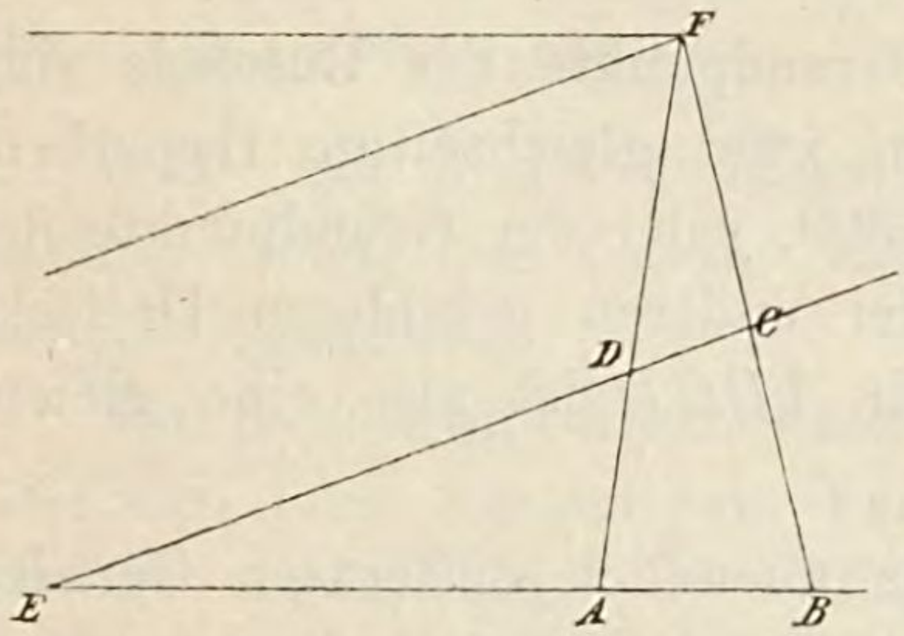


Fig. 157.

Ist H der Schnittpunkt der Höhen in einem der Dreiecke, deren Ecken irgend drei von den Ecken des Vierecks sind, so geht durch ihn ein Kegelschnitt des Büschels, der nach 194. und 309. eine gleichseitige Hyperbel sein mufs und daher auch durch die Höhenpunkte der anderen Dreiecke geht.

Alle diejenigen Kegelschnitte, welche g_∞ nicht treffen, sind Ellipsen.

397. *Die Kegelschnitte eines Büschels mit vier reellen Grundpunkten, von denen einer innerhalb des von den anderen gebildeten Dreiecks liegt, sind lauter Hyperbeln. Unter ihnen giebt es eine gleichseitige.*

Sind $ABCD$ vier Punkte einer Ellipse oder Parabel, so liegt jeder aufserhalb des von den drei anderen gebildeten

Dreiecks, da jedes einer Ellipse oder Parabel eingeschriebene Dreieck ganz innerhalb des Kegelschnittes liegt. Daher giebt es in dem Büschel, dessen Grundpunkte ein konkaves Viereck bilden, nur Hyperbeln, unter denen eine gleichseitige vorkommt (194. 309), welche durch die Höhenpunkte der vier Dreiecke geht, deren Ecken je drei von den Grundpunkten sind.

398. *Sind in einem Kegelschnittbüschel mit vier reellen Grundpunkten zwei gleichseitige Hyberbeln enthalten, so besteht es aus lauter gleichseitigen Hyperbeln, deren Mittelpunkte sämtlich auf einem Kreise liegen.*

Wenn $ABCD$ die vier Grundpunkte des Büschels sind und es kommen in demselben zwei gleichseitige Hyperbeln vor, so mufs nach 194. und 309. jeder der Grundpunkte der Höhenpunkt des von den drei anderen gebildeten Dreiecks sein. Jeder Kegelschnitt durch $ABCD$ ist also eine gleichseitige Hyperbel.

Der Polarkegelschnitt der unendlich entfernten Geraden g_∞ geht (cf. 360) durch die Scheitel der drei Geradenpaare des Büschels, welche hier die Höhenfufspunkte sind, und durch die Mitten der Verbindungsstrecken, also durch die Mitten der Seiten und die Mitten derjenigen Abschnitte der Höhen, welche durch die Ecken begrenzt sind. Diese neun Punkte liegen aber auf dem Feuerbachschen Kreise, welcher somit die Mittelpunkte aller gleichseitigen Hyperbeln enthält.

399. *Ein Kegelschnittbüschel mit zwei reellen und zwei imaginären Grundpunkten enthält entweder lauter Hyperbeln oder eine Gruppe von Ellipsen zwei Parabeln und eine Gruppe von Hyperbeln, in jedem Falle aber eine gleichseitige Hyperbel.*

Ein Büschel von Kegelschnitten mit zwei reellen und zwei imaginären Grundpunkten läfst sich durch harmonische Verwandtschaft stets in ein Kreisbüschel verwandeln. Die Mittellinie m der Verwandtschaft schneidet entweder die gemeinschaftliche Sehne selbst oder ihre Verlängerung.

Im ersten Falle wird sie von allen Kreisen des Büschels getroffen und da ihr die unendlich ferne Gerade g_∞ verwandt ist, so schneidet diese jeden Kegelschnitt des Büschels; also sind alle Kegelschnitte desselben Hyperbeln.

Im zweiten Falle wird m von einer Gruppe der Kreise geschnitten, von zwei Kreisen berührt, von einer andern Gruppe nicht getroffen. Diesen Gruppen sind verwandt eine Gruppe von Hyperbeln, zwei Parabeln, eine Gruppe von Ellipsen.

Verbindet man das Centrum S der Verwandtschaft mit den Schnittpunktpaaren der Kreise und der Mittellinie m, so erhält man in S eine Involution. Diese hat ein rechtwinkliges Strahlenpaar. Den Paaren zugeordneter Strahlen der Involution sind die Asymptoten der Hyperbeln parallel; da es nur ein rechtwinkliges Strahlenpaar giebt, so giebt es auch nur eine gleichseitige Hyperbel.

400. *Ein Kegelschnittbüschel mit vier imaginären Grundpunkten enthält eine Gruppe Ellipsen, zwei Parabeln und eine Gruppe Hyperbeln.*

Ein Kegelschnittbüschel mit vier imaginären Grundpunkten läfst sich durch harmonische Verwandtschaft stets in ein Kreisbüschel verwandeln. Die Mittellinie m der Verwandtschaft trifft nur einen Teil der Kreise, also wird die ihr verwandte unendlich ferne Gerade auch nur von einem Teile der Kegelschnitte des Büschels getroffen. Diese Kegelschnitte sind also Hyperbeln, welche auf g_∞ eine Involution bestimmen, die zwei reelle Doppelpunkte hat, denn m wird von den Kreisen des Büschels in einer Involution geschnitten, die stets zwei reelle Doppelpunkte hat. In den Doppelpunkten wird g_∞ von zwei Parabeln des Büschels berührt. Denjenigen Kreisen, welche m nicht treffen, sind Ellipsen des Büschels verwandt.

401. *Wenn in einem Kegelschnittbüschel ein Kreis vorkommt, so stehen die Axen der beiden Parabeln des Büschels auf einander senkrecht.*

I. Fall. Das Büschel hat vier reelle Grundpunkte $ABCD$. Fig. 158.

Die beiden Gegenseitenpaare AB, CD und AD, BC schneiden sich in E und F; zieht man $FG \parallel AB$ und $FH \parallel CD$, so ist

$$\sphericalangle CFG = CDA = 180^0 - B$$
$$\sphericalangle DFH = \quad B \quad = 180^0 - CDA,$$

also

$$\sphericalangle CFG + DFH = 180^0.$$

Halbiert man die Winkel GFH und AFB durch FJ und FK so folgt aus:

$$\sphericalangle GFH + 2HFD + DFC = 180^0$$

dafs

$$\sphericalangle JFH + HFD + DFK = 90^0.$$

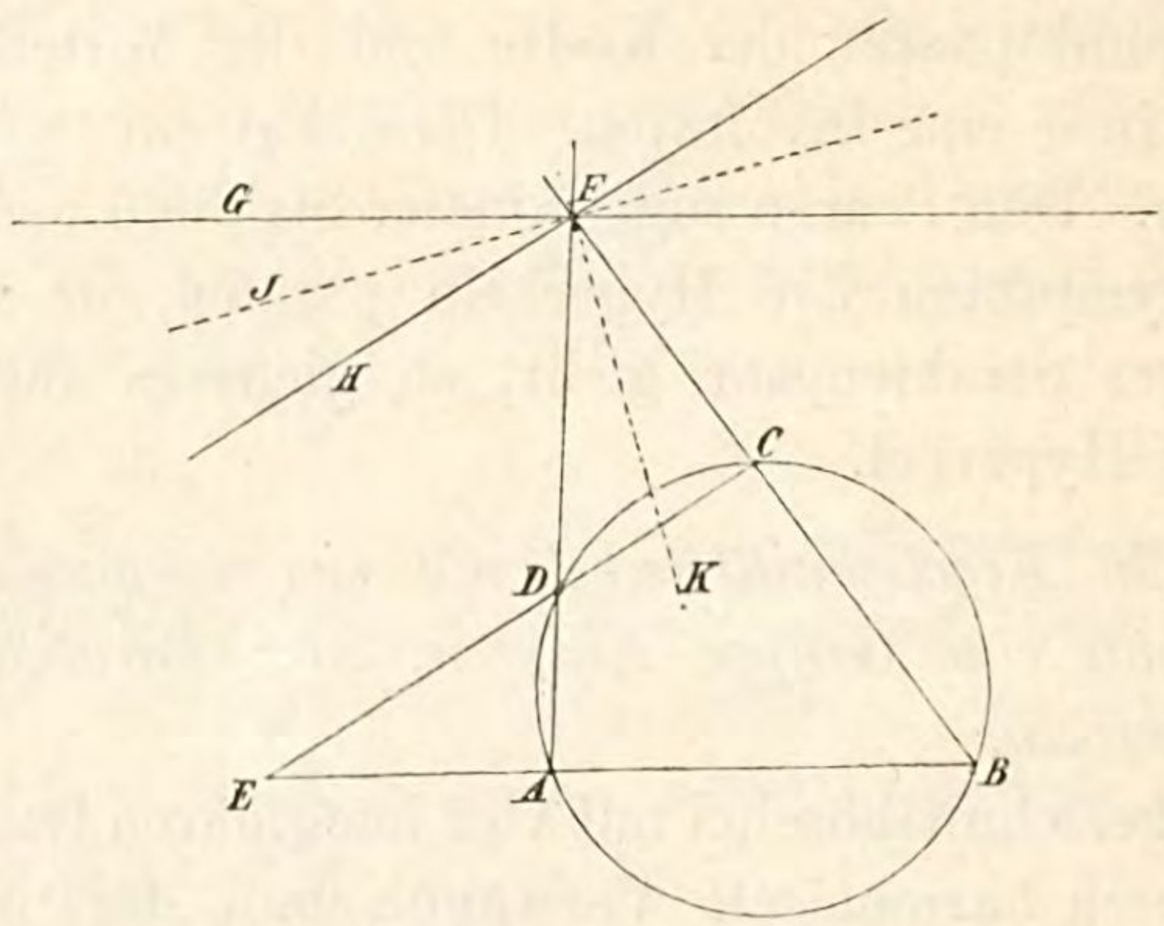


Fig. 158.

Also sind $F(JKGH)$ und $F(JKCD)$ harmonisch. Die rechtwinkligen Geraden FJ und FK schneiden daher g_∞ in den Doppelpunkten derjenigen Involution, welche die Kegelschnitte des Büschels auf ihr bestimmen, und sind den Axen der beiden Parabeln parallel.

II. Fall. Das Büschel hat zwei oder vier imaginäre Grundpunkte.

Man verwandle das Büschel in ein Büschel von Kreisen durch eine harmonische Verwandtschaft mit dem Centrum S und der Axe s. Soll in dem Kegelschnittbüschel ein Kreis vorkommen, so müssen S und s für diesen Kreis Pol und Polare sein. Die Mittellinie m der Verwandtschaft wird von der Potenzlinie des Kreisbüschels in Q getroffen, dem Centralpunkte der Involution, welche die Kreise des Büschels auf m bestimmen. Um die Doppelpunkte dieser Involution zu konstruieren, ziehe man von Q an einen der Kreise des Büschels eine Tangente QC und beschreibe mit ihr um Q einen Kreis. Dieser schneidet m in den Doppelpunkten M und N.

Wenn man S als einen Punktkreis betrachtet, so konstituieren S und der Kreis O ein Kreisbüschel, dessen Mittel-

linie m ist. Daher ist $QC = QS$ und der vorhin mit QC um Q beschriebene Kreis geht auch durch S und es sind die Geraden MS und NS rechtwinklig zu einander.

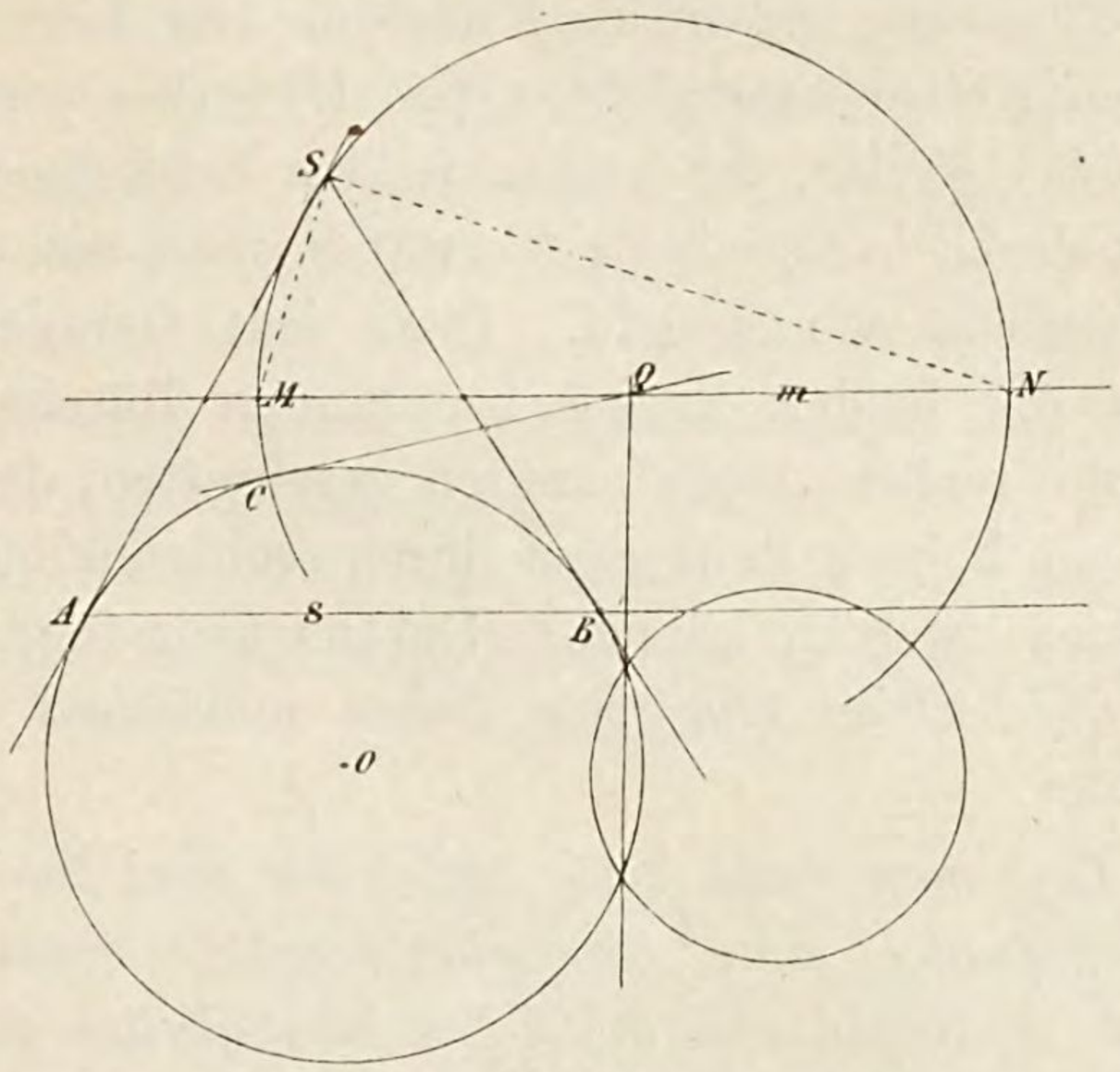


Fig. 159.

In der harmonischen Verwandtschaft (Ss) sind sie sich selbst verwandt und treffen g_∞ in den Doppelpunkten der Involution, welche die Kegelschnitte des Büschels auf g_∞ bestimmen; sie sind deshalb die Axen der Parabeln des Büschels.

402. *Wenn in einem Kegelschnittbüschel mit imaginären Grundpunkten zwei gleichseitige Hyperbeln vorkommen, so besteht es aus lauter gleichseitigen Hyperbeln.*

I. Die Hyperbeln des Büschels schneiden g_∞ in den Punktpaaren einer Involution; dieselbe Involution erhält man auch, wenn man von einem beliebigen Punkte Parallelen zu den Asymptoten zieht. Da zwei Paar solcher Parallelen rechtwinklig sind, so wird die Strahleninvolution aus lauter rechtwinkligen Paaren, das Kegelschnittbüschel aus lauter gleichseitigen Hyperbeln bestehen.

II. Um ein Büschel gleichseitiger Hyperbeln aus einem Kreisbüschel mit zwei reellen Grundpunkten durch harmonische Verwandtschaft zu erhalten, schneide man das Kreisbüschel durch eine Gerade m, welche zwischen den beiden reellen Grundpunkten hindurchgeht. Man erhält dadurch auf m eine

Involution mit imaginären Doppelpunkten und daher giebt es einen Punkt S, aus welchem die Punktpaare der Involution durch rechtwinklige Strahlenpaare projiciert werden. Nimmt man S als Centrum und m als Mittellinie der Verwandtschaft, so ist jedem Kreise eine gleichseitige Hyperbel verwandt.

III. Zwei Kreise, die keinen reellen Schnittpunkt haben, lassen sich durch harmonische Verwandtschaft nicht in gleichseitige Hyperbeln verwandeln. Denn jede Gerade wird von dem durch die beiden Kreise bestimmten Büschel in einer Involution mit reellen Doppelpunkten geschnitten, deren Punktpaare also von keinem Punkte aus durch rechtwinklige Strahlenpaare projiciert werden können. Daraus aber folgt:

Zwei gleichseitige Hyperbeln haben mindestens zwei reelle Schnittpunkte.

403. *Legt man durch zwei reelle oder zwei konjugiert imaginäre Grundpunkte eines Kegelschnittbüschels einen beliebigen Kegelschnitt, so treffen sich die reellen oder ideellen gemeinschaftlichen Sekanten, welche seine beiden anderen Schnittpunkte mit den Kegelschnitten des Büschels verbinden, in einem Punkte derjenigen gemeinschaftlichen Sekante des Büschels, welche durch die anderen Grundpunkte geht.*

Es seien $K_1 K_2 K_3 \ldots$ die Kegelschnitte des Büschels, ss' zwei solche gemeinschaftliche Sekanten, welche einen Kegelschnitt des Büschels bilden. Durch die beiden auf s liegenden reellen oder imaginären Grundpunkte des Büschels lege man einen Kegelschnitt K_0, welcher mit den Kegelschnitten $K_1 K_2 K_3 \ldots$ noch die reellen oder ideellen gemeinschaftlichen Sekanten $s_{01} s_{02} s_{03} \ldots$ gemein hat; so dafs die Geradenpaare ss_{01}, ss_{02}, $ss_{03}, \ldots$ Kegelschnitte der Büschel $(K_0 K_1)$, $(K_0 K_2)$, $(K_0 K_3), \ldots$ sind.

Die Sekante s_{01} schneide s' in P'; durch P' lege man eine Gerade g, welche die Kegelschnitte

$$K_0, \quad K_1, \quad K_2, \quad K_3, \ldots$$

und die Sekante s

in $$Q_0 Q_0', \; Q_1 Q_1', \; Q_2 Q_2', \; Q_3 Q_3', \ldots$$

und in P

schneidet. Dann sind

$$PP', \; Q_0 Q_0', \; Q_1 Q_1'; \quad PP', \; Q_1 Q_1', \; Q_2 Q_2'; \quad PP', \; Q_1 Q_1', \; Q_3 Q_3'; \ldots$$

je drei Punktpaare einer Involution, also liegt P' auch auf $s_{02}, s_{03}, \ldots$

404. *Legt man aus zwei konjugierten Punkten P und P_1 einer reellen oder ideellen gemeinschaftlichen Sekante eines Kegelschnittbüschels Tangenten an die Kegelschnitte desselben, so liegen die Berührungspunkte auf zwei Kegelschnitten π und π_1, welche jede durch P oder P_1 gelegte Gerade in vier harmonischen Punkten schneiden, so daſs sowohl die Schnittpunkte mit π als diejenigen mit π_1 zugeordnet sind.*

I. Es seien P und P_1 zwei konjugierte Punkte der ideellen Sekante s eines Kegelschnittbüschels $(KK_1K_2\ldots)$ mit vier imaginären Grundpunkten.

Man verwandle durch harmonische Verwandtschaft das Kegelschnittbüschel in ein Kreisbüschel $(\mathfrak{K}\mathfrak{K}_1\mathfrak{K}_2\ldots)$. Den Punkten

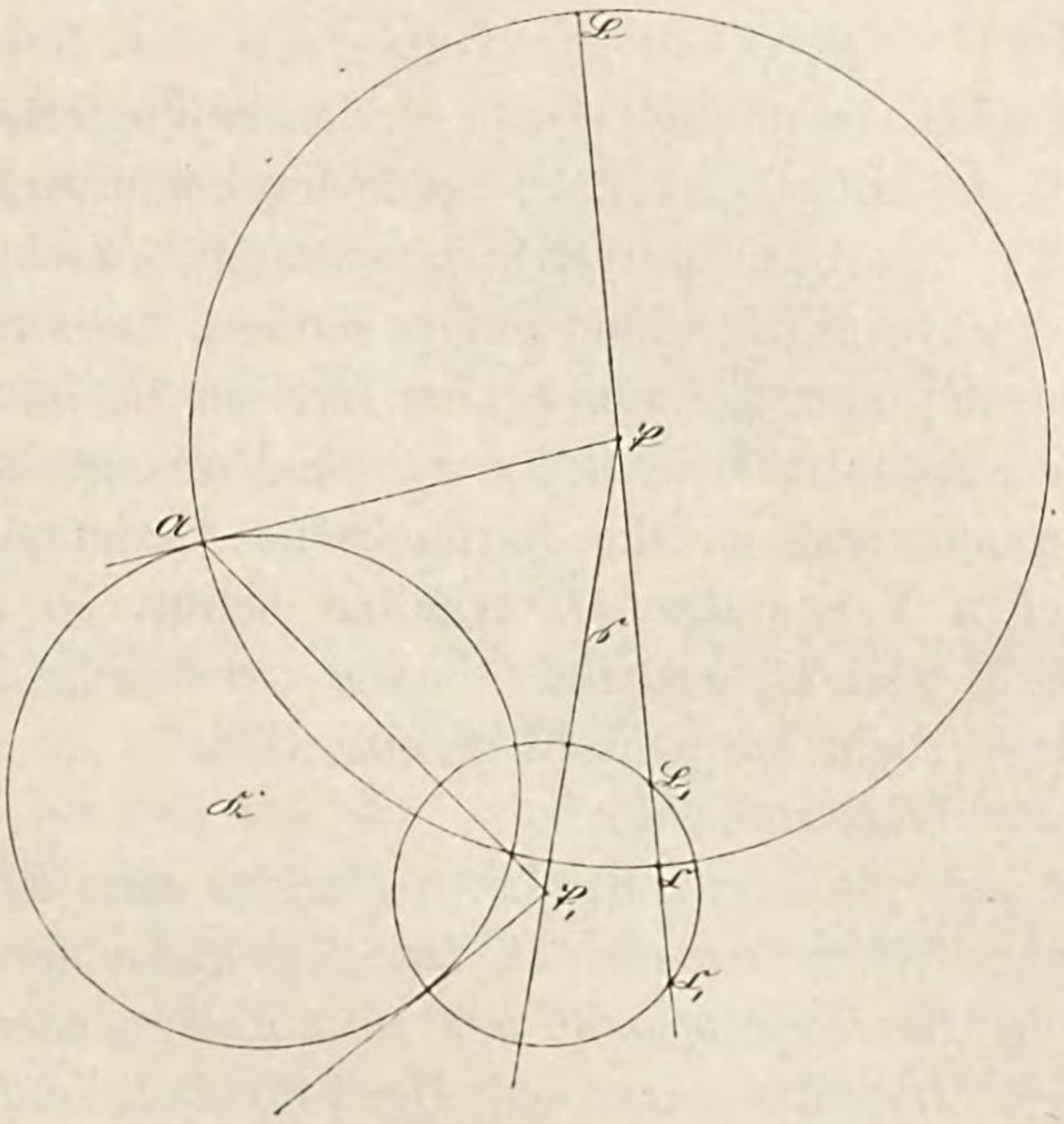


Fig. 160.

P und P_1 sind die bezüglich des Kreisbüschels konjugierten Punkte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$ verwandt, welche auf einer ideellen Sekante desselben liegen müssen, entweder auf der endlichen Sekante, d. i. der Potenzlinie oder auf der unendlich fernen Geraden.

Zunächst werde angenommen, daſs $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$ auf der endlichen Sekante $\mathfrak{s}$ liegen. Um $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$ beschreibe man diejenigen beiden Kreise, welche die Kreise des Büschels recht-

winklig schneiden. Da nun auf einer beliebig durch $\mathfrak{P}$ gezogenen Geraden $\mathfrak{P}\mathfrak{A}^2 = \mathfrak{P}\mathfrak{B}^2 = \mathfrak{P}\mathfrak{C}^2 = \mathfrak{P}\mathfrak{B}_1 . \mathfrak{P}\mathfrak{C}_1$, weil die Polare von $\mathfrak{P}_1$ bezüglich $\mathfrak{K}$ durch $\mathfrak{P}$ und die Schnittpunkte der Kreise $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{P}_1$ geht, so sind $\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1$ harmonische Punkte.

Wenn $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$ auf g_∞ liegen, so konstruiere man auf der Centrale des Kreisbüschels diejenigen beiden Punkte $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$, welche bezüglich des Büschels konjugiert sind, wähle einen von ihnen, etwa $\mathfrak{Q}$, zum Centrum und die Potenzlinie $\mathfrak{s}$ zur Mittellinie einer harmonischen Verwandtschaft, so sind die Kreise $\mathfrak{K}\mathfrak{K}_1 \ldots$ sich selbst verwandt, denn Centrum und Axe der Verwandtschaft sind Pol und Polare für alle Kreise des Büschels $(\mathfrak{K}\mathfrak{K}_1)$, sollen aber mit $\mathfrak{K}'\mathfrak{K}_1' \ldots$ bezeichnet werden. Das Büschel $(\mathfrak{K}'\mathfrak{K}_1')$ hat zur Potenzlinie die der unendlich fernen Geraden verwandte Gerade $\mathfrak{s}'$; den konjugierten Punkten $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$ des Büschels $(\mathfrak{K}\mathfrak{K}')$ sind die konjugierten Punkte $\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{P}_1'$ des Büschels $(\mathfrak{K}'\mathfrak{K}_1')$ verwandt. Zieht man um diese die rechtwinklig schneidenden Kreise, so wird jede Gerade durch $\mathfrak{P}'$ oder $\mathfrak{P}_1'$ von beiden Kreisen in harmonischen Punkten geschnitten. Diesen Kreisen sind gleichseitige Hyperbeln verwandt und da die harmonische Beziehung bei der harmonischen Verwandtschaft erhalten bleibt, so folgt, dafs jede durch $\mathfrak{P}$ oder $\mathfrak{P}_1$ gezogene Gerade von den beiden gleichseitigen Hyperbeln harmonisch geteilt wird.

Hieraus folgt zunächst:

Zieht man von zwei konjugierten Punkten eines Kreisbüschels, welches keine reellen Grundpunkte hat, Tangenten an die Kreise, so liegen die Berührungspunkte auf zwei Kreisen oder auf zwei gleichseitigen Hyperbeln von der Beschaffenheit, dafs sie jede durch einen der beiden Punkte gelegte Gerade in vier harmonischen Punkten schneiden.

Hieraus aber folgt für den Fall von vier imaginären Grundpunkten eines Kegelschnittbüschels der Satz.

II. Es seien im zweiten Falle P und P_1 zwei auf der ideellen Sekante liegende konjugierte Punkte eines Kegelschnittbüschels (KK_1) mit zwei reellen Grundpunkten A und B. Diesem sei ein Kreisbüschel $(\mathfrak{K}\mathfrak{K}_1)$ mit den reellen Grundpunkten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ harmonisch verwandt. Zieht man aus einem

der verwandten Punkte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$, die im Unendlichen liegen müssen, etwa aus $\mathfrak{P}_1$ Tangenten an die Kreise des Büschels, so liegen die Berührungspunkte auf einer gleichseitigen Hyperbel. Man erhält diese aber auch als Ort der Berührungspunkte der an die Kreise des konjugierten Büschels $(\mathfrak{M}\mathfrak{M}_1)$ gelegten Tangenten. Denn ist $\mathfrak{C}$ der Berührungspunkt der Tangente $\mathfrak{P}\mathfrak{C}$ an $\mathfrak{K}$, so giebt es im Büschel $(\mathfrak{M}\mathfrak{M}_1)$ einen Kreis $\mathfrak{M}$, welcher $\mathfrak{K}$ in $\mathfrak{C}$ rechtwinklig schneidet, also $\mathfrak{P}_1\mathfrak{C}$ zur Tangente hat. Das Büschel $(\mathfrak{M}\mathfrak{M}_1)$ hat keine Grundpunkte, also wird jede durch $\mathfrak{P}$ oder $\mathfrak{P}_1$ gelegte Gerade von den beiden Hyperbeln harmonisch geschnitten.

Daraus folgt zunächst für Kreisbüschel:

Zieht man aus zwei im Unendlichen liegenden konjugierten Punkten eines Kreisbüschels mit reellen Grundpunkten Tangenten an die Kreise, so liegen die Berührungspunkte auf zwei gleichseitigen Hyperbeln, welche jede durch einen der beiden Punkte gelegte Gerade harmonisch schneiden.

Mittelst der harmonischen Verwandtschaft folgt hieraus der oben aufgestellte Satz für Kegelschnittbüschel mit zwei reellen und zwei imaginären Grundpunkten.

§ 26.

Die Kegelschnittschar mit zwei und vier imaginären Tangenten.

405. *Es giebt stets zwei reelle Punkte, denen bei zwei Kegelschnitten mit zwei oder vier imaginären gemeinschaftlichen Tangenten dieselbe Involution konjugierter Strahlen angehört.*

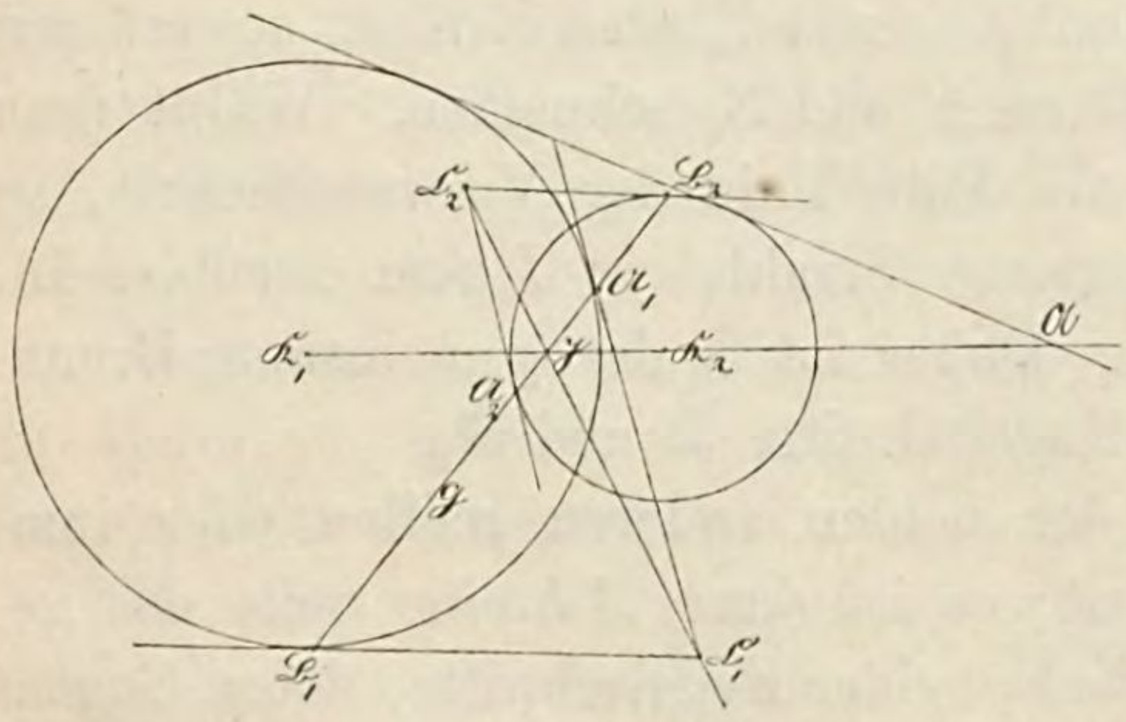


Fig. 161.

Zwei beliebige Kegelschnitte K_1 und K_2 verwandle man durch harmonische Verwandtschaft in zwei Kreise $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$. Diese haben zwei Ähnlichkeitspunkte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}$, in denen sich die reellen oder imaginären Tangenten

schneiden. Die verwandten Punkte A und J haben dieselbe Involution konjugierter Strahlen für beide Kegelschnitte.

Es sei g eine beliebige Gerade durch J, $\mathfrak{g}$ die verwandte Gerade durch $\mathfrak{J}$; sie schneide die Kreise $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ in $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2$. Die Tangenten in diesen Punkten treffen sich in $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$. Da $\mathfrak{J}$ ein Ähnlichkeitspunkt beider Kreise ist, so ist $\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_1 \parallel \mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1 \parallel \mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2$ und deshalb sind $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ ähnlich liegende Punkte, also $\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2\mathfrak{J}$ in einer Geraden. Diese ist aber die konjugierte Gerade $\mathfrak{g}_1$ zu $\mathfrak{g}$ bezüglich beider Kreise $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$. Ihr ist die zu g bezüglich beider Kegelschnitte konjugierte Gerade g_1 verwandt.

406. Alle Kegelschnitte, welche in zwei festen Punkten dieselbe Involution konjugierter Strahlen haben, bilden eine *Kegelschnittschar*.

Dieselbe hat vier reelle oder zwei reelle und zwei imaginäre oder vier imaginäre gemeinschaftliche Tangenten, jenachdem die beiden Involutionen zwei oder nur eine oder keine reellen Doppelstrahlen haben.

Zwei beliebige Kegelschnitte bestimmen eine Schar. (405.)

407. *Zwei Kegelschnitte, welche zwei oder vier imaginäre Tangenten haben, kann man durch harmonische Verwandtschaft in konfokale Kegelschnitte mit derselben Lage der Hauptaxe verwandeln.*

Ist J ein Schnittpunkt zweier konjugiert-imaginären gemeinschaftlichen Tangenten, so hat er für beide Kegelschnitte K und K_1 nach 405. dieselbe Involution konjugierter Strahlen. Schneidet man diese durch eine beliebige Gerade g in den Punktpaaren einer Punktinvolution und beschreibt über den Abständen je zweier Punkte eines Paares Kreise, so müssen sich diese in zwei Punkten S und S_1 schneiden. Wählt man S als Centrum und g als Mittellinie der Verwandtschaft, so ist der Involution konjugierter Strahlen in J eine circulare Involution in $\mathfrak{J}$ verwandt. Daher ist $\mathfrak{J}$ der gemeinsame Brennpunkt der verwandten Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$.

Der Schnittpunkt der beiden anderen reellen oder imaginären Tangenten sei A; es ist dann AJ eine Seite des gemeinschaftlichen Poldreiecks beider Kegelschnitte, deren Gegenecke P sei. Legt man die Mittellinie g der Verwandtschaft

durch P, so fällt der verwandte Punkt $\mathfrak{P}$ ins Unendliche und weil die konjugierten Strahlen $\mathfrak{J}\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}\mathfrak{P}$ aufeinander senkrecht stehen, so wird $\mathfrak{J}\mathfrak{A}$ die gemeinschaftliche Hauptaxe von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$.

408. *Die Pole einer Geraden g in Bezug auf alle konfokalen Kegelschnitte die ihre Hauptaxen auf derselben Geraden haben, liegen auf einer Geraden g_1.*

I. K_1 und K_2 seien zwei konfokale Kegelschnitte mit dem gemeinschaftlichen Brennpunkte B und gemeinschaftlicher

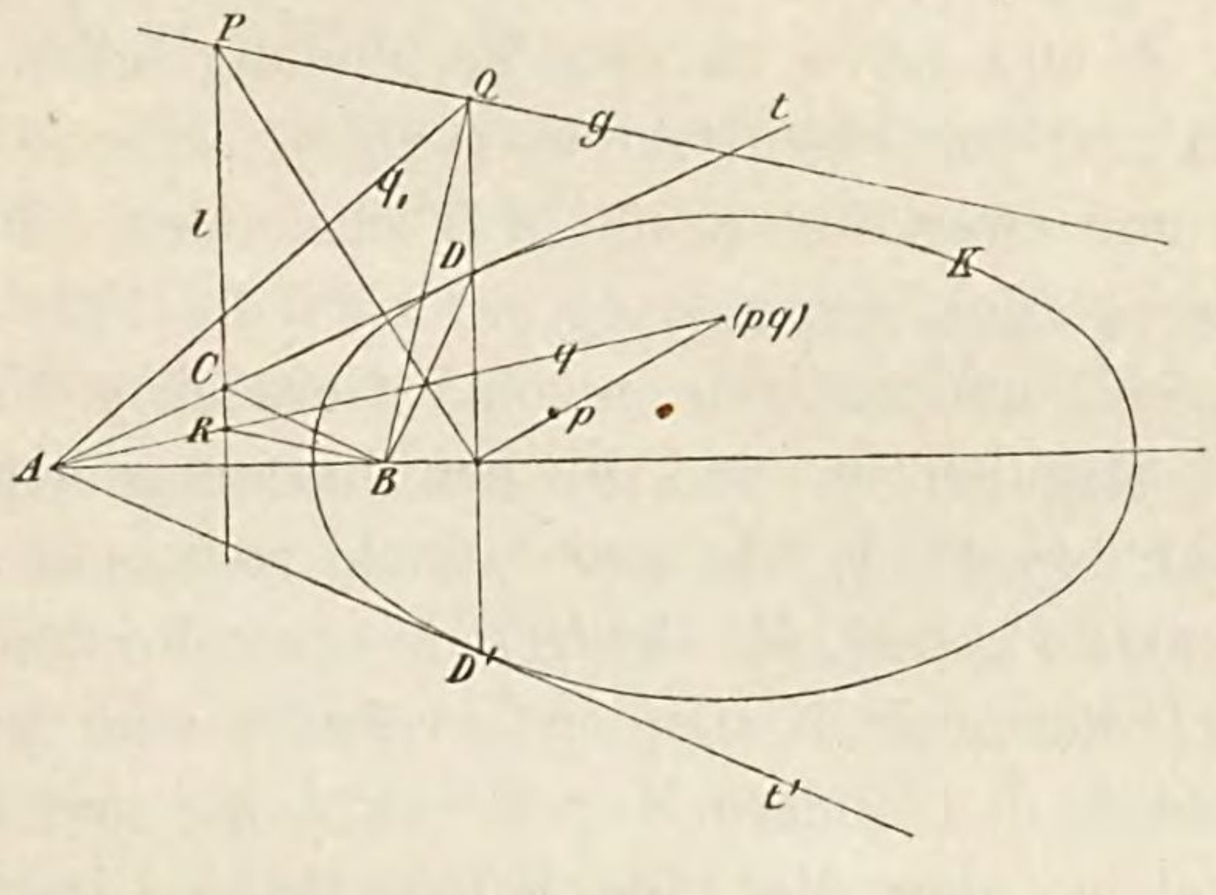


Fig. 162.

Hauptaxe. Sie mögen noch zwei reelle gemeinschaftliche Tangenten t und t' haben, die sich in A auf der Hauptaxe schneiden.

Senkrecht gegen die Hauptaxe lege man beliebig die Gerade l und nehme sie als Leitlinie eines Kegelschnittes K, der B zum Brennpunkte und tt' zu Tangenten hat. Eine dieser Tangenten t schneide l in C; zieht man CB und in B die Senkrechte zu CB, so trifft sie t im Berührungspunkte D mit K. Den Berührungspunkt D' auf t' erhält man, wenn man $AD' = AD$ macht.

Legt man l_o durch B senkrecht zur Hauptaxe, so fallen die Berührungspunkte D_o und D_o' mit A zusammen und der Kegelschnitt K_o degeneriert in das Punktpaar (AB).

Es seien l_m und l_n zwei zur Hauptaxe senkrechte Leitlinien, welche die Kegelschnitte K_m und K_n bestimmen, so gewählt, dafs sie l und l_o harmonisch trennen.

Eine Gerade g schneide $l_o l l_m l_n$ in $P_o P P_m P_n$ und die Berührungssehnen mit tt' in $Q_o Q Q_m Q_n$, so sind $P_o P P_m P_n$ sowie $Q_o Q Q_m Q_n$ harmonisch. Zu beachten ist, dafs Q_o der Schnittpunkt von g mit der in A errichteten Senkrechten ist.

Man erhält die Polaren von $P_o P P_m P_n$ in Bezug auf $K_o K K_m K_n$, indem man diese Punkte mit B verbindet und auf den Verbindungslinien in B die Senkrechten $p_o p p_m p_n$ errichtet, die auch harmonisch sind und von denen p_o mit AB zusammenfällt. — Um bezüglich derselben Kegelschnitte die Polaren von $Q_o Q Q_m Q_n$ zu konstruieren, verbinde man diese Punkte mit A und suche zu den Verbindungslinien bezüglich tt' die harmonischen Gegenstrahlen $q_o q q_m q_n$, so sind auch diese harmonisch und zwar fällt q_o mit AB zusammen. Die Schnittpunkte $(p_o q_o)$, (pq), $(p_m q_m)$, $(p_n q_n)$ sind die Pole von g für K_o, K, K_m, K_n und müssen in einer Geraden g_1 liegen, weil die beiden Strahlen p_o und q_o der harmonischen Büschel $(p_o p p_m p_n)$ und $(q_o q q_m q_n)$ in eine Gerade zusammenfallen.

Läfst man P_m und P_n die Gerade g so durchlaufen, dafs sie P_o und P harmonisch trennen, so findet man andere Leitlinien l_m und l_n und andere Kegelschnitte K_m und K_n, in Bezug auf welche aber die Pole von g auf g_1 liegen müssen, weil letztere Gerade durch die festen Punkte $(p_o q_o)$ und (pq) geht.

II. Im zweiten Falle werde angenommen, dafs die konfokalen Kegelschnitte K_1 und K_2 mit gemeinschaftlicher Hauptaxe keine reellen gemeinschaftlichen Tangenten haben, sondern noch zwei imaginäre, welche ersetzt werden durch eine gemeinschaftliche Involution konjugierter Strahlen in A.

Wie im ersten Falle bestimmt eine zur Hauptaxe senkrechte Gerade l als Leitlinie einen Kegelschnitt K, der B zum Brennpunkte und in A dieselbe Involution konjugierter Strahlen hat, wie K_1 und K_2. Statt der Berührungspunkte auf den reellen Tangenten konstruiere man die Polare von A. — Zu dem Zwecke sei q eine beliebige Gerade durch A, q_1 der ihr konjugierte Strahl, so mufs auf q_1 der Pol von q liegen. Es schneide q die Leitlinie l in R, so mufs auf der Polare von R auch der Pol von q liegen. Diese Polare erhält man aber, wenn man RB und darauf in B die Senkrechte zieht; diese

schneidet q_1 im Pol Q von q. Die Senkrechte von Q zur Hauptaxe ist die Polare von A.

Der übrige Teil des Beweises ergiebt sich wie in I.

409. *Die Pole einer Geraden g in Bezug auf die Kegelschnitte einer Schar liegen auf einer Geraden g_1; g und g_1 heifsen konjugierte Gerade der Schar.*

I. Für den Fall, dafs die Schar zwei oder vier imaginäre gemeinschaftliche Tangenten hat, folgt der Satz aus 407. und 408; im Falle von vier gemeinschaftlichen Tangenten ist er schon in 368. bewiesen.

II. Der aufgestellte Satz läfst sich jedoch gleichmäfsig für alle drei Fälle in folgender Art beweisen.

In A und J seien zwei gemeinschaftliche Strahleninvolutionen der Kegelschnitte K_1 und K_2; der Schnittpunkt M der beiden Strahlen beider Involutionen, welche der Geraden AJ konjugiert sind, ist der Pol von AJ für beide Kegelschnitte. Durch M lege man eine beliebige Gerade a, welche für einen Kegelschnitt K der Schar die Polare von A sein soll, so ist dadurch dieser Kegelschnitt bestimmt, denn man kennt auf a die Involution konjugierter Punkte.

Zunächst läfst sich die Polare von J in Bezug auf den gesuchten Kegelschnitt bestimmen. Sind nämlich $i_1 i_2$ zwei konjugierte Strahlen durch J und schneidet i_1 die Gerade a in A_1, so konstruiere man zu A_1 die Polare, welche der zu $A_1 A$ konjugierte Strahl in A ist; diese schneidet i_2 im Pol J_1 von i_1. Wenn man in gleicher Weise den Pol J_2 von i_2 sich konstruiert denkt, so hat man $J_1 J_2$ als Polare i von J.

Die beiden Geraden a und i mögen g in P und Q schneiden; zieht man PA und QJ, so sind die zu diesen Geraden konjugierten Strahlen in A und J die Polaren von P und Q, welche sich im Pol R von g in Bezug auf K schneiden.

Man lege die Polare a_o von A durch A selbst; so mufs AJ die Polare von A_1 werden und J_1 mufs mit J zusammenfallen. Daraus aber folgt, dafs in diesem Falle der Kegelschnitt K_o in das Punktpaar (AJ) degeneriert; die Polare von J in Bezug auf dasselbe wird die Gerade MJ. Die beiden Geraden MA und MJ mögen g in P_o und Q_o treffen.

In gleicher Weise lege man durch A zwei Gerade a_m und a_n, welche a und a_o harmonisch trennen, so sind durch dieselben zwei Kegelschnitte K_m und K_n bestimmt, ferner die Polaren i_m und i_n von J und mithin die Pole $R_m = (a_m i_m)$ und $R_n = (a_n i_n)$ von g bezüglich K_m und K_n bestimmt.

Da aber $A(PP_o P_m P_n)$ und $J(QQ_o Q_m Q_n)$ harmonisch sind, so sind auch die Polaren jener Punkte $PP_o P_m P_n$ und $QQ_o Q_m Q_n$ harmonisch und da die Polaren von P_o und Q_o mit der Geraden AJ zusammenfallen, so liegen die Schnittpunkte $RR_m R_n$ in einer Geraden.

410. *Die Polaren eines Punktes P bezüglich der Kegelschnitte einer Schar umhüllen einen Kegelschnitt, den Polarkegelschnitt von P.*

Beweis wie in 371.

411. *Die Mittelpunkte aller Kegelschnitte einer Schar liegen auf einer Geraden m.*

Man wende 409. auf g_∞ an.

412. *Die Halbierungspunkte der drei Diagonalen eines vollständigen Vierseits liegen in einer Geraden.*

Denn die Paare von Endpunkten der drei Diagonalen des Vierseits gehören zu den Kegelschnitten der Schar, welche dem Vierseite eingeschrieben ist.

413. *Die drei Punkte, welche die Endpunkte der drei Diagonalen eines vollständigen Vierseits harmonisch von einer Geraden g trennen, liegen auch auf einer Geraden.*

Denn sie sind die Pole von g bezüglich der drei Punktpaare der Schar.

414. *Die Paare von Tangenten durch einen Punkt P an die Kegelschnitte einer Schar bilden eine Involution.*

Der Punkt P liegt entweder aufserhalb oder innerhalb seines Polarkegelschnittes π.

Ist im ersten Falle t_1 eine Tangente durch P an π, so mufs ihre konjugierte Gerade t_2 auch π berühren, weil t_1 durch P geht und auch durch P gehen, weil t_1 den Kegelschnitt π berührt. Die beiden Geraden $t_1 t_2$ trennen also jedes Tangentenpaar von P an einen Kegelschnitt der Schar harmonisch, also bilden alle Tangentenpaare eine Involution mit den reellen Doppelstrahlen t_1 und t_2.

Im zweiten Falle, dessen Beweis auch für den ersten Fall gilt, seien g_1 und g_2 zwei Tangenten von P an einen Kegelschnitt K der Schar; ihnen seien in Bezug auf die Schar h_1 und h_2 konjugiert, so dafs also h_1 durch den Berührungspunkt G_1 von g_1 mit K und h_2 durch denjenigen G_2 von g_2 mit K geht. Die Verbindungslinie p von G_1 und G_2 ist die

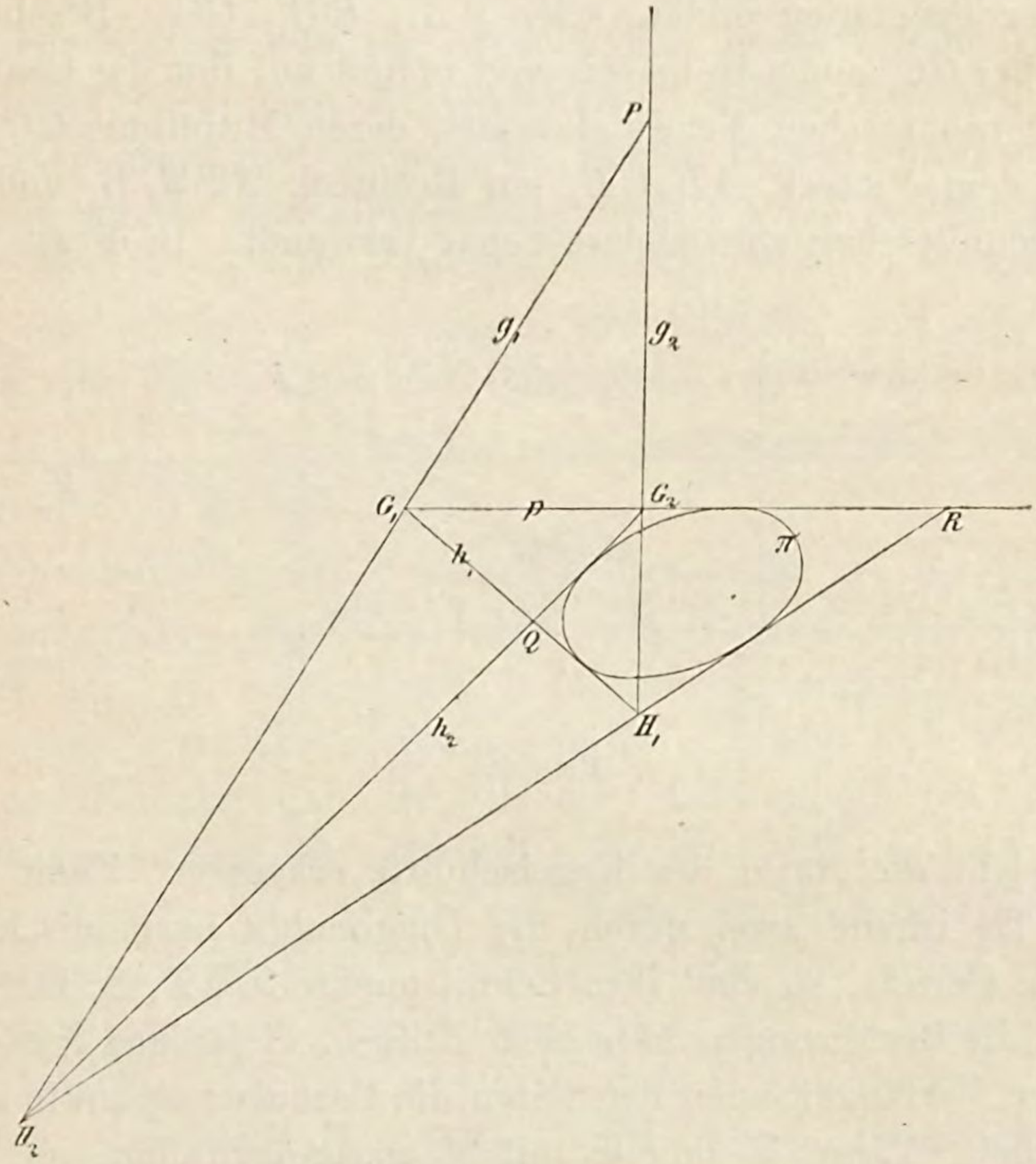


Fig. 163.

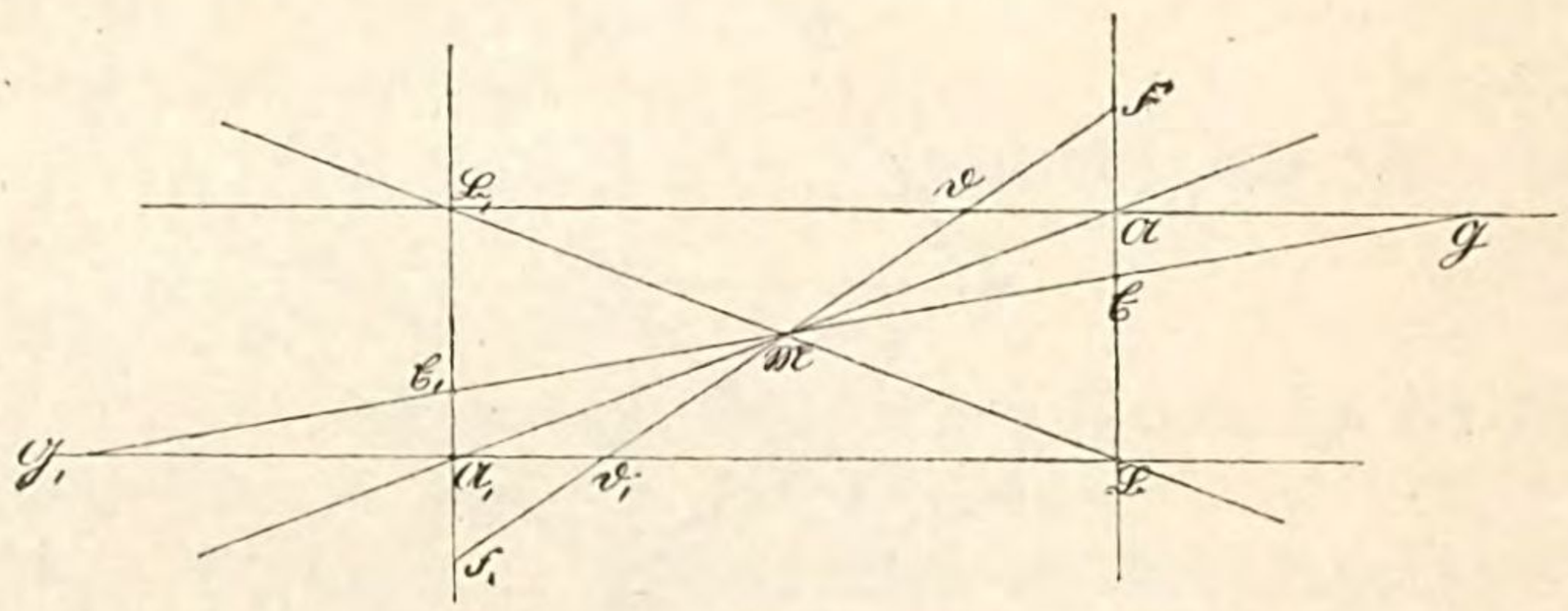
Polare von P bezüglich K. — Sind H_1 und H_2 die Schnittpunkte von $h_1 g_2$ und $h_2 g_1$, ferner Q der Schnittpunkt von $h_1 h_2$, so sind nach 192. auch PQ und $H_1 H_2$ konjugierte Gerade in Bezug auf die Kegelschnittschar und da PQ durch P geht, so berührt $H_1 H_2$ den Polarkegelschnitt π. (371.) In Bezug auf diesen sind die Diagonalen des umgeschriebenen Vierseits $H_1 R G_2 Q$ konjugiert. Da also zwei Tangenten an einen Kegelschnitt K durch P konjugierte Strahlen in Be-

zug auf den Polarkegelschnitt π sind, so bilden alle Tangentenpaare eine Involution.

415. *In jeder Kegelschnittschar giebt es Ellipsen und Hyperbeln, eine Parabel und ein oder drei Punktpaare.*

I. Fall. Die Schar hat vier reelle Tangenten.

Die Gegeneckenpaare des vollständigen Vierseits, welches die vier Tangenten bilden, seien AA_1, BB_1, CC_1. Beschreibt man über CC_1 einen Halbkreis und nimmt auf ihm das Centrum einer harmonischen Verwandtschaft, deren Mittellinie CC_1 ist, so ist dem Viereck ABA_1B_1 ein Rechteck $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$ und der Kegelschnittschar eine andere Schar verwandt. In dieser läfst



sich leicht die Natur der Kegelschnitte erkennen. Zieht man durch $\mathfrak{M}$ irgend zwei durch die Diagonalen harmonisch getrennte Gerade, so sind ihre Schnittpunkte $\mathfrak{D}\mathfrak{E}\mathfrak{D}_1\mathfrak{E}_1$ mit den Seiten die Berührungspunkte einer Ellipse, diejenigen $\mathfrak{F}\mathfrak{G}\mathfrak{F}_1\mathfrak{G}_1$ mit den Verlängerungen der Seiten die Berührungspunkte einer Hyperbel. Wenn $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$ mit $\mathfrak{A}$ zusammenfallen, so geht der Kegelschnitt der Schar in das Punktpaar $(\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1)$ über, welches also den Übergang von den Ellipsen zu den Hyperbeln bildet.

Wenn $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$ in der Mitte von $\mathfrak{A}\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ also im Unendlichen liegen und mit den Punkten $\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$, die den Punkten CC_1 verwandt sind, zusammenfallen, so berührt die Ellipse die Seiten des Rechtecks in ihren Mitten und die Hyperbel geht in das Punktpaar $\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$ über.

Bewegt sich $\mathfrak{D}$ über die Mitte von $\mathfrak{A}\mathfrak{B}_1$ nach $\mathfrak{B}_1$ hin, so nähert sich $\mathfrak{G}$ dem Punkte $\mathfrak{B}_1$ von der andern Seite her und

man erhält eine zweite Gruppe von Ellipsen und Hyperbeln, welche durch das Punktpaar $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$ getrennt werden.

Unter allen Kegelschnitten der Schar, welche die Seiten des Rechtecks berühren, giebt es stets einen, welcher CC_1 zur Tangente hat. Die übrigen Kegelschnitte schneiden entweder CC_1 oder haben mit dieser Geraden keinen Punkt gemein. Da CC_1 die Mittellinie der Verwandtschaft ist, so ist demjenigen Kegelschnitte, welcher CC_1 berührt, eine Parabel verwandt; denjenigen Kegelschnitten, welche CC_1 schneiden, sind Hyperbeln und denjenigen, welche keinen Punkt mit CC_1 gemein haben, sind Ellipsen verwandt. Da den Punktpaaren $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$ die Punktpaare AA_1, BB_1, CC_1 verwandt sind, so werden die Gruppen von Ellipsen und Hyperbeln durch eine Parabel und drei Punktpaare von einander getrennt.

II. Fall. Die Schar hat zwei reelle und zwei imaginäre Tangenten. Fig. 165.

Der Schnittpunkt der reellen Tangenten sei A, derjenige der imaginären B. Man stelle eine harmonische Verwandtschaft her, in welcher der Involution konjugierter Strahlen in B eine cirkulare Involution in $\mathfrak{B}$ und dem Pole von AB, d. i. dem Schnittpunkte der beiden zu AB konjugierten Strahlen ein senkrecht über der verwandten Geraden $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ liegender Punkt verwandt ist. Der Schar von Kegelschnitten mit den gemeinsamen Involutionen konjugierter Strahlen in A und B ist eine Schar von Kegelschnitten mit $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ als gemeinsamer Hauptaxe und $\mathfrak{B}$ als gemeinschaftlichem Brennpunkte verwandt, welche zwei reelle Tangenten in $\mathfrak{A}$ haben. In dieser Schar läfst sich wieder die Natur der Kegelschnitte leicht erkennen.

Eine zur Hauptaxe senkrechte Gerade $\mathfrak{D}\mathfrak{E}$ schneide jene in $\mathfrak{C}$; liegt $\mathfrak{C}$ mit $\mathfrak{B}$ in demselben Winkel der gemeinschaftlichen Tangenten in $\mathfrak{A}$, so erhält man den zweiten Brennpunkt $\mathfrak{B}_1$, wenn man $\sphericalangle \mathfrak{B}_1\mathfrak{D}\mathfrak{C} = \mathfrak{B}\mathfrak{D}\mathfrak{A}$ macht und der Kegelschnitt wird Ellipse.

Liegt $\mathfrak{D}\mathfrak{E}$ im Unendlichen, so erhält man eine Parabel.

Springt dann $\mathfrak{D}\mathfrak{E}$ auf die andere Seite des Winkels $\mathfrak{A}$, etwa nach $\mathfrak{D}'\mathfrak{E}'$, so erhält man den zweiten Brennpunkt $\mathfrak{B}_1'$, wenn man $\sphericalangle \mathfrak{B}_1'\mathfrak{E}'\mathfrak{C}' = \mathfrak{B}\mathfrak{E}'\mathfrak{A}$ macht. Da die Brennpunkte

in Scheitelwinkeln gemeinschaftlicher Tangenten liegen, so wird der Kegelschnitt Hyperbel.

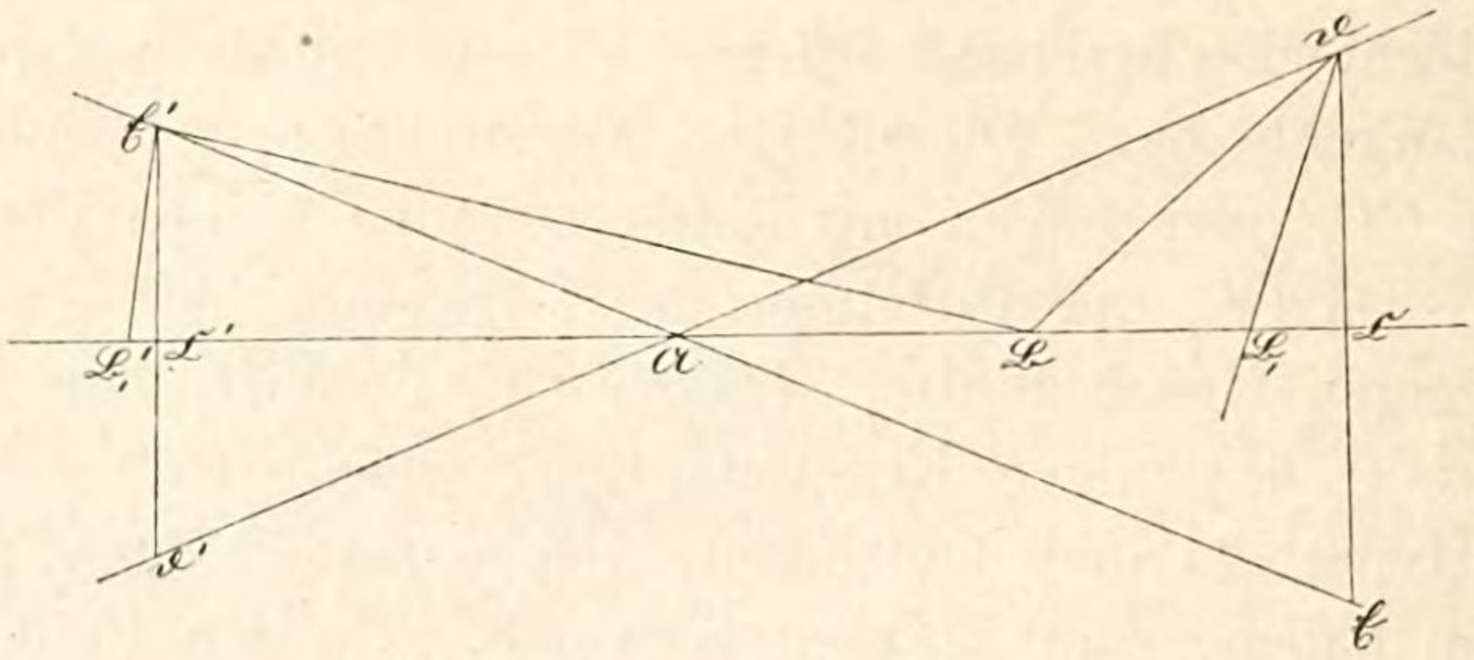


Fig. 165.

Geht $\mathfrak{DE}$ durch $\mathfrak{B}$, so degeneriert der Kegelschnitt in das Punktpaar $(\mathfrak{AB})$.

Die Ellipsengruppe wird also von der Hyperbelgruppe durch die Parabel und das Punktpaar $(\mathfrak{AB})$ getrennt.

Die Mittellinie der harmonischen Verwandtschaft teilt die Kegelschnitte der obigen Schar in solche, welche getroffen und welche nicht getroffen werden, auf deren gemeinsamer Grenze derjenige Kegelschnitt sich befindet, welcher die Mittellinie berührt. Diesen drei Arten von Kegelschnitten sind Hyperbeln, Ellipsen und eine Parabel verwandt.

III. Fall. Die Schar hat zwei Paar konjugiert imaginäre Tangenten.

Die Schnittpunkte dieser Paare seien A und B; es haben also diese Punkte dieselbe Involution konjugierter Strahlen. Man bezeichne die Strahlenpaare derselben mit aa', a_1a_1', a_2a_2', ... und bb', b_1b_1', b_2b_2', ... Die der Geraden AB konjugierten Strahlen schneiden sich im Pole C von AB. Wenn man die Strahlen aa' mit den Strahlen bb', b_1b_1', b_2b_2', ... schneidet und die Schnittpunkte eines jeden Paares verbindet, so umhüllen die Verbindungslinien einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ (188 b.), welcher a und a' berührt. An diesen ziehe man von C eine Tangente t, welche a und a' in T und T' schneidet. Diese Punkte müssen aber die Schnittpunkte eines Paares bb' mit aa' sein, da BB' eine Tangente von $\mathfrak{K}$ ist. Bezeichnet man noch den Schnittpunkt von t und AB mit C', so sind TT' und CC'

Punktpaare derjenigen beiden Involutionen, in denen t von den Strahlenpaaren der Involutionen konjugierter Strahlen in A und B geschnitten wird. Diese Involutionen auf t fallen demnach zusammen. Es sei O einer der beiden Punkte, von denen die Punktpaare unter rechten Winkeln gesehen werden; in einer harmonischen Verwandtschaft mit dem Centrum O und der Mittellinie t sind den Involutionen in A und B cirkulare Involutionen in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ verwandt, also der Schar von Kegelschnitten ist eine andere mit den beiden gemeinschaftlichen Brennpunkten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ verwandt:

Jeder Schar von Kegelschnitten mit zwei Paaren konjugiert imaginärer Tangenten ist eine Schar mit zwei gemeinschaftlichen Brennpunkten verwandt.

In dieser gehen durch jeden Punkt eine Ellipse und eine Hyperbel, (mit rechtwinkligen Tangenten). Die beiden Brennpunkte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ bilden einen degenerierten Kegelschnitt der Schar.

Diese Schar bikonfokaler Kegelschnitte schneidet die Gerade t in reellen oder imaginären Punkten. Einen Kegelschnitt giebt es, welcher t berührt. Also kommen in der Schar verwandter Kegelschnitte Ellipsen, Hyperbeln, eine Parabel und ein Punktpaar vor.

416. *Konstruiert man für jeden Kegelschnitt einer Schar den Ortskreis derjenigen Punkte, in denen sich zwei rechtwinklige Tangenten schneiden, so gehört derselbe einem Büschel an, welches die Leitlinie der einzigen in der Schar vorkommenden Parabel zur Potenzlinie hat.*

Es sei PQR das gemeinschaftliche Poldreieck der Schar, so mufs jeder Ortskreis den umgeschriebenen Kreis des Poldreiecks rechtwinklig schneiden (198. 199.) und da die Mittelpunkte aller Ortskreise auf einer Geraden liegen (411.), so gehört er einem Kreisbüschel an, welches diese Gerade zur Centrale hat. Für die Parabel artet der Ortskreis in die Leitlinie aus; es ist diese also als Kreis des Büschels anzusehen und ist folglich die Potenzlinie desselben.

Da sie den um PQR beschriebenen Kreis rechtwinklig schneidet, so geht sie durch den Mittelpunkt desselben und noch durch die Höhenpunkte der vier Dreiecke, welche die vier gemeinschaftlichen Tangenten bilden, im Falle sie reell sind.

417. *In jeder Kegelschnittschar giebt es entweder zwei Punkte, in denen die Tangentenpaare an die Kegelschnitte der Schar eine cirkulare Involution bilden oder zwei gleichseitige Hyperbeln.*

Wenn das Büschel der Ortskreise der Schnittpunkte rechtwinkliger Tangenten zwei Grundpunkte P und Q hat, so bilden die Tangentenpaare in jedem eine circulare Involution. In diesem Falle kann der dem Poldreiecke PQR umgeschriebene Kreis $\mathfrak{K}$ die Centrale des Kreisbüschels, also den Ort der Mittelpunkte der Kegelschnitte der Schar, nicht schneiden. Es reduciert sich also kein Ortskreis auf einen Punkt und da dies bei der gleichseitigen Hyperbel der Fall sein mufs, so hat in diesem Falle die Schar keine gleichseitige Hyperbel.

Wenn aber das Büschel der Ortskreise keine Grundpunkte hat, so enthält dasselbe zwei Punktkreise, die Mittelpunkte zweier gleichseitigen Hyperbeln der Schar.

418. *Der Ort der Mittelpunkte aller einem Dreiecke eingeschriebenen gleichseitigen Hyperbeln ist ein Kreis um den Höhenpunkt dieses Dreiecks, welcher den um das Dreieck beschriebenen Kreis rechtwinklig schneidet.*

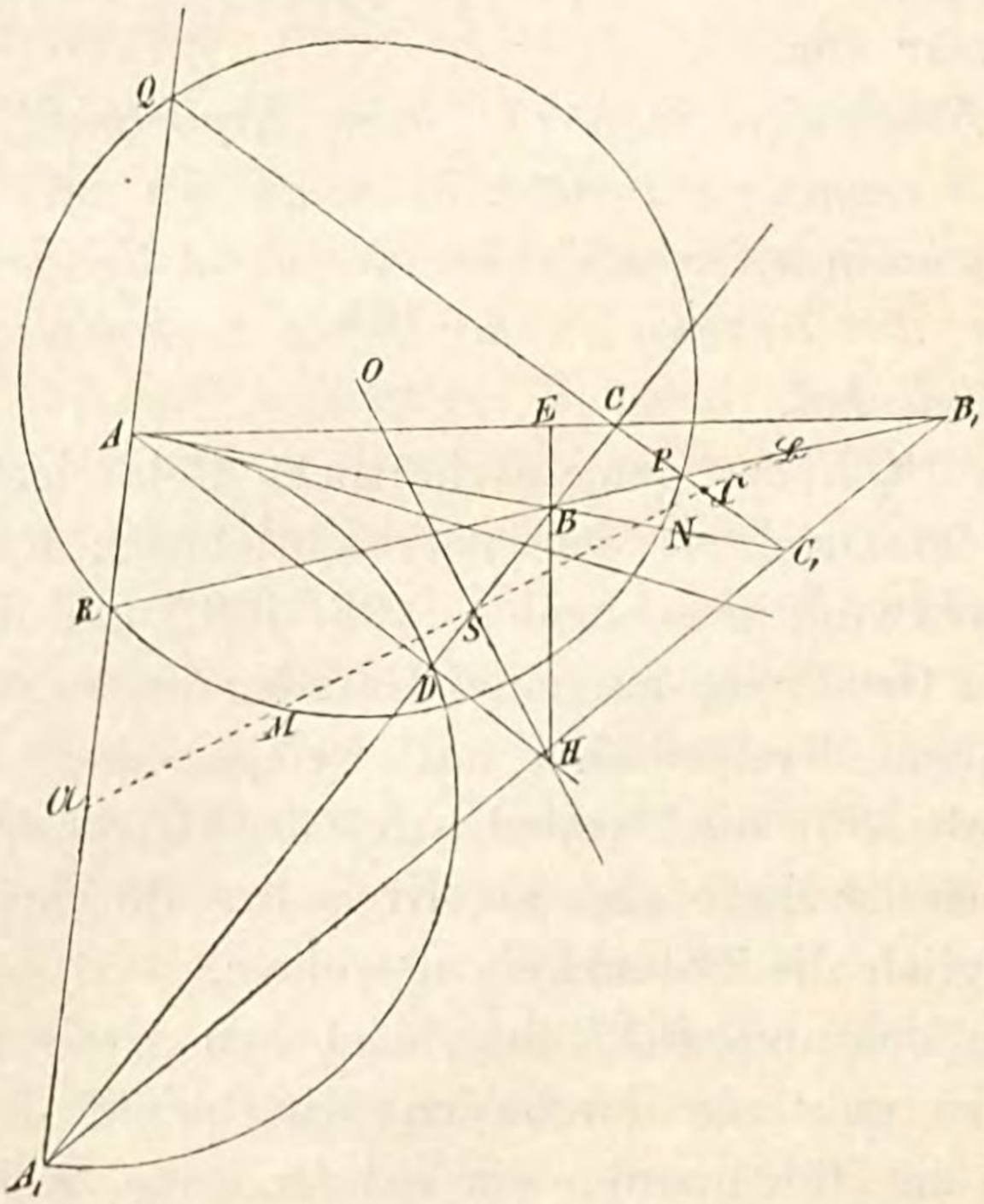


Fig. 166.

Man schneide die Seiten des Dreiecks ABC durch eine Gerade in $A_1B_1C_1$; das Diagonaldreieck des vollständigen Vierseits $ABCA_1B_1C_1$ sei PQR. Ferner seien $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ die Halbierungspunkte von AA_1, BB_1, CC_1; dieselben liegen in einer Geraden und auf ihr steht nach Obigem die Gerade OH senkrecht, welche den Mittelpunkt des um PQR beschriebenen Kreises mit dem Höhenpunkte H des Dreiecks ABC verbindet. Die Gerade $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ schneide den Kreis O im M und N. Dann ist

$$\begin{aligned} O\mathfrak{A}^2 - OM^2 &= \mathfrak{A}S^2 - MS^2 \\ &= (\mathfrak{A}S + MS)\,(\mathfrak{A}S - MS) \\ &= \mathfrak{A}N \,.\, \mathfrak{A}M, \end{aligned}$$

also

$$\mathfrak{A}S^2 = MS^2 + \mathfrak{A}M \,.\, \mathfrak{A}N.$$

Aber auch

$$\mathfrak{A}S^2 = \mathfrak{A}H^2 - HS^2,$$

also

$$\begin{aligned} HM^2 = HS^2 + MS^2 &= \mathfrak{A}H^2 - \mathfrak{A}M \,.\, \mathfrak{A}N \\ &= \mathfrak{A}H^2 - \mathfrak{A}R \,.\, \mathfrak{A}Q \\ &= \mathfrak{A}H^2 - \mathfrak{A}A^2 \end{aligned}$$

Wenn man über AA_1 als Durchmesser einen Kreis beschreibt, so geht derselbe durch den Fufspunkt D der Höhe AH auf BC. Die Potenz dieses Kreises im Punkte H ist

$$HA \,.\, HD = H\mathfrak{A}^2 - \mathfrak{A}A^2 = HM^2$$

also nur abhängig vom Dreiecke ABC. Die Punkte M und N liegen also auf dem Kreise um H mit $HM = \sqrt{HA \,.\, HD}$.

Damit dieser Radius reell sei, mufs H aufserhalb des Dreiecks ABC liegen; dieses mufs also ein stumpfwinkliges sein.

419. Polarisiert man ein Kegelschnittbüschel in Bezug auf irgend einen Kegelschnitt, so erhält man eine Kegelschnittschar. Aus den Eigenschaften der einen ergeben sich die polaren Eigenschaften der anderen.

420. *Eine Parabelschar läfst sich in ein Büschel gleichseitiger Hyperbeln polarisieren.*

Es sei ABC das gemeinsame endliche Tangentendreieck der Parabelschar; die vierte gemeinschaftliche Tangente ist g_∞. Um den Höhenpunkt H desselben, in welchem sich die Leit-

linien aller Parabeln der Schar schneiden, (221) beschreibe man einen beliebigen Kreis und polarisiere in Bezug auf denselben die Parabelschar. Die Pole der vier gemeinschaftlichen

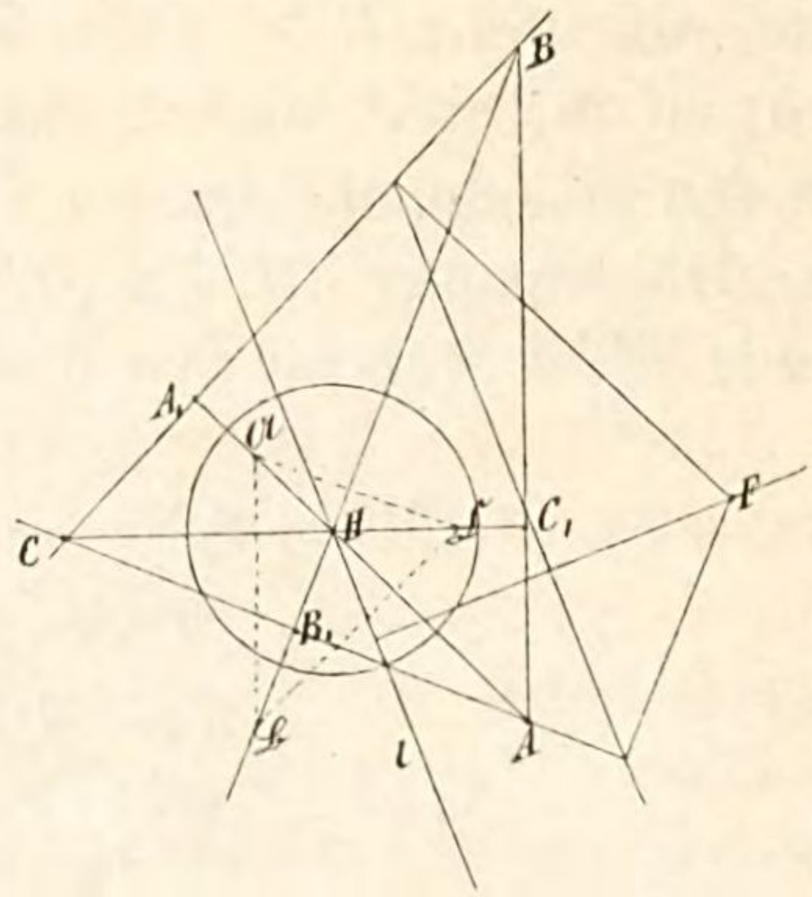


Fig. 166.

Tangenten sind $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ und der Mittelpunkt H als Pol von g_∞. Da die Seiten von $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ auf denen von ABC senkrecht stehen, so ist H auch der Höhenpunkt von $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ und das Kegelschnittbüschel enthält lauter gleichseitige Hyperbeln. (194.)

421. *Drei Kegelschnitte durch dieselben beiden konjugiert imaginären Punkte.*

Drei Kegelschnitte, welche dieselben beiden konjugiert imaginären Punkte gemein haben, kann man in involutorisch verwandte Beziehung zu drei Kreisen setzen; aus den Eigenschaften der letzteren ergeben sich die der ersteren. Die Kegelschnitte seien $K_1 K_2 K_3$; sie schneiden sich in den imaginären Doppelpunkten einer Involution J auf g. Stellt man nun eine involutorische Verwandtschaft her, in welcher dem Kegelschnitte K_1 ein Kreis $\mathfrak{K}_1$ und der g die g_∞ verwandt ist, also den Doppelpunkten auf g die Kreispunkte verwandt sind, so müssen den Kegelschnitten $K_2 K_3$ die Kreise $\mathfrak{K}_2 \mathfrak{K}_3$ verwandt sein. Den Potenzlinien der Kreise sind die ideellen gemeinschaftlichen Sekanten und den Ähnlichkeitspunkten die Durchschnitte gemeinsamer Tangenten verwandt.

a. *Wenn drei Kegelschnitte sich in denselben beiden imaginären Punkten schneiden, so schneiden sich ihre übrigen gemeinschaftlichen ideellen Sekanten in einem Punkte (Chordalpunkt); zieht man von diesem Tangenten an die Kegelschnitte, so liegen*

die Berührungspunkte auf einem neuen Kegelschnitte, der durch die beiden gemeinschaftlichen imaginären Punkte der drei ersten geht. Viermal liegen je drei Durchschnittspunkte gemeinschaftlicher Tangenten der drei Kegelschnitte in einer Geraden. (30, 58)

Sind $\mathfrak{A}_{12}\mathfrak{J}_{12}\mathfrak{A}_{13}\mathfrak{J}_{13}\mathfrak{A}_{23}\mathfrak{J}_{23}$ die Ähnlichkeitspunkte der verwandten Kreise $\mathfrak{K}_1\mathfrak{K}_2\mathfrak{K}_3$ und $A_{12}J_{12}A_{13}J_{13}A_{23}J_{23}$ die verwandten Punkte, so liegen (49) $A_{12}A_{13}A_{23}$, $A_{12}J_{13}J_{23}$, $J_{12}A_{13}J_{23}$, $J_{12}J_{13}A_{23}$ je in einer Geraden.

b. Um diejenigen Kegelschnitte zu konstruieren, welche die drei Kegelschnitte $K_1K_2K_3$ berühren und durch die beiden imaginären Schnittpunkte der letzteren gehen, konstruiere man die Pole der vier Geraden $A_{12}A_{13}A_{23}$, $A_{12}J_{13}J_{23}$, $J_{12}A_{13}J_{23}$, $J_{12}J_{13}A_{23}$. Es seien $P_1P_2P_3$ diejenigen der ersten Geraden bezüglich $K_1K_2K_3$, es sei P der Chordalpunkt von $K_1K_2K_3$; die Geraden PP_1, PP_2, PP_3 schneiden K_1, K_2, K_3 in den Berührungspunkten B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2 zweier Kegelschnitte, welche $K_1K_2K_3$ berühren und durch deren gemeinsame Punkte gehen. (61.) Die drei anderen Geraden $A_{12}J_{13}J_{23}$, $J_{12}A_{13}J_{23}$, $J_{12}J_{13}A_{23}$ liefern noch 6 andere Berührungskegelschnitte. (64.)

§ 27.

Kegelschnitte in doppelter Berührung.

422. *Die Berührungspunkte sind imaginär.*

Zwei konzentrische Kreise haben eine doppelte imaginäre Berührung in den beiden Kreispunkten der Ebene, denn die Polare des gemeinschaftlichen Mittelpunktes ist g_∞. Die in irgend einer harmonischen Verwandtschaft ihnen verwandten Kegelschnitte haben demnach auch eine doppelte imaginäre Berührung. Das Charakteristische derselben folgt aus dem Umstande, dafs die beiden ideellen Sekanten in eine zusammenfallen, weil die Potenzlinie zweier konzentrischen Kreise mit g_∞ zusammenfällt. Die imaginären Berührungspunkte der beiden Kegelschnitte sind die Doppelpunkte der Involution konjugierter Punkte auf der gemeinschaftlichen Sekante. Diese nennt man die *Berührungssehne*, ihren Pol den *Berührungspol*.

Aus den Eigenschaften konzentrischer Kreise folgt sofort:

a. *Die Polaren eines Punktes der Berührungssehne bezüg-*

lich zweier sich doppelt berührender Kegelschnitte K und K_1 fallen in eine Gerade durch den Berührungspol zusammen.

b. *Die Pole einer Geraden durch den Berührungspol fallen in einen Punkt der Berührungssehne zusammen.*

c. *Die Polaren eines beliebigen Punktes schneiden sich auf der Berührungssehne.*

d. *Die Pole einer beliebigen Geraden liegen in gerader Linie mit dem Berührungspol.*

e. *Jede Gerade wird von allen sich in denselben beiden imaginären Punkten doppelt berührenden Kegelschnitten in einer Involution geschnitten, von welcher der eine Doppelpunkt auf der Berührungssehne liegt.*

Denn jede Gerade wird von allen konzentrischen Kreisen in einer Involution geschnitten, von welcher der eine Doppelpunkt auf g_∞ liegt.

f. *Die Tangenten von einem Punkte an alle sich in denselben beiden imaginären Punkten doppelt berührenden Kegelschnitte bilden eine Involution, von welcher der Strahl nach dem Berührungspol ein Doppelstrahl ist.*

g. *Zieht man von einem beliebigen Punkte P Tangenten an alle Kegelschnitte, die sich in denselben beiden imaginären Punkten doppelt berühren, so liegen die Berührungspunkte auf einem neuen Kegelschnitte K, welcher durch P, die beiden imaginären Berührungspunkte und den Berührungspol B geht. Ist Q der Schnittpunkt der Polaren von P, (der auf der Berührungssehne liegt,) so berührt K in P und B die Geraden QP und QB.*

Denn in dem harmonisch verwandten Büschel konzentrischer Kreise liegen die Berührungspunkte auf einem Kreise mit dem Durchmesser $\mathfrak{P}\mathfrak{B}$, wenn $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{B}$ die zu P und B verwandten Punkte sind; $\mathfrak{B}$ ist dabei der Mittelpunkt der konzentrischen Kreise. Wenn $\mathfrak{Q}$ der Pol von $\mathfrak{P}\mathfrak{B}$ ist, so berührt der Kreis über dem Durchmesser $\mathfrak{P}\mathfrak{B}$ die Geraden $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{B}\mathfrak{Q}$, also mufs der Kegelschnitt K die Geraden QB und QP in B und P berühren.

423. *Die Berührungspunkte sind reell.*

Ist K ein beliebiger Kegelschnitt und sind M und M_1 irgend zwei Punkte desselben, so giebt es unendlich viele

Kegelschnitte CC_1C_2 ..., welche K in diesen beiden Punkten, also doppelt berühren. Alle diese Kegelschnitte haben in M

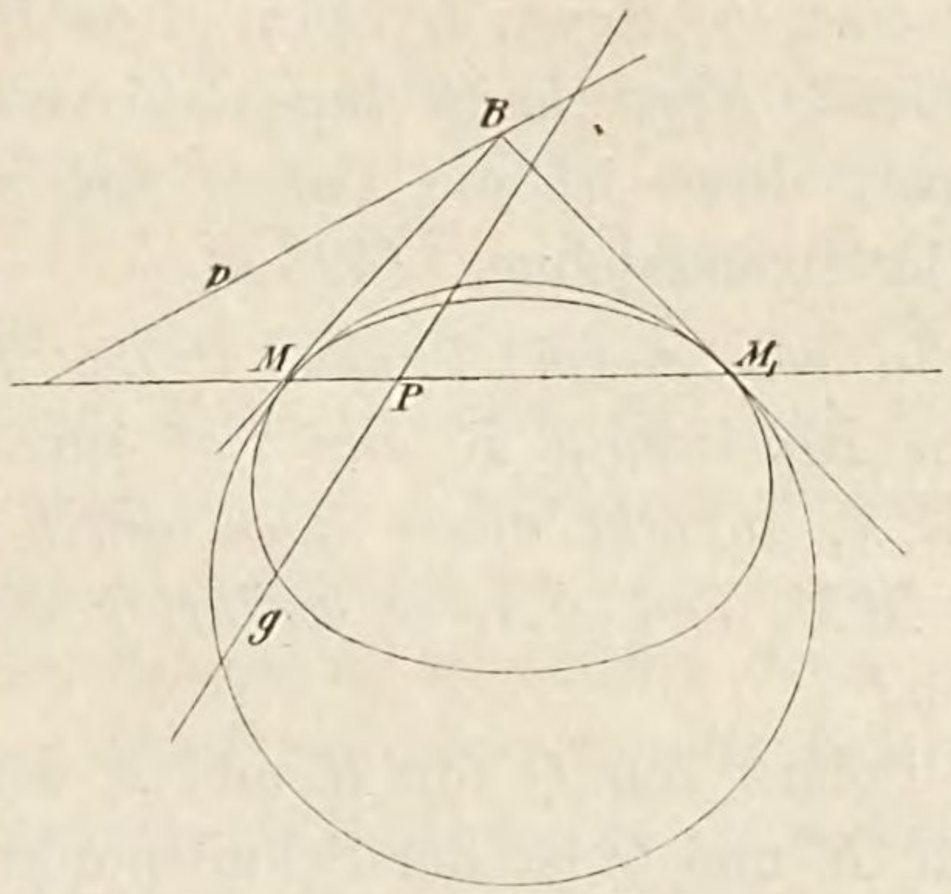


Fig. 167.

und M_1 gemeinsame Tangenten; ihr Schnittpunkt B heifst der *Berührungspol* und ist der Pol der *Berührungssehne* MM_1.

a. *Die Polaren eines Punktes P der Berührungssehne bezüglich der Kegelschnitte* KCC_1 ... *fallen in eine Gerade zusammen*, welche PB von den gemeinsamen Tangenten harmonisch trennt.

b. *Die Pole einer Geraden p durch den Berührungspol fallen in einen Punkt der Berührungssehne zusammen*, welcher den Schnittpunkt von p und MM_1 harmonisch von MM_1 trennt.

c. *Jede Gerade g wird von den sich doppelt berührenden Kegelschnitten in einer Involution geschnitten, von welcher der eine Doppelpunkt auf der Berührungssehne liegt.*

Ist P der Schnittpunkt von g und MM_1, p seine Polare, so werden die Schnittpunkte von g mit irgend einem Kegelschnitte durch P und p harmonisch getrennt.

d. *Die Tangenten von einem Punkte an alle sich in denselben reellen Punkten doppelt berührenden Kegelschnitte bilden eine Involution, von welcher ein Doppelstrahl die Verbindungslinie mit dem Berührungspol ist.*

Denn letztere und ihr Pol trennen je zwei Tangenten eines Kegelschnittes harmonisch.

e. *Die Polaren eines beliebigen Punktes P in Bezug auf*

zwei sich doppelt berührende Kegelschnitte schneiden sich in einem Punkte der Berührungssehne, dem Pole von PB (423b).

f. *Die Pole einer beliebigen Geraden p in Bezug auf zwei sich doppelt berührende Kegelschnitte liegen in einer Geraden mit dem Berührungspol;* diese ist die Polare des Schnittpunktes von p mit der Berührungssehne. (423a.)

g. *Zieht man von einem Punkte P die Tangenten PA und PA_1 an den Kegelschnitt K und legt durch AA_1MM_1B einen Kegelschnitt k, so geht dieser auch durch P; ist Q der Schnittpunkt von MM_1 und AA_1 so berührt k die Geraden QB und QP in B und P.*

BP ist die Polare von Q für K und k, denn BP ist die Polare von Q für K und Q ist der Schnittpunkt gemeinsamer

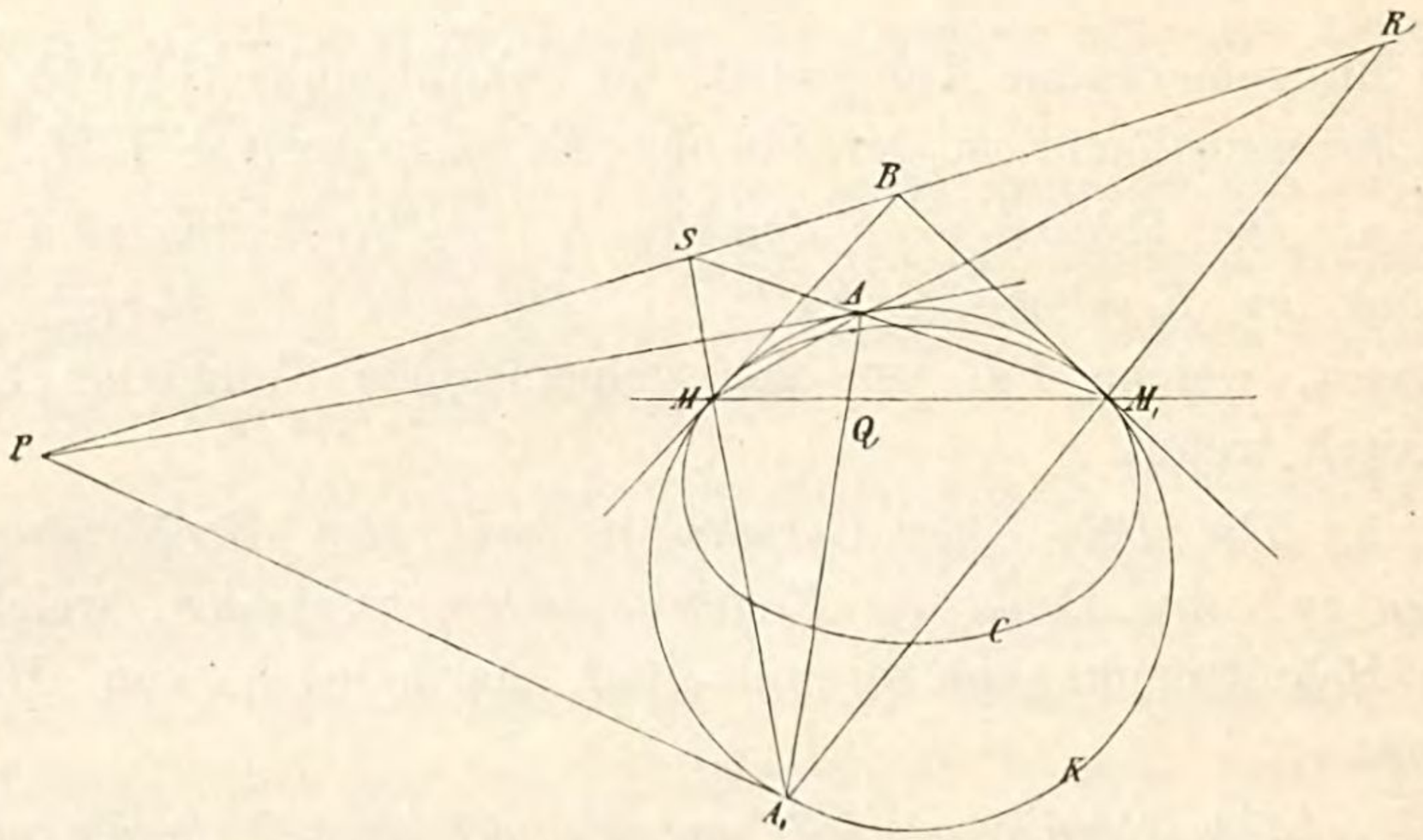


Fig. 168.

Sehnen von K und k, also mufs k die Gerade QB in B berühren.

Die Geraden MA und M_1A_1, MA_1 und M_1A treffen sich in zwei Punkten R und S von BP, welche BP harmonisch trennen; QR ist die gemeinsame Polare von S und weil k durch B geht und $RSBP$ harmonisch sind, so mufs k auch durch P gehen und QP berühren, denn BP ist die Polare von Q.

h. *Die Berührungspunkte der Tangenten von einem Punkte P an alle sich doppelt berührenden Kegelschnitte $KCC_1\ldots$ liegen auf einem neuen Kegelschnitte k, welcher durch B und P geht*

und in diesen Punkten die Geraden berührt, welche den gemeinsamen Pol Q von BP in Bezug auf alle Kegelschnitte mit B und P verbinden.

Sind AA_1, DE, D_1E_1, ... die Berührungspunkte, so müssen die Kegelschnitte, welche man durch AA_1MM_1BP, $DEMM_1BP$, $D_1E_1MM_1BP_1$ ... legen kann, zusammenfallen, denn sie haben vier gemeinsame Punkte MM_1BP und berühren in B und P die Geraden BQ und PQ. (g.)

i. *Zieht man in den Schnittpunkten einer Geraden p mit K die Tangenten aa_1 und legt an die Geraden aa_1, MB, M_1B, MM_1 einen Kegelschnitt k, so berührt dieser auch p; ist q die Verbindungslinie von B mit dem Schnittpunkte von a und a_1, so berührt k die Geraden MM_1 und p in ihren Schnittpunkten mit q.*

Beweis wie in g. oder durch Polarisation.

k. *Schneidet man die sich doppelt berührenden Kegelschnitte KCC_1 ... durch eine Gerade und zieht in den Schnittpunkten Tangenten, so berühren diese einen neuen Kegelschnitt k, der auch die Berührungssehne MM_1 und die Gerade p berührt und zwar in denjenigen Punkten, in denen beide von der Geraden q geschnitten werden, welche den Berührungspol B mit dem Pole von p verbindet.*

Beweis wie in h. oder durch Polarisation.

l. *Zieht man von einem beliebigen Punkte P die Tangenten PD und PD_1, PE und PE_1 an die sich in M und M_1 doppelt berührenden Kegelschnitte K und C, so mufs ein Kegelschnitt k, der K in DD_1 berührt und durch E geht, auch durch E_1 gehen.*

Die Polaren von P in Bezug auf K und C, nämlich DD_1 und EE_1 schneiden sich in einem Punkte Q der Berührungssehne MM_1 (e.); also hat Q in Bezug auf alle drei Kegelschnitte KCk dieselbe Polare, mufs also auf einer gemeinschaftlichen Sehne von C und k liegen. Daher mufs k durch E_1 gehen.

m. *Schneidet man mit einer beliebigen Geraden die sich doppelt berührenden Kegelschnitte K und C in DD_1 und EE_1, so mufs ein Kegelschnitt k, welcher K in DD_1 und die Tangente in E berührt, auch die Tangente in E_1 berühren.*

Beweis wie in l. oder durch Polarisation.

424. a. *Berühren zwei Kegelschnitte CC_1, einen dritten K*

doppelt, so schneiden sich die Berührungssehnen und zwei gemeinschaftliche Sekanten in einem Punkte und bilden vier harmonische Strahlen.

Die beiden Berührungssehnen s und s_1 mögen sich in P treffen; der Punkt P hat für alle drei Kegelschnitte dieselbe

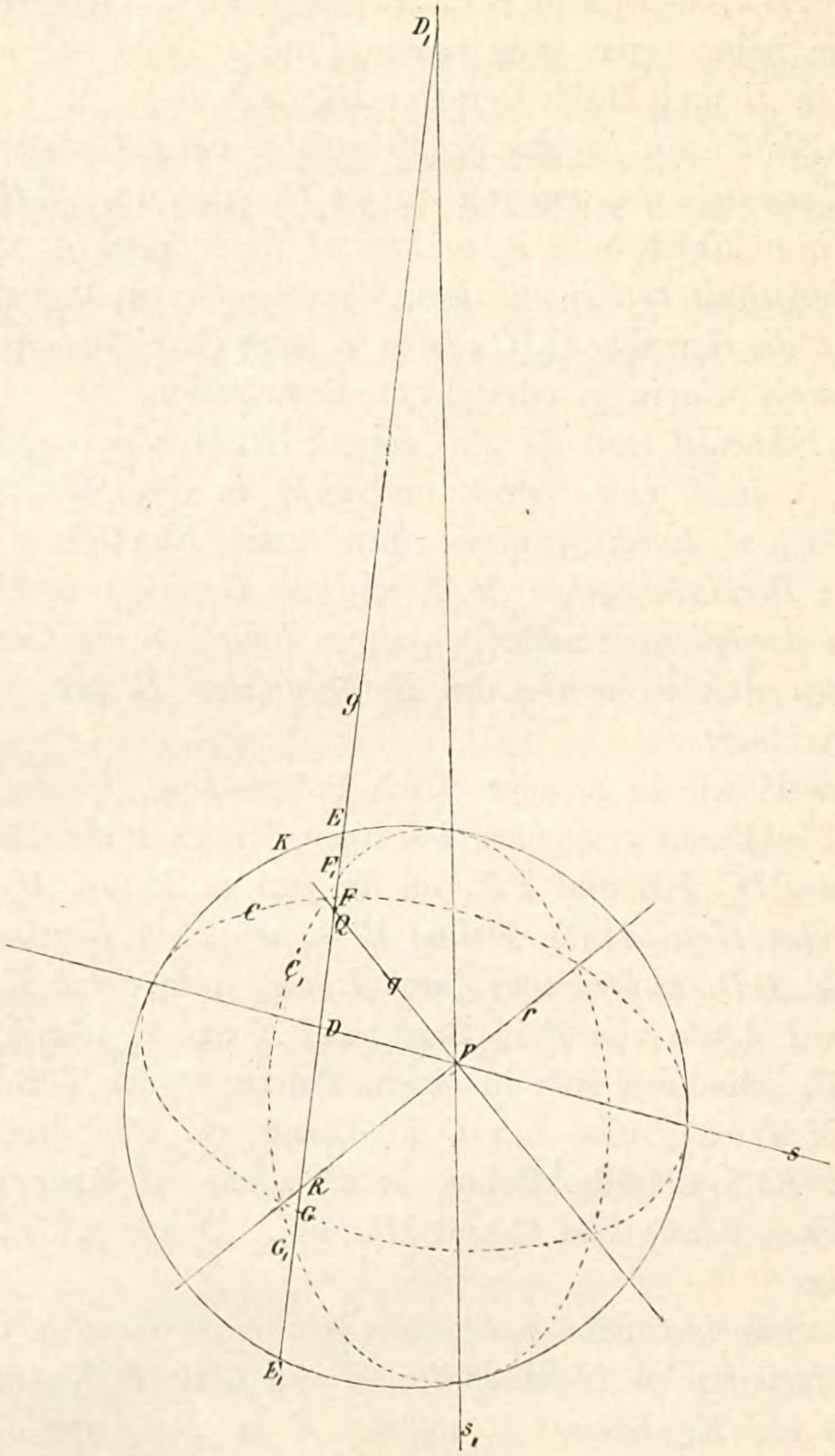


Fig. 169.

Polare (422, 423), also ist P eine Ecke des gemeinsamen Poldreiecks von C und C_1. Es seien q und r die beiden ge-

meinschaftlichen durch P gehenden Sekanten, sie bilden einen Kegelschnitt des Büschels (CC_1). Man ziehe eine Gerade g von solcher Lage, dafs die auf ihr von C und C_1 abgeschnittenen Sehnen durch die Berührungssehnen s und s_1 harmonisch geteilt werden. Man findet sie, indem man den Ort des den Punkten von s bezüglich beider Kegelschnitte konjugierten Punktes, der nach 360. und 393f. ein Kegelschnitt σ ist, mit s_1 zum Durchschnitte bringt und einen der Schnittpunkte, D_1, mit seinem auf s liegenden konjugierten Punkte D verbindet. Diese Gerade schneide die Sekanten q und r in Q und R, den Kegelschnitt K in EE_1, die Berührungssehnen in D und D_1, die Kegelschnitte C und C_1 in FG und F_1G_1; dann sind nach 422. und 423. die Punkte D und D_1 Doppelpunkte der Involutionen $FGEE_1D$ und $F_1G_1EE_1D_1$. Es sind aber auch wegen der Konstruktion von g die Punkte $FGDD_1$ und $F_1G_1DD_1$ harmonisch, also sind $FGF_1G_1EE_1DD_1$ in Involution mit den Doppelpunkten D und D_1. Zu dieser Involution gehören aber auch die Schnittpunkte Q und R, also sind $QRDD_1$ und daher auch $qrss_1$ harmonisch.

b. *Berühren zwei Kegelschnitte C und C_1 einen dritten K doppelt, so werden die Berührungspole durch zwei Durchschnitte gemeinschaftlicher Tangenten harmonisch getrennt.*

Beweis wie in a. oder durch Polarisation.

c. *Zieht man durch den Schnittpunkt P der gemeinschaftlichen Sekanten von C und C_1 zwei Strahlen s' und s'_1, welche jene Sekanten harmonisch trennen, so läfst sich durch ihre Schnittpunkte mit C und C_1 ein Kegelschnitt legen, der C und C_1 doppelt berührt.*

Folgt aus a.

d. *Sind B und B_1 zwei Punkte, welche die in* b. *genannten Tangentendurchschnitte harmonisch trennen, so giebt es einen Kegelschnitt, welcher C und C_1 doppelt so berührt, dafs B und B_1 die Berührungspole sind.*

Folgt aus b.

425. a. *Wenn drei Kegelschnitte $C_1C_2C_3$ einen vierten K doppelt berühren, so schneiden sich drei ihrer gemeinschaftlichen Sekanten vier Mal in einem Punkte.* (Chordalpunkt.)

Die Berührungssehnen $b_1b_2b_3$ schneiden sich in (b_1b_2) oder

B_3, $(b_2 b_3)$ oder B_1, $(b_3 b_1)$ oder B_2; die durch diese Punkte gehenden gemeinschaftlichen Sekanten seien $q_3 r_3$ von $C_1 C_2$, $q_1 r_1$ von $C_2 C_3$, $q_2 r_2$ von $C_1 C_3$. Also sind die Büschel $B_3(b_1 b_2 q_3 r_3)$, $B_1(b_2 b_3 q_1 r_1)$, $B_2(b_1 b_3 q_2 r_2)$ harmonisch. Schneiden nun q_3 und r_3 die Sekante q_2 in β und β', q_1 und r_1 in γ und γ' und sind $v v'$ die reellen oder imaginären Schnittpunkte von q_2 mit C_2,

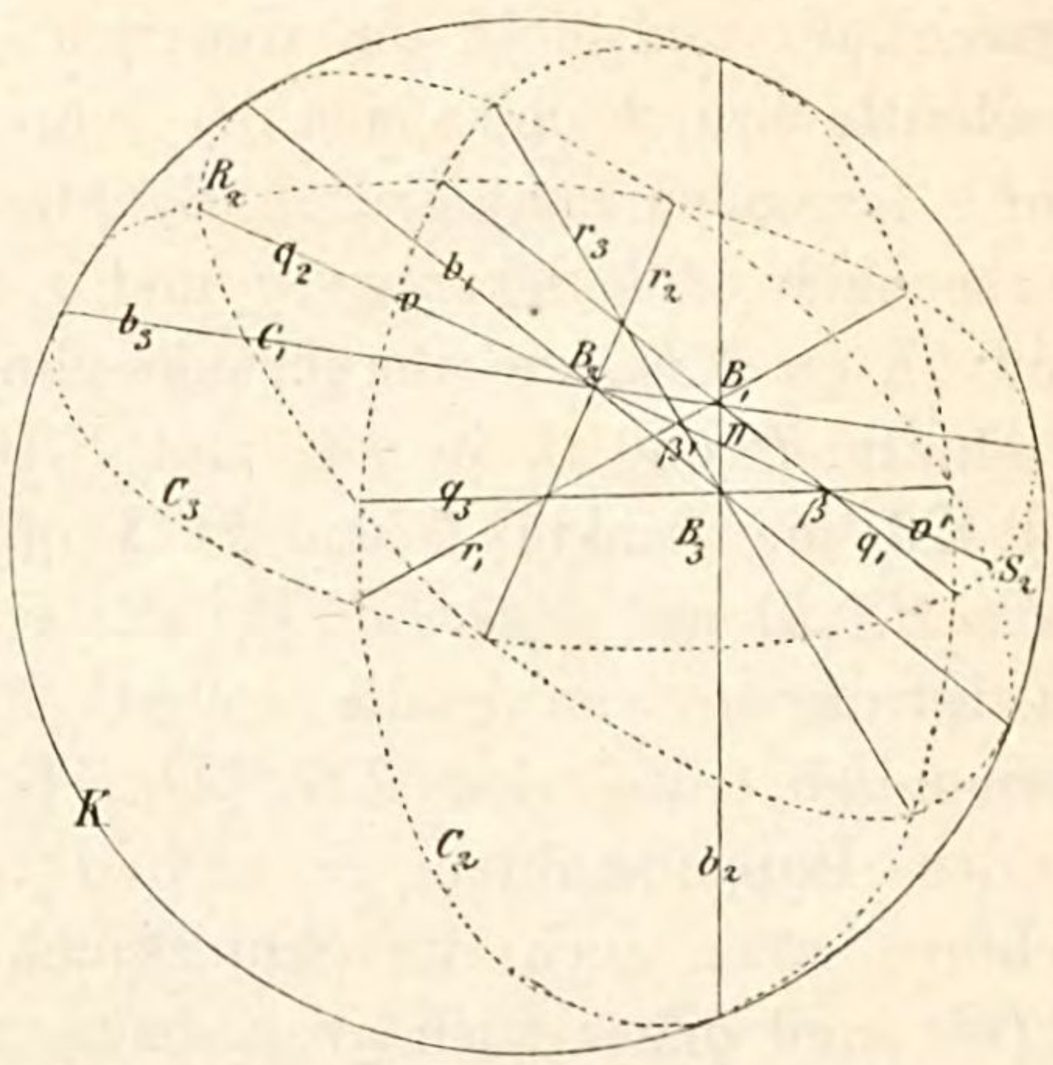


Fig. 170.

$R_2 S_2$ diejenigen von q_2 mit C_1 und C_3, so sind $\beta\beta' v v' R_2 S_2$ und $\gamma\gamma' v v' R_2 S_2$ in Involution, denn $(q_3 r_3)$, C_2, C_1 und $(q_1 r_1)$, C_2, C_3 sind je drei Kegelschnitte eines Büschels. Ist Π der Schnittpunkt von q_2 mit $B_1 B_3$, so sind $\beta\beta' B_2 \Pi$ und $\gamma\gamma' B_2 \Pi$ je vier harmonische Punkte, weil $B_3(b_1 b_2 q_3 r_3)$ und $B_1(b_2 b_3 q_1 r_1)$ harmonisch sind. Die Punktpaare $\beta\beta'$ sind also sowohl in Involution mit $v v' R_2 S_2$ als harmonisch mit $B_2 \Pi$ und müssen daher zusammenfallen, denn es giebt nur ein Punktpaar einer Involution, welches mit einem gegebenen Punktpaare harmonisch liegt. Denkt man sich nämlich alle Punktpaare, welche das letztere harmonisch trennen, so bilden sie eine Involution, welche mit der ersten höchstens ein gemeinschaftliches Punktpaar hat. (36 d).

Es schneiden sich also in β die Sekanten $q_1 q_2 q_3$, in β' die Sekanten $r_1 q_2 r_3$. — Von den harmonischen Büscheln $B_1(b_2 b_3 q_1 r_1)$ und $B_2(b_1 b_3 q_2 r_2)$ fallen die Strahlen b_3 zusammen, also liegen die Schnittpunkte der übrigen Strahlen auf einer Geraden. Von diesen schneiden sich $b_1 b_2$ in B_3, $r_1 q_2$ in β'

auf r_3, also müssen sich auch $r_2 q_1$ auf r_3 schneiden, da r_3 durch B_3 geht; es treffen sich also $r_2 q_1 r_3$ in einem Punkte und ebenso $r_1 r_2 q_3$.

b. *Wenn drei Kegelschnitte $C_1 C_2 C_3$ einen dritten K doppelt berühren, so liegen vier Mal drei der Durchschnittspunkte gemeinsamer Tangenten auf einer Geraden.*

Beweis wie in a. oder durch Polarisation.

426. a. *Wenn zwei Kegelschnitte CC_1 einen dritten K doppelt berühren und man zieht von irgend einem Punkte B einer solchen gemeinschaftlichen Sekante von CC_1, welche durch den Schnittpunkt der Berührungssehnen geht, Tangenten an KCC_1, so liegen die 6 Berührungspunkte auf einem Kegelschnitte $\mathfrak{K}$, welcher K doppelt berührt und B zum Berührungspole hat.*

Die Berührungssehnen bb_1 mögen sich in P schneiden; die durch P gehenden gemeinschaftlichen Sekanten von CC_1 seien qr. Von B auf q ziehe man die Tangenten an KCC_1, welche diese Kegelschnitte in $\varkappa\varkappa'$, $\gamma\gamma'$, $\gamma_1\gamma_1'$ berühren. Die Geraden $\gamma\gamma'$ und $\gamma_1\gamma_1'$ müssen sich auf q in A schneiden. Nach 423 l. giebt es einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, welcher K in $\varkappa\varkappa'$ doppelt berührt und durch $\gamma\gamma'$ geht. Die Polaren $\varkappa\varkappa'$ und $\gamma_1\gamma_1'$ von B nach K und C_1 schneiden sich auf der Berührungssehne b_1 in Q; die Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ und C_1 berühren K doppelt, also mufs eine gemeinschaftliche Sekante beider durch den Schnittpunkt Q ihrer Berührungssehnen $\varkappa\varkappa'$ und b_1 gehen. Da $CC_1\mathfrak{K}$ den Kegelschnitt K doppelt berühren, so müssen sich nach 425 a. ihre gemeinschaftlichen Sekanten zu je drei in vier Punkten treffen; zwei von diesen, nämlich diejenigen von CC_1 und $C\mathfrak{K}$ sind q und $\gamma\gamma'$, diese treffen sich in A, also mufs auch eine von C_1 und $\mathfrak{K}$ durch A gehen. Demnach ist AQ eine gemeinschaftliche Sehne von C_1 und $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}$ mufs durch $\gamma_1\gamma_1'$ gehen.

b. *Wenn zwei Kegelschnitte CC_1 einen dritten K doppelt berühren und man schneidet dieselben durch eine Gerade p, welche durch einen solchen Durchschnittspunkt gemeinschaftlicher Tangenten von CC_1 geht, der auf der Verbindungslinie der Berührungspole liegt, so umhüllen die Tangenten in den Schnittpunkten von p mit CC_1K einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, welcher K doppelt berührt und p zur Berührungssehne hat.*

Beweis wie in a. oder durch Polarisation.

c. *Berühren drei Kegelschnitte einen vierten K doppelt und zieht man von einem der vier Chordalpunkte* (425a) *Tangenten an alle vier Kegelschnitte, so liegen die 8 Berührungspunkte auf einem Kegelschnitte, der K doppelt berührt.*

Folgt aus a.

d. Berühren drei Kegelschnitte einen vierten K doppelt, so schneidet jede der vier Geraden, auf denen drei Durchschnitte gemeinschaftlicher Tangenten liegen, die vier Kegelschnitte in solchen 8 Punkten, dafs die Tangenten in ihnen einen Kegelschnitt umhüllen, welcher K doppelt berührt.

Folgt aus b.

427. A und B seien zwei Punkte aufserhalb eines Kegelschnittes K; die Gerade AB treffe K in A_1B_1 und PQ seien die Punkte, welche AB und A_1B_1 harmonisch teilen. Durch P ziehe man eine Gerade, welche K in DE schneidet und lege durch A einen Kegelschnitt C, welcher K in D und E berührt. Die Polaren von P bezüglich beider Kegelschnitte K und C fallen in eine Gerade p zusammen, welche durch Q geht und die Punkte D und E harmonisch von P trennt. Deshalb mufs C auch durch B gehen, weil $ABPQ$ harmonisch sind. Durch A und B lassen sich also unzählige Kegelschnitte legen, welche K doppelt berühren. Die Berührungssehnen derselben treffen sich in P. In gleicher Weise läfst sich zeigen, dafs es eine zweite Schar von Kegelschnitten giebt, welche durch A und B gehen, K doppelt berühren und deren Berührungssehnen sich in Q schneiden. Umgekehrt folgt, dafs die Berührungssehnen aller K doppelt berührenden Kegelschnitte durch A und B entweder durch P oder Q gehen. Denn ist C ein solcher Kegelschnitt und trifft seine Berührungssehne AB in X, so hat X für beide Kegelschnitte dieselbe Polare x und diese schneidet AB in einem solchen Punkte Y, dafs das Punktpaar XY die beiden Punktpaare AB und A_1B_1 harmonisch trennt. Also mufs XY mit PQ zusammenfallen.

Es ändert sich nichts, wenn die Punkte D und E imaginär werden.

Ist G ein beliebiger Punkt von AB, so müssen die Berührungspunkte aller Tangenten von ihm an die Kegelschnitte C..., welche K doppelt berühren und durch AB gehen, auf einem

Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ liegen (426a), welcher K doppelt berührt. Zu den Kegelschnitten C gehören auch zwei Geradenpaare. Zieht man nämlich von A an K die Tangenten, welche in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ berühren und schneidet K mit $P\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{B}$, mit $P\mathfrak{A}_1$ in $\mathfrak{B}_1$, so sind $B\mathfrak{B}$ und $B\mathfrak{B}_1$ auch Tangenten. Die Tangentenpaare $(A\mathfrak{A}, B\mathfrak{B})$ und $(A\mathfrak{A}_1, B\mathfrak{B}_1)$ gehören zu den Kegelschnitten C und deshalb mufs durch die Scheitel T und T_1 derselben der Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ gehen.

Ändert der Punkt G auf AB seine Lage, so erhält man neue Kegelschnitte $\mathfrak{K}$; alle diese gehen durch T und T_1.

Die vorige Betrachtung bleibt ungeändert, wenn A und B innerhalb K liegen. An Stelle der Tangenten von A und B treten die imaginären Doppelstrahlen der Involutionen konjugierter Strahlen. Von diesen liegen zwei imaginäre Schnittpunkte auf der Polare p von P und durch diese müssen alle Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ gehen. Dies läfst sich auch auf folgende Art erkennen. Ein Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ schneidet p in zwei reellen oder imaginären Punkten Q und R, durch welche zwei Kegelschnitte aus der Schar $C \ldots$ etwa C_q und C_r gehen. Diese können aber keine wirklichen Kegelschnitte sein, weil die Tangenten an sie in Q und R nicht durch G, sondern durch P gehen, da P und p Pol und Polare für alle Kegelschnitte $C \ldots$ sind, es müssen also C_q und C_r Geradenpaare, Q und R deren Scheitel sein. Also:

a. *Berühren die Kegelschnitte $C \ldots$ einen Kegelschnitt K doppelt und schneiden sie sich in denselben beiden Punkten A und B, so treffen sich ihre Berührungssehnen in zwei festen Punkten P und Q von AB. Zieht man von einem Punkte G der Sekante AB Tangenten an die Kegelschnitte $C \ldots$, deren Berührungssehnen sich in P treffen, so liegen ihre Berührungspunkte auf einem K doppelt berührenden Kegelschnitte $\mathfrak{K}$, welcher durch zwei feste, reelle oder imaginäre, Punkte auf der Polare von P geht. Wenn K in ein Geradenpaar ausartet, so thut dies auch $\mathfrak{K}$; beide Paare haben denselben Scheitel.*

Um denjenigen unter den Kegelschnitten $C \ldots$ zu finden, welcher durch einen gegebenen Punkt R geht, ziehe man AR, schneide mit derselben K in $R_1 R_2$ und konstruiere das Punktpaar $P_1 Q_1$, welches AR und $R_1 R_2$ harmonisch teilt, so

sind die Geraden PP_1, PQ_1, QP_1, QQ_1 die Berührungssehnen solcher Kegelschnitte, welche durch ABR gehen und K doppelt berühren:

b. *Durch drei Punkte lassen sich vier Kegelschnitte legen, welche einen Kegelschnitt K doppelt berühren.*

Es bleibt der Fall zu erledigen, dafs die Kegelschnitte $C\ldots$, welche K doppelt berühren, durch zwei imaginäre Punkte A und B gehen, also eine Involution J auf einer Geraden g als Involution konjugierter Punkte haben. Die Paare konjugierter Punkte auf g bezüglich K bilden eine zweite Involution, welche mit der vorigen ein stets reelles gemeinsames Punktpaar PQ hat. Man folgert wie vorhin:

c. *Alle Kegelschnitte $C\ldots$, welche einen Kegelschnitt K doppelt berühren und eine Involution J als Involution konjugierter Punkte haben, teilen sich in zwei Scharen, deren Berührungssehnen sich in zwei festen Punkten P und Q auf dem Träger der Involution schneiden. Zieht man von irgend einem Punkte G auf PQ Tangenten an alle $C\ldots$ der einen Schar, so liegen die Berührungspunkte auf einem Kegelschnitte $\mathfrak{K}$, welcher die Polare des Punktes, in dem sich alle Berührungssehnen schneiden, in zwei festen Punkten trifft und K doppelt berührt. Es giebt vier Kegelschnitte, welche J als Involution konjugierter Punkte haben, K doppelt berühren und durch einen Punkt R gehen.*

428. Die Kegelschnitte C und C_1 berühren K doppelt; durch den Schnittpunkt P der Berührungssehnen seien q und r die gemeinschaftlichen reellen oder ideellen Sekanten von C und C_1. Auf q sei A irgend ein Punkt; man ziehe durch A eine Gerade, welche C in D und E trifft, so lassen sich durch DE unendlich viele Kegelschnitte legen, welche K doppelt berühren. Alle diese schneiden C_1 in solchen Punkten, dafs eine gemeinschaftliche Sekante durch P geht. Legt man also umgekehrt durch P eine zweite Gerade, welche C_1 in D_1 und E_1 trifft, so läfst sich durch DED_1E_1 ein Kegelschnitt legen, welcher K doppelt berührt. Wählt man statt der beliebigen Geraden DE und D_1E_1 durch P zwei Tangenten dieses Punktes an C und C_1, so folgt der Satz:

a. *Wenn zwei Kegelschnitte CC_1 einen dritten K doppelt be-*

rühren und man zieht von einem beliebigen Punkte einer solchen gemeinschaftlichen Sekante von CC_1, welche durch den Schnittpunkt der Berührungsschnen geht, 2 Gerade, so liegen die vier Schnittpunkte, in denen die eine C, die andere C_1 schneidet, auf einem Kegelschnitte, welcher K doppelt berührt. Zieht man statt der beliebigen Geraden je an C und C_1 eine Tangente, so kann man durch die Berührungspunkte einen in ihnen C und C_1 einfach berührenden Kegelschnitt C_2 legen, der K doppelt berührt.

Sind F und F_1 die Berührungspunkte von C_2 mit C und C_1, so sind die Tangenten in ihnen gemeinschaftliche Sekanten von CC_2 und C_1C_2 und sie selbst Durchschnitte gemeinschaftlicher Tangenten. Deshalb mit Hilfe von 425a und b.:

b. *Wenn zwei Kegelschnitte C und C_1 von einem dritten C_2 einfach, alle drei aber von einem vierten K doppelt berührt werden, so liegen die Berührungspunkte von CC_2 und C_1C_2 in gerader Linie mit einem Durchschnittspunkte gemeinschaftlicher Tangenten von CC_1 und die Tangenten in den Berührungspunkten von CC_2 und C_1C_2 schneiden sich auf einer gemeinschaftlichen Sekante von CC_1.*

429. Durch einen Durchschnitt N gemeinschaftlicher Tangenten von CC_1, welcher auf der Verbindungslinie der Berührungspole liegt, ziehe man zwei Gerade gg_1, welche C in $STUV$ und C_1 in $S_1T_1U_1V_1$ schneiden. Von den gemeinschaftlichen Sekanten der Kegelschnitte C, C_1 und des Geradenpaares (gg_1) schneiden sich nach 425a. viermal drei in einem Punkte, weil C, C_1 und (gg_1) als drei Kegelschnitte betrachtet werden können, welche das Tangentenpaar in N doppelt berühren. Man beweist diese Eigenschaft aber wie in 425. auch leicht direkt. Es mögen sich US und V_1T_1 sowie U_1S_1 und VT auf q, UT und U_1T_1 sowie SV und S_1V_1 auf r schneiden, so lassen sich nach 428. durch USV_1T_1, U_1S_1VT, UTU_1T_1 und SVS_1V_1 Kegelschnitte legen, welche K doppelt berühren, also:

Wenn zwei Kegelschnitte C und C_1 einen dritten K doppelt berühren und man zieht durch einen solchen Durchschnitt N gemeinschaftlicher Tangenten von CC_1, welcher auf der Verbindungslinie der Berührungspole liegt, zwei Gerade durch CC_1, so schneiden sich viermal je zwei der Verbindungslinien der acht Schnitt-

punkte auf den beiden gemeinschaftlichen Sekanten von CC_1, welche durch den Schnittpunkt der Berührungssehnen gehen und viermal lassen sich durch je vier der Schnittpunkte Kegelschnitte legen, welche K doppelt berühren. Fallen die beiden Geraden zusammen, so schneiden sich die Tangenten in den Schnittpunkten viermal auf den gemeinschaftlichen Sekanten. Zieht man umgekehrt von einem Punkte einer gemeinschaftlichen Sekante Tangenten an CC_1, so gehen vier Verbindungslinien der Berührungspunkte durch solche Schnittpunkte gemeinsamer Tangenten, welche auf der Verbindungslinie der Berührungspole liegen.

430. Durch UV_1, ST_1, VU_1, S_1T lassen sich Kegelschnitte legen, welche in ihnen C und C_1 einfach und aufserdem K doppelt berühren. Dies folgt aus 429., wenn g und g_1 zusammenfallen. Sind die beiden ersten $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$, so müssen sich US und V_1T_1 in einem Schnittpunkte gemeinsamer Tangenten von $\mathfrak{K}\mathfrak{K}_1$ schneiden (429.), welcher also auf einer gemeinschaftlichen Sekante q von CC_1 liegt. Die Tangenten in US an C und an V_1T_1 an C_1 müssen sich (425.) auf einer gemeinschaftlichen Sekante von $\mathfrak{K}\mathfrak{K}_1$ schneiden und beide Schnittpunkte liegen in gerader Linie mit N, also:

Wenn die Kegelschnitte CC_1 von $\mathfrak{K}$ in UV_1, von $\mathfrak{K}_1$ in ST_1 alle vier aber von K doppelt berührt werden und die Geraden UV_1 und ST_1 sich in einem solchen Durchschnitte N gemeinschaftlicher Tangenten von CC_1 schneiden, welcher auf der Verbindungslinie der Berührungspole von CC_1 mit K liegt, so liegt 1) ein Schnittpunkt gemeinschaftlicher Tangenten von $\mathfrak{K}\mathfrak{K}_1$ auf einer gemeinschaftlichen Sekante von CC_1 und 2) ein Schnittpunkt N gemeinschaftlicher Tangenten von CC_1 auf einer gemeinschaftlichen Sekante von $\mathfrak{K}\mathfrak{K}_1$.

431. K wurde von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$ doppelt berührt; es lassen sich nach Obigem Kegelschnitte $C_1C_2C_3$ konstruieren, welche K doppelt und $\mathfrak{K}\mathfrak{K}_1$ einfach berühren. Die Berührungspunkte von $\mathfrak{K}\mathfrak{K}_1$ mit C_1, C_2, C_3 seien A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 und zwar sollen die Kegelschnitte $C_1C_2C_3$ so konstruiert sein, dafs die Geraden A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 in demselben Durchschnittspunkte S gemeinschaftlicher Tangenten von $\mathfrak{K}\mathfrak{K}_1$ sich treffen; S liegt dann auch auf den gemeinschaftlichen Sekanten von C_1C_2, C_2C_3, C_3C_1 und ist also ein Chordalpunkt von $C_1C_2C_3$. Die

Geraden A_1A_2 und B_1B_2, A_2A_3 und B_2B_3, A_3A_1 nnd B_3B_1 schneiden sich in den Durchschnitten T_3, T_1, T_2 gemeinschaftlicher Tangenten von C_1C_2, C_2C_3, C_3C_1 und zugleich liegen diese Punkte auf derselben gemeinsamen Sekante von $\mathfrak{K}\mathfrak{K}_1$, also ist $T_1T_2T_3$ eine Gerade, deren Pole in Bezug auf $C_1C_2C_3$ auf den Geraden SA_1, SA_2, SA_3 liegen müssen, weil T_1 der Pol von SA_1 in Bezug auf C_1, T_2 der Pol von SA_2 in Bezug auf C_2 und T_3 der Pol von SA_3 in Bezug auf C_3 ist. Daraus folgt:

Berührt ein Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ drei andere $C_1C_2C_3$ einfach in $A_1A_2A_3$ und werden alle vier von einem fünften K doppelt berührt, so liegen $A_1A_2A_3$ auf den Verbindungslinien eines Chordalpunktes von $C_1C_2C_3$ mit den Polen einer Geraden, auf welcher drei Durchschnitte gemeinschaftlicher Tangenten von $C_1C_2C_3$ liegen, diese Pole genommen in Bezug auf $C_1C_2C_3$.

Durch diesen Satz wird die Aufgabe gelöst.

Es sind drei Kegelschnitte $C_1C_2C_3$ gegeben, welche einen vierten K doppelt berühren; man soll einen fünften $\mathfrak{K}$ konstruieren, welcher K doppelt und $C_1C_2C_3$ einfach berührt.

432. Die im vorigen Satze angegebene Konstruktion liefert zwei Kegelschnitte. Da es vier Gerade, auf denen drei Durchschnittspunkte gemeinschaftlicher Tangenten liegen, und vier Chordalpunkte von $C_1C_2C_3$ giebt und jede Verbindung einer solchen Geraden mit einem Chordalpunkte zwei Auflösungen giebt, so hat die Aufgabe im Allgemeinen 32 Auflösungen.

Mit gewissen Modificationen enthält diese Aufgabe die Auflösungen aller derjenigen Aufgaben, die entstehen, wenn man einen oder zwei, oder alle drei Kegelschnitte $C_1C_2C_3$ je in einen Punkt oder eine Gerade übergehen läfst. Treten aufserdem noch an Stelle von K zwei Punkte oder zwei Gerade, so erhält man die Konstruktion der Kegelschnitte aus Punkten und Geraden.

433. *Konjugierte Kegelschnittreihen.*

K werde von C und C_1 doppelt berührt; die Berührungssehnen schneiden sich in P und durch P seien qr die gemeinschaftlichen Sekanten von CC_1. Zieht man von einem Punkte D von q Tangenten an KCC_1, so liegen die Berührungs-

punkte auf einem K doppelt berührenden Kegelschnitte k. Die Verbindungslinien der Berührungspunkte treffen sich zu zweien in den Schnittpunkten A und B gemeinschaftlicher Tangenten. Wenn D die Sekante q durchläuft, so durchläuft k eine Reihe von Kegelschnitten, die K doppelt berühren und sich in denselben zwei Punkten M und N der gemeinsamen Polare p von P für KCC_1 schneiden (427.). Zieht man deshalb von A Tangenten an alle k, so liegen die Berührungspunkte auf einem K doppelt berührenden Kegelschnitte α; ebenso liegen die Berührungspunkte aller von B gezogenen Tangenten auf einem Kegelschnitte β, der K doppelt berührt. Aus 428b. folgt, dafs die Schnittpunkte gemeinschaftlicher Tangenten zweier Kegelschnitte k auf der Sekante q liegen, denn zu den Kegelschnitten k gehören auch solche, welche C und C_1 berühren.

Es seien EF die beiden Schnittpunkte von q mit C und C_1; also sind M und N diejenigen Durchschnitte der von E und F an K gezogenen Tangenten, welche auf p liegen. Alle Kegelschnitte k gehen durch M und N. Zieht man von irgend einem Punkte L auf MN Tangenten an alle k, so liegen die Berührungspunkte auf einem Kegelschnitte λ, welcher K doppelt berührt und durch die Schnittpunkte E und F gehen mufs, denn zu den Kegelschnitten k, welche K doppelt berühren und durch MN gehen, gehören auch die Geradenpaare (EM, FM) und (EN, FN). Daher mufs λ mit einem Kegelschnitte aus der Reihe CC_1 derjenigen Kegelschnitte zusammenfallen, welche durch E und F gehen und K doppelt berühren. Also:

Sind CC_1C_2 ... Kegelschnitte durch zwei Punkte EF, berühren sie K doppelt und schneiden sich ihre Berührungssehnen in einem Punkte P, so liegen die Berührungspunkte aller Tangenten, die man von einem Punkte D auf EF an CC_1C_2 ... ziehen kann, auf einem Kegelschnitte k, welcher K doppelt berührt und durch zwei feste Punkte M und N auf der Polare p von P bezüglich K geht. Wenn D sich auf EF bewegt, so durchlaufen alle k ... eine Reihe von Kegelschnitten; zieht man an diese von irgend einem Punkte L auf p Tangenten, so liegen die Berührungspunkte auf einem der Kegelschnitte CC_1C_2 ... Die

Kegelschnittreihen $CC_1C_2\ldots$ und $k\ldots$ heifsen konjugiert. Zu den Kegelschnitten $CC_1C_2\ldots$ gehören auch die Kegelschnitte α und β.

$C_1C_2C_3$ sollen drei Kegelschnitte sein, welche K doppelt berühren, so haben sie im Allgemeinen vier Chordalpunkte $Q_1Q_2Q_3Q_4$. Zieht man von diesen Tangenten an $C_1C_2C_3$, so liegen die Berührungspunkte auf vier Kegelschnitten $k_1k_2k_3k_4$, welche K doppelt berühren. Sind A_{12}, A_{23}, A_{31} solche Schnittpunkte gemeinschaftlicher Tangenten von C_1C_2, C_2C_3, C_3C_1 die auf einer Geraden liegen und zieht man von A_{12} Tangenten an k_1, so liegen die Berührungspunkte auf einem Kegelschnitte C_{12} aus der Reihe C_1C_2; ebenso liegen die Berührungspunkte der von A_{23} an k_1 und von A_{31} an k_1 gezogenen Tangenten auf zwei Kegelschnitten C_{23} und C_{31} aus der Reihe C_2C_3 und C_3C_1. Die drei Kegelschnitte $C_{12}C_{23}C_{31}$ müssen sich aber in zwei Punkten schneiden, welche auf der Polare s des Punktes liegen, in welchem die Gerade $A_{12}A_{23}A_{31}$ die Berührungssehne von k_1 und K schneidet; man erhält diese Punkte, indem man von den Schnittpunkten der Geraden $A_{12}A_{23}A_{31}$ und des Kegelschnittes k_1 Tangenten an K zieht und diejenigen ihrer Durchschnitte bestimmt, welche auf jener genannten Polare s liegen. Zieht man von einem Punkte auf s Tangenten an die Kegelschnitte $C_{12}C_{23}C_{31}$, so liegen ihre Schnittpunkte auf einem K doppelt berührenden Kegelschnitte μ, welcher die Kegelschnitte $C_1C_2C_3$ in solchen Punkten schneidet, dafs die Verbindungslinien von den auf 2 Kegelschnitten z. B. C_1 und C_2 befindlichen Schnittpunkten sich in den Tangentendurchschnitten $A_{12}A_{23}A_{31}$, hier in A_{12} schneiden.

§ 28.

Das Polarsystem.

434. Zwei Strecken $SS_1 = 2a$ und $\mathfrak{S}\mathfrak{S}_1 = 2b$ halbieren Fig. 171. sich senkrecht in M; sie heifsen *Axen*. Von einem beliebigen Punkte A fälle man senkrecht PB und $P\mathfrak{B}$ auf die Axen, mache SS_1BB_1 und $\mathfrak{S}\mathfrak{S}_1\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$ harmonisch, so heifst die Gerade $B_1\mathfrak{B}_1$ oder p die *Polare* von P. Ist umgekehrt eine beliebige Gerade p gegeben, welche die Axen in B_1 und $\mathfrak{B}_1$ schneidet, so mache man wieder SS_1BB_1 und $\mathfrak{S}\mathfrak{S}_1\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$ har-

monisch und errichte in B und $\mathfrak{B}$ Senkrechte auf den Axen; ihr Durchschnitt P ist der *Pol* der Geraden p. So ist jedem

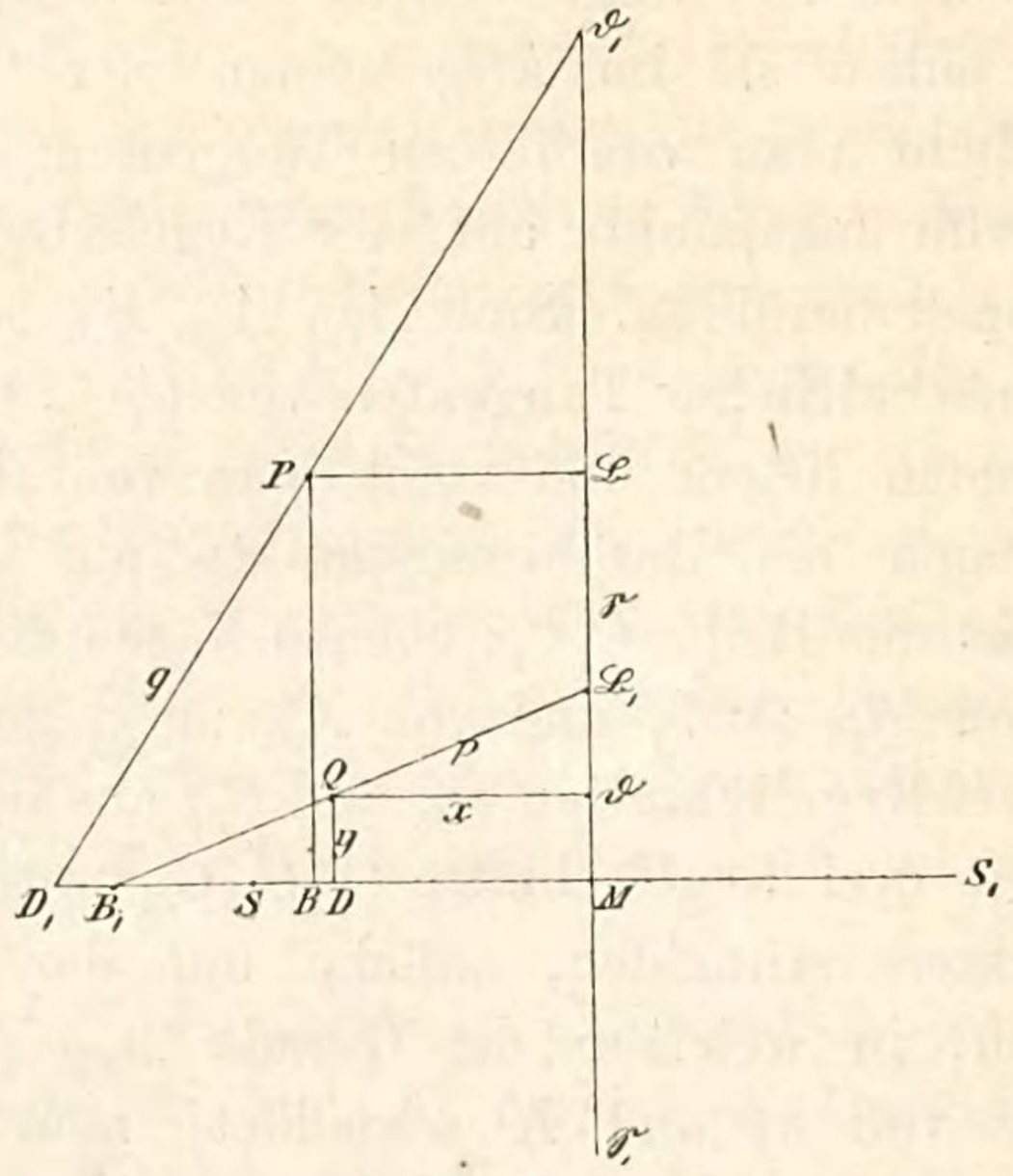


Fig. 171.

Punkte P eine Polare p und jeder Geraden p ihr Pol p zugeordnet.

Liegt P auf einer der Axen, so steht seine Polare auf dieser Axe in demjenigen Punkte senkrecht, welcher P von den Endpunkten harmonisch trennt.

Auf p sei Q ein beliebiger Punkt; man fälle $Q\mathfrak{D} \perp \mathfrak{S}\mathfrak{S}_1$ und $QD \perp SS_1$, setze

$$Q\mathfrak{D} = x, \quad QD = y, \quad MB_1 = X_1, \quad M\mathfrak{B}_1 = Y_1,$$

dann folgt aus ähnlichen Dreiecken

$$X_1 - x : X_1 = y : Y_1$$

oder

$$\frac{x}{X_1} + \frac{y}{Y_1} = 1.$$

Man mache $\mathfrak{S}\mathfrak{S}_1\mathfrak{D}\mathfrak{D}_1$ und SS_1DD_1 harmonisch, setze $MD_1 = X$, $M\mathfrak{D}_1 = Y$, dann ist

$$x \,.\, X = a^2, \; y \,.\, Y = b^2$$

$$X_1 \,.\, MB = a^2, \; Y_1 \,.\, M\mathfrak{B} = b^2,$$

also

$$\frac{x}{X_1} = \frac{MB}{X}, \; \frac{y}{Y_1} = \frac{MB}{Y}$$

und $$\frac{MB}{X} + \frac{M\mathfrak{B}}{Y} = \frac{x}{X_1} + \frac{y}{Y_1} = 1.$$

Hieraus ergiebt sich, dafs P auf der Polare q oder $D_1\mathfrak{D}_1$ von Q liegt. Darin aber liegt der Hauptsatz der Polarentheorie:

a. *Bewegt sich ein Punkt Q auf einer Geraden p, so dreht sich seine Polare q um den Pol P der letzteren und umgekehrt.*

b. *Die Polaren von vier harmonischen Punkten sind vier harmonische Strahlen.*

c. *Die Pole von vier harmonischen Strahlen sind harmonische Punkte.*

435. Von Interesse sind in dem so hergestellten Polarsystem diejenigen Punkte, welche auf ihren Polaren liegen und diejenigen Geraden, welche durch ihre Pole gehen.

Für den Fall, dafs q durch Q geht, wird

$$\frac{x}{X} + \frac{y}{Y} = 1$$

und also $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

oder $$\frac{a^2}{X^2} + \frac{b^2}{Y^2} = 1.$$

Man erkennt in diesen Gleichungen die Gleichung der Ellipse als Punkt- und Tangentengebilde. Daraus folgt also:

Alle Punkte des Polarsystems, welche auf ihren Polaren liegen, erfüllen eine Ellipse; die Tangenten in ihnen sind ihre Polaren.

437. Ohne die Gleichung des Kegelschnittes zu benutzen gelangt man zu den letzten Resultaten auf folgendem Wege. Man weifs zunächst, dafs $SS_1\mathfrak{S}\mathfrak{S}_1$ solche Punkte sind, durch welche ihre Polaren gehen. Durch S ziehe man eine beliebige Gerade g; auf ihr sei P irgend ein Punkt, dessen Polare p die Gerade g in P_1 treffe, dann mufs die Polare p_1 von P_1 durch P gehen. Sind nun PP_1SZ harmonisch, so sind ihre Polaren pp_1sz auch harmonisch und folglich mufs z durch Z gehen und Z ist der einzige Punkt von g, dessen Polare durch ihn hindurchgeht. Wenn g sich um S dreht, so durchläuft Z eine krumme Linie. Auf gleiche Weise folgt, dafs jede durch Z gelegte Gerade aufser Z nur noch einen Punkt besitzen kann, dessen Polare durch ihn hindurchgeht und dafs somit alle

Punkte, welche die Eigenschaft haben, dafs ihre Polaren durch sie hindurchgehen, auf einer Curve K II. Ordnung liegen.

Sind JJ_1 zwei Punkte von K, P irgend ein Punkt der Geraden JJ_1 oder g und P_1 der Schnittpunkt von JJ_1 mit der Polare p von P, so mufs die Polare p_1 von P_1 durch P gehen. Sind PP_1JX harmonisch, so sind auch ihre Polaren pp_1ix harmonisch und müssen JJ_1 in vier harmonischen Punkten schneiden. Da p durch P_1, p_1 durch P, i durch J geht, so mufs auch x durch X gehen. Es giebt aber auf der Geraden g aufser J nur noch den Punkt J_1, welcher auf seiner Polare liegt, also mufs J_1 mit X zusammenfallen. Dies aber ergiebt den Satz:

Jede Sehne von K wird durch einen ihrer Punkte und seine Polare harmonisch geteilt.

In gleicher Weise ergiebt sich der reciproke Satz.

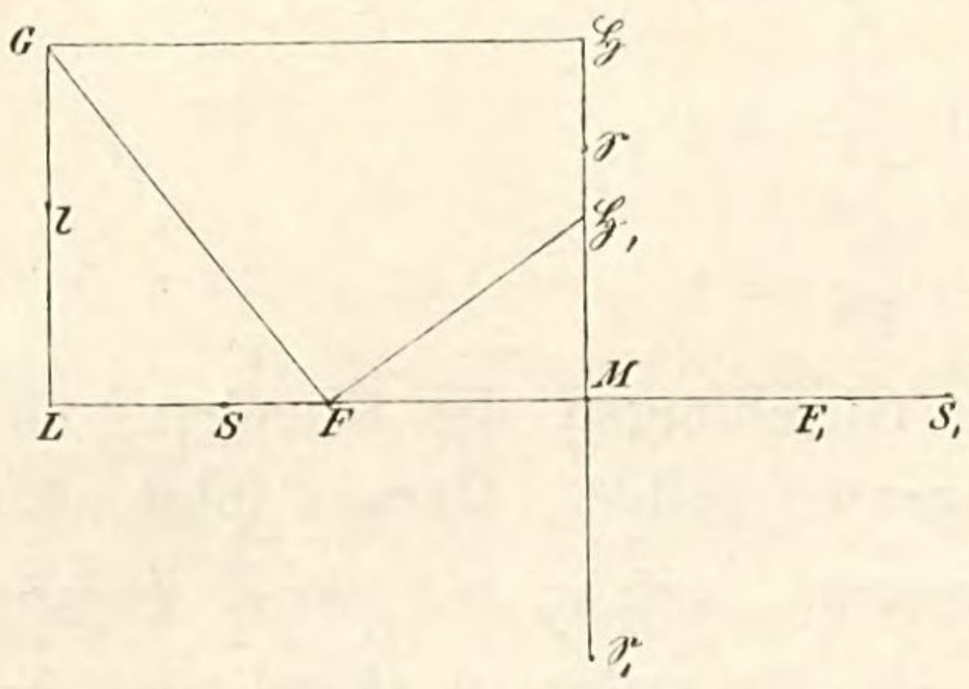


Fig. 172.

Um zu zeigen, dafs K ein Kegelschnitt ist, beschreibt man um $\mathfrak{S}$ mit a einen Bogen, welcher SS_1 in FF_1 schneidet, macht SS_1FL harmonisch, errichtet in F die Gerade $l \perp SS_1$, so ist sie die Polare von F. Die Polare eines Punktes G von l konstruiert man, indem man $G\mathfrak{H} \perp \mathfrak{S}\mathfrak{S}_1$ fällt, $\mathfrak{S}\mathfrak{S}_1\mathfrak{H}\mathfrak{H}_1$ harmonisch macht und $F\mathfrak{H}_1$ zieht.

Weil $MF \,.\, ML = a^2 = MF^2 + M\mathfrak{S}^2$ im $\triangle MF\mathfrak{S}$,

so ist $MF(ML - MF) = M\mathfrak{S}^2$

oder $MF \,.\, LF = M\mathfrak{S}^2 = M\mathfrak{H} \,.\, M\mathfrak{H}_1$

und $MF : M\mathfrak{H}_1 = M\mathfrak{H} : LF.$

Da $M\mathfrak{H} = GL$, so folgt aus der letzten Proportion die Ähnlichkeit der Dreiecke FGL und $MF\mathfrak{H}_1$, woraus sich ergiebt

$$\sphericalangle GF\mathfrak{H}_1 = 1\ R.$$

Nennt man FF_1 die Brennpunkte des Polarsystems und ll_1 ihre Leitlinien, so folgt die Fundamentaleigenschaft der Brennpunkte und Leitlinien:

Die Polare eines Punktes einer Leitlinie steht in ihrem Brennpunkte auf seiner Verbindungslinie mit jenem Punkte senkrecht.

438. Die Sehne JJ_1 treffe die Leitlinie l in Q; man ziehe QF und in F die Gerade $q \perp QF$, so ist q die Polare von Q. Wenn diese JJ_1 in Q_1 trifft, so sind JJ_1QQ_1 harmonisch; daher halbieren, weil $q \perp QF$, die Geraden FQ und FQ_1 die von FJ und FJ_1 gebildeten Winkel, also ist $FJ : FJ_1 = QJ : QJ_1$ und wenn man JN und J_1N_1 senkrecht auf l fällt, auch $QJ : QJ_1 = NJ : N_1J_1$, daher auch $FJ : NJ = FJ_1 : N_1J_1$. Dreht sich die Gerade JJ_1 um J_1, so folgt, dafs das Verhältnis $FJ : NJ$ für den veränderlichen Punkt J von K konstant gleich $FJ_1 : N_1J_1$ ist; also ist K ein Kegelschnitt (cf. 126), er heifst der *Kernkegelschnitt* des Polarsystems.

439. Die eben auseinandergesetzte Methode führt nur zum Polarsystem einer Ellipse; sie läfst sich jedoch verallgemeinern und liefert dann auch die Hyperbel.

Zwei sich senkrecht schneidende Gerade s und $\mathfrak{s}$ treffen sich in M; auf beiden liegen Involutionen mit dem Centralpunkte M. Von einem beliebigen Punkte P fälle man die Senkrechten PB auf s und $P\mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{s}$, suche die in den Involutionen zu B und $\mathfrak{B}$ zugeordneten Punkte B_1 und $\mathfrak{B}_1$, dann soll die Gerade $B_1\mathfrak{B}_1$ oder p die Polare von P heifsen. Es ist leicht ersichtlich, wie man von der Geraden p zum Punkte P gelangt. Dadurch aber ist das Polarsystem hergestellt, für welches in der vorhin angegebenen Weise die genannten harmonischen Eigenschaften abgeleitet werden. Zu den Brennpunktseigenschaften gelangt man auf etwas abweichendem Wege.

Von den Involutionen habe nur diejenige auf s Doppelpunkte SS_1; man beschreibe über SS_1 einen Kreis, schneide ihn mit einer Tangente von K in RR_1, errichte in diesen Punkten auf RR_1 Senkrechte, welche SS_1 in FF_1 schneiden. Construiert man dann einen Kegelschnitt mit der Axe SS_1 und den Brennpunkten FF_1, so mufs dieser mit K zusammenfallen. Cf. 232c.

Hat keine von den Involutionen Doppelpunkte, so giebt es in dem Polarsystem keinen Punkt, welcher auf seiner Polare

liegt; der Kernkegelschnitt des Polarsystems ist imaginär. Da in diesem Falle die Potenzen beider Involutionen negativ sind, gleich $-a^2$ und $-b^2$, so erhält man als Gleichung des imaginären Kegelschnittes

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

440. Auch auf folgende Art erhält man die Brennpunkte des Polarsystems. Es seien die Potenzen der Involutionen auf den Axen a^2 und b^2. Durch einen Punkt C der ersteren ziehe man eine beliebige Gerade d und fälle von ihrem Pole D die Senkrechte DE auf d; diese schneide die Axe in G.

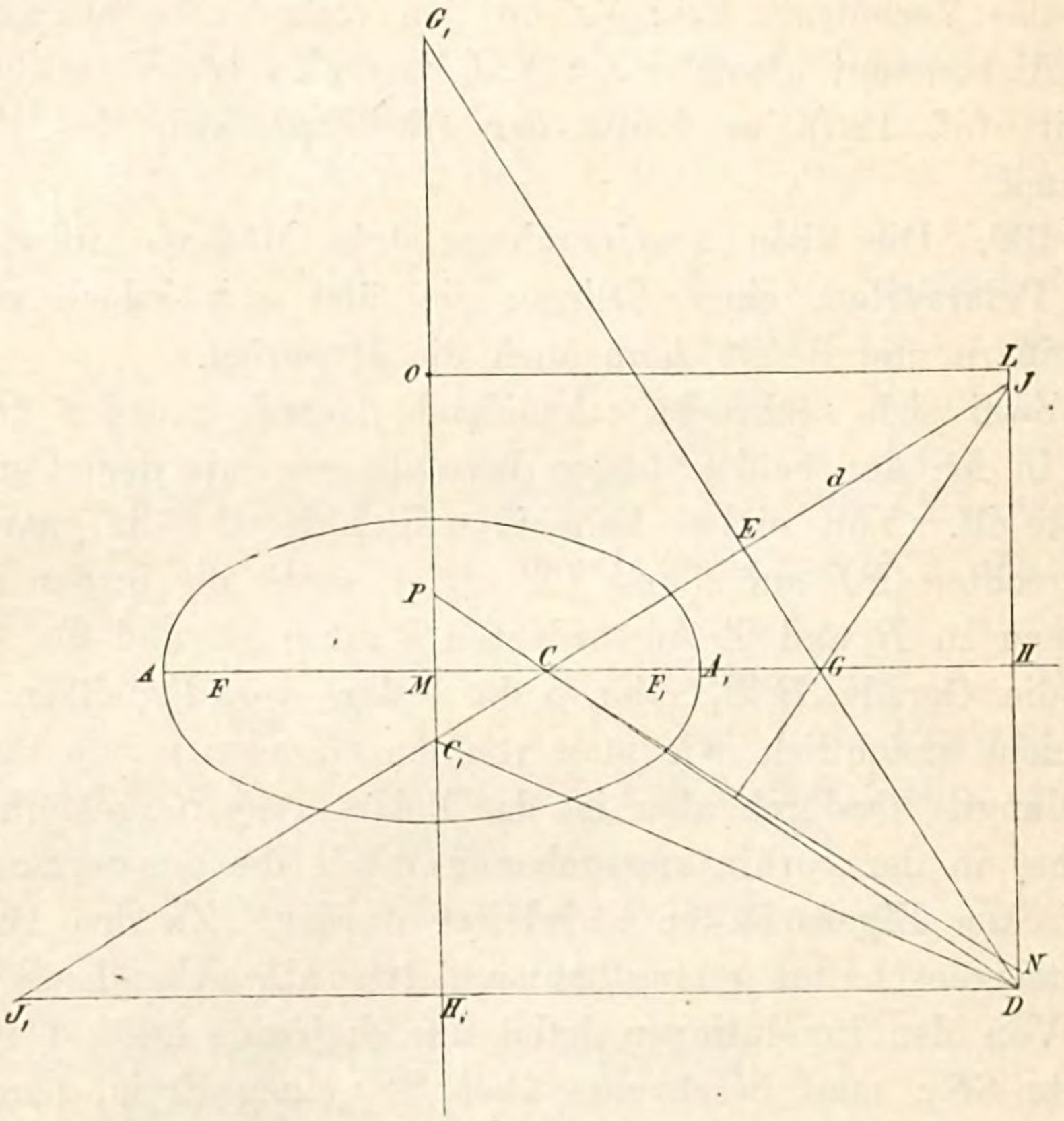


Fig. 173.

Fällt man DH senkrecht auf die Axe AA_1, so ist DH die Polare von C und die Gerade JG mufs auf CD senkrecht stehen, denn die drei Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte, hier G. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke CDH und GHJ folgt $CH \,.\, GH = DH \,.\, JH$.

Die Punkte D und J sind konjugierte Punkte; dreht sich d um C, so bleibt das Produkt $DH \,.\, JH$ konstant gleich $HL^2 = HN^2$. Man fälle LO senkrecht auf die andere Axe und ziehe die Gerade CN, die Polare von L, welche diese Axe in P schneiden mag. Da L der Pol von PN ist, so mufs die Polare von P durch L gehen, sie steht aber auch auf MP senkrecht, also sind O und P konjugierte Punkte und es ist $MO \,.\, MP = b^2$. Dann verhält sich

$$HL^2 : b^2 = HN^2 : MP \,.\, MO = HN : MP,$$
$$= HC : MC \text{ also ist,}$$
$$HL^2 = b^2 \,.\, \frac{HC}{MC}, \text{ daher auch}$$
$$CH \,.\, GH = b^2 \,.\, \frac{HC}{MC} \text{ oder } GH \,.\, MC = b^2$$
$$(MH - MG)\, MC = b^2$$
$$MH \,.\, MC - MG \,.\, MC = b^2.$$

Aber $MH \,.\, MC = a^2$, also

$$MG \,.\, MC = a^2 - b^2 = c^2.$$

Wie man auch d um C drehen mag, der konjugierte Normalstrahl DE schneidet die Axe AA_1 in einem festen Punkte G, so dafs $MG \,.\, MC = a^2 - b^2 = c^2$. Macht man nun $MF = MF_1 = c$, so mufs der konjugierte Normalstrahl zu jeder durch F bez. F_1 gezogenen Geraden durch diesen Punkt gehen. Daher sind F und F_1 die Brennpunkte.

Ändert sich C auf der Axe, so thut dies auch G; die Punktpaare CG bilden aber wegen der Gleichung $MC \,.\, MG = a^2 - b^2$ eine Involution mit dem Centralpunkte M, deren Doppelpunkte die beiden Brennpunkte F und F_1 sind.

Im Punkte E sind EC und ED die beiden konjugierten Normalstrahlen. Erwägt man noch, dafs im Berührungspunkte einer Tangente diese und ihre Normale konjugierte Strahlen sind, so folgt:

Konstruiert man in einem beliebigen Punkte die beiden konjugierten Normalstrahlen oder in einem Punkte des Kernkegelschnittes Tangente und Normale, so schneiden sie die Hauptaxe in einem Punktpaare einer Involution mit dem Centralpunkte M

und der Potenz $a^2 - b^2$, *deren Doppelpunkte die Brennpunkte* F *und* F_1 *sind.*

Die beiden konjugierten Normalstrahlen EC und ED mögen die Nebenaxe in C_1 und G_1 schneiden; die Polare von C_1 mufs durch D gehen und auf der Nebenaxe senkrecht stehen. Sie treffe diese in H_1 und CC_1 in J_1. Im Dreiecke $C_1 D J_1$ ist G_1 der Durchschnitt der Höhen, also ist

$$H_1 J_1 \,.\, H_1 D = G_1 H_1 \,.\, C_1 H_1.$$

In gleicher Art wie vorhin findet man $MJ_1 \,.\, H_1 D = a^2 \,.\, \frac{H_1 C_1}{M C_1}$, also $G_1 H_1 \,.\, C_1 H_1 = a^2 \,.\, \frac{H_1 C_1}{M C_1}$ und $MC_1 \,.\, G_1 H_1 = a^2$. Setzt man $G_1 H_1 = MG_1 + MH_1$ und $MC_1 \,.\, MH_1 = b^2$, so hat man auch

$$MC_1 \,.\, MG_1 = a^2 - b^2, \text{ also}$$

Alle konjugierten Normalstrahlenpaare schneiden die Nebenaxe in den Punktpaaren einer Involution, deren Centralpunkt M *und deren Potenz* $a^2 - b^2$ *ist. Diese Involution hat keine Doppelpunkte; die Kreise über den einzelnen Punktpaaren schneiden sich in den beiden Brennpunkten.*

Ein spezieller Fall dieses Satzes lautet:

Irgend eine Tangente und ihre Normale schneiden die Nebenaxe in zwei Punkten, welche mit den Brennpunkten auf einem Kreise liegen.

441. Im Falle der Parabel mufs die obige Beweisführung ihre Giltigkeit verlieren, da der Mitttelpunkt M ins Unendliche rückt. Man mufs daher eine andere Eigenschaft der Parabel zu Hilfe nehmen, die zunächst abgeleitet werden soll. Es seien BD und BD_1 zwei Tangenten, welche die Scheiteltangente in CC_1 treffen. Die drei Tangenten CD, CC_1, $C_1 D$ bilden mit der unendlich fernen Geraden ein umgeschriebenes Vierseit, in welchem sich die Diagonalen und

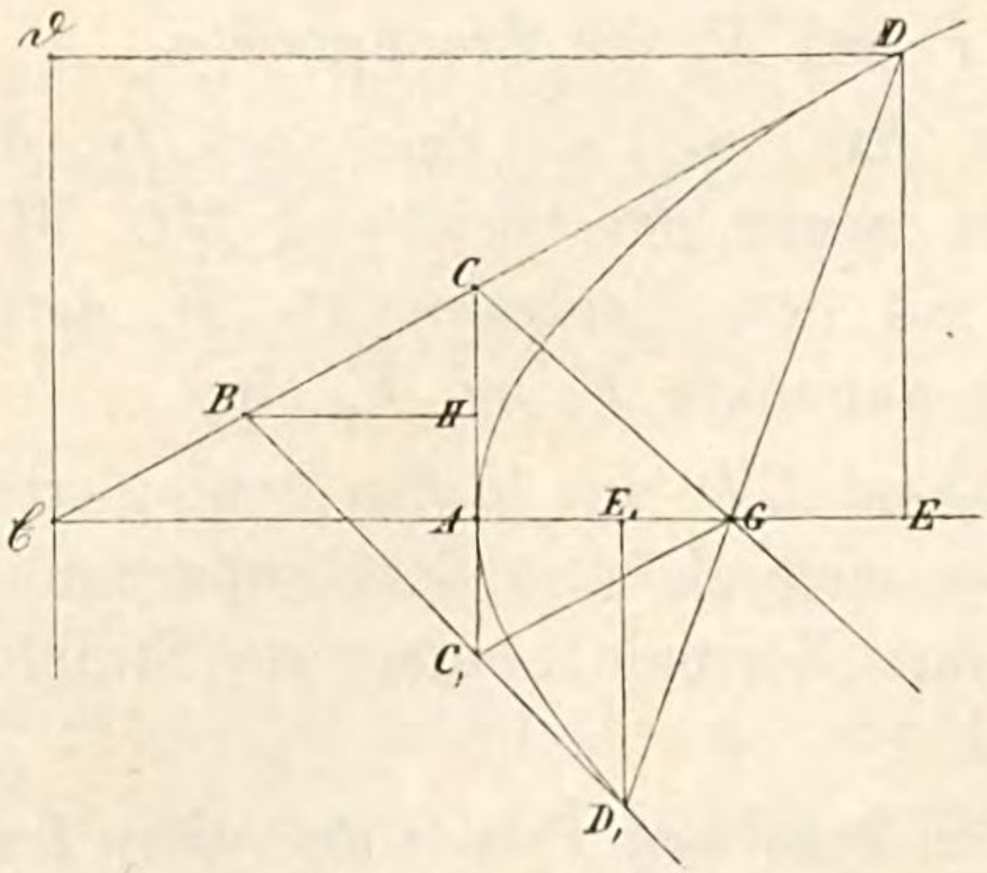


Fig. 174.

Verbindungslinien der Berührungspunkte auf den Gegenseiten in einem Punkte treffen. Daher muſs DD_1 die Axe in einem solchen Punkte G schneiden, daſs $CG \parallel C_1D_1$ und $C_1G \parallel CD$ wird. Man fälle noch DE und D_1E_1 senkrecht auf die Axe.

Aus ähnlichen Dreiecken folgt, wenn man noch $BH \parallel AE$ zieht

$$DE : D_1E_1 = CD : C_1G = CD : CB = AE : BH$$
$$DE : D_1E_1 = CG : C_1D_1 = BC_1 : C_1D_1 = BH : AE_1,$$

aus welchen Proportionen durch Zusammensetzung sich der Satz ergiebt

$$DE^2 : D_1E_1^2 = AE : AE_1.$$

Fällt man aus zwei Parabelpunkten die Senkrechten auf die Axe, so verhalten sich ihre Quadrate wie ihre Entfernungen vom Scheitel.

Die Gerade d schneide die Axe in C; von ihrem Pole D sie DE senkrecht auf d und G der Schnittpunkt von DE mit der Axe. Ferner sei DH senkrecht zur Axe, dann folgt aus den ähnlichen Dreiecken DGH und CJH die Gleichung $GH.HC = HD.HJ = HK^2$, da D und J konjugierte Punkte der Involution auf HK sind und H der Centralpunkt der letzteren ist. Wenn sich d um C dreht, so bleibt HK, da es die Polare von C ist, und somit das Produkt $GH.CH$, also Punkt G ungeändert. Ist d_1 parallel zu d, sind $C_1D_1E_1G_1H_1J_1K_1$ die analogen Punkte, so ist

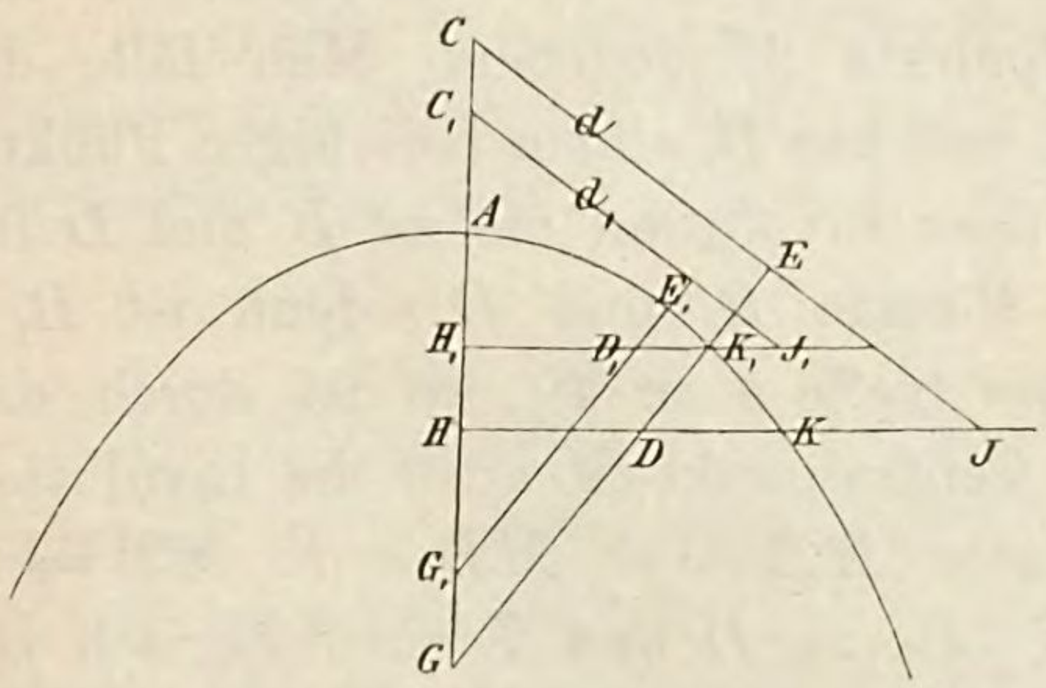


Fig. 175.

$$HG.HC : H_1G_1.H_1C_1 = HK^2 : H_1K_1^2 = AH : AH_1$$

Weil aber $AC = AH$, $AC_1 = AH_1$, so folgt $HG = H_1G_1$, also auch $GG_1 = HH_1 = CC_1$. Mithin haben die Punktpaare CG, C_1G_1, ... dieselbe Mitte F und diese muſs der Brennpunkt sein.

442. Das Polarsystem ist bestimmt durch die Involutionen auf den beiden Axen; es ist aber auch bestimmt durch die

Involution auf einer Axe und irgend einen Punkt P des Kernkegelschnittes K.

Von P fälle man die Senkrechten PB, $P\mathfrak{B}$ auf die Axen, suche zu B den involutorisch zugeordneten Punkt B_1, dann ist PB_1 Tangente in P an K; sie möge $\mathfrak{s}$ in $\mathfrak{B}_1$ treffen. Durch $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$ und den Centralpunkt M ist aber die Involution auf $\mathfrak{s}$ und somit das Polarsystem bestimmt.

Durch die Involution auf der einen Axe s des Kernkegelschnittes K ist also das Polarsystem nicht vollständig bestimmt; es giebt einfach unendlich viele solcher Polarsysteme, was man leicht daraus erkennt, wenn man den zur vollständigen Bestimmung nothwendigen Punkt P eine Gerade durchlaufen läfst, da er auf dieser einfach unendlich viele Lagen einnimmt. Die allen Systemen gemeinsamen Eigenschaften sollen abgeleitet werden.

443. Von einem Polarsystem sei ein fester Punkt P des Kernkegelschnittes K und die veränderliche Involution auf der Axe s mit dem Centralpunkte M gegeben. Man fälle die Senkrechten PB und $P\mathfrak{B}$, und aus R, einem beliebigen Punkte, RD und $R\mathfrak{D}$, suche in einer Involution die zu B und D involutorisch zugeordneten Punkte B_1 und D_1, dann ist B_1P eine Tangente an K; diese treffe $\mathfrak{s}$ in $\mathfrak{B}_1$, so ist durch das Punktpaar $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$ und den Centralpunkt M auch die Involution auf $\mathfrak{s}$ bestimmt. Man setze $MB = p$, $MD = r$, $M\mathfrak{B} = \mathfrak{p}$, $M\mathfrak{D} = \mathfrak{r}$. Sind D_1 und $\mathfrak{D}_1$ die zu D und $\mathfrak{D}$ involutorisch zugeordneten Punkte, so ist die Gerade $D_1\mathfrak{D}_1$ die Polare ϱ von R. Wenn man noch $MB_1 = p_1$, $MD_1 = r_1$, $M\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{p}_1$, $M\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{r}_1$ setzt, so ist die Bedingung dafür, dafs ein Punkt Q, dessen Entfernungen von den Axen s und $\mathfrak{s}$ gleich y und x sind (cf. 434.) auf $D_1\mathfrak{D}_1$ liegt,

$$\frac{x}{r_1} + \frac{y}{\mathfrak{r}_1} = 1.$$ Da P auf $B_1\mathfrak{B}_1$ liegt,

so ist auch $$\frac{p}{p_1} + \frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}_1} = 1.$$

Aus den Eigenschaften der Involution folgt,

$$p \cdot p_1 = r \cdot r_1, \quad \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p}_1 = \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{r}_1, \text{ also}$$

$$\frac{xr}{pp_1} + \frac{y\mathfrak{r}}{\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1} = 1.$$

Andert sich nun die Involution auf s und bezeichnen $p_2 \mathfrak{p}_2$ die den Strecken $p_1 \mathfrak{p}_1$ analogen Strecken, so hat man auch

$$\frac{xr}{pp_2} + \frac{y\mathfrak{x}}{\mathfrak{p}\mathfrak{p}_2} = 1.$$

Erweitert man die letzten Gleichungen mit $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ und zieht sie von einander ab, so erhält man

$$\frac{xr}{p}\left(\frac{\mathfrak{p}_1}{p_1} - \frac{\mathfrak{p}_2}{p_2}\right) = \mathfrak{p}_1 - \mathfrak{p}_2.$$

Aus den Gleichungen

$$\frac{p}{p_1} + \frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}_1} = 1$$

und

$$\frac{p}{p_2} + \frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}_2} = 1$$

ergiebt sich

$$p\left(\frac{\mathfrak{p}_1}{p_1} - \frac{\mathfrak{p}_2}{p_2}\right) = \mathfrak{p}_1 - \mathfrak{p}_2,$$

also

$$xr = p^2$$

uud ebenso

$$y\mathfrak{x} = \mathfrak{p}^2.$$

Wie sich also auch die Involution auf s ändern mag, die Polaren von R gehen durch einen festen Punkt, dessen Entfernungen von $\mathfrak{S}$ und s gegeben sind durch

$$x = \frac{p^2}{r} \text{ und } y = \frac{\mathfrak{p}^2}{\mathfrak{x}}.$$

Die Kernkegelschnitte K aller Polarsysteme gehen aufser durch P noch durch drei andere feste Punkte $P_1 P_2 P_3$, die mit P symmetrisch zu s, $\mathfrak{S}$ und M liegen und bilden ein Kegelschnittbüschel mit vier reellen Grundpunkten. Für dieses aber gilt nach Obigem der Satz:

Die Polaren eines Punktes in Bezug auf alle einem Rechtecke umgeschriebenen Kegelschnitte schneiden sich in einem Punkte.

444. Das Polarsystem ist auch durch eine Involution auf der einen Axe s und durch ein Paar konjugierter Punkte P und Q gegeben. Denn sind PB und $P\mathfrak{B}$ senkrecht auf s und $\mathfrak{S}$, ist B_1 der zu B involutorisch zugeordnete Punkt, so ist $B_1 Q$ die Polare von P; schneidet sie $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{B}_1$, dann ist $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$ ein Punktpaar der Involution auf $\mathfrak{S}$ und diese ist also durch dasselbe und den Centralpunkt M gegeben. Hält man das Punktpaar PQ und die Axen fest, läfst aber die Involution auf s sich ändern, jedoch so, dafs der Schnittpunkt M

der Axen der Centralpunkt bleibt; so ändern sich auch die Polarsysteme und die Kernkegelschnitte K. Die letzteren haben jedoch die Axen und ein Paar konjugierter Punkte gemeinsam. Man nehme eine bestimmte Involution auf s an, fälle PB, QC und $P\mathfrak{B}$, $Q\mathfrak{C}$ senkrecht auf s und $\mathfrak{s}$, bestimme zu BC die involutorisch zugeordneten Punkte B_1C_1, schneide $\mathfrak{s}$ mit B_1Q in $\mathfrak{B}_1$ und konstituire durch $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$ und den Centralpunkt M auf $\mathfrak{s}$ die Involution; endlich nehme man einen beliebigen Punkt R, fälle RD und $R\mathfrak{D}$ senkrecht auf s und $\mathfrak{s}$, bestimme die involutorisch zugeordneten Punkte $D_1\mathfrak{D}_1$ zu $D\mathfrak{D}$, dann ist $D_1\mathfrak{D}_1$ die Polare von R. Hat ein Punkt X der letzteren von $\mathfrak{s}$ und s die Entfernungen x und y und setzt man $MB = p$, $MB_1 = p_1$, $MC = q$, $MC_1 = q_1$, $MD = r$, $MD_1 = r_1$, $M\mathfrak{B} = \mathfrak{p}$, $M\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{p}_1$, $M\mathfrak{C} = \mathfrak{q}$, $M\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{q}_1$, $M\mathfrak{D} = \mathfrak{r}$, $M\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{r}_1$, so sind die Bedingungen dafür, dafs X auf $D_1\mathfrak{D}_1$ und Q auf $B_1\mathfrak{B}_1$ liegt,

$$\frac{x}{r_1} + \frac{y}{\mathfrak{r}_1} = 1$$

und

$$\frac{q}{p_1} + \frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{p}_1} = 1.$$

Da aber $pp_1 = qq_1 = rr_1$, $\mathfrak{p}.\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{q}.\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{r}.\mathfrak{r}_1$, so ist

$$\frac{xr}{pp_1} + \frac{y\mathfrak{r}}{\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1} = 1.$$

Sind für ein anderes Polarsystem p_2 $\mathfrak{p}_2$ r_2 $\mathfrak{r}_2$ die den Strecken p_1 $\mathfrak{p}_1$ r_1 $\mathfrak{r}_1$ analogen Strecken, so erhält man an Stelle der letzten Gleichungen

$$\frac{q}{p_2} + \frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{p}_2} = 1$$

$$\frac{xr}{pp_2} + \frac{y\mathfrak{r}}{\mathfrak{p}\mathfrak{p}_2} = 1.$$

Aus den vier letzten Gleichungen folgt leicht

$$\frac{xr}{p}\left(\frac{\mathfrak{p}_1}{p_1} - \frac{\mathfrak{p}_2}{p_2}\right) = \mathfrak{p}_1 - \mathfrak{p}_2,$$

$$q\left(\frac{\mathfrak{p}_1}{p_1} - \frac{\mathfrak{p}_2}{p_2}\right) = \mathfrak{p}_1 - \mathfrak{p}_2$$

woraus

$$x = \frac{pq}{r}$$

und ebenso

$$y = \frac{pq}{\mathfrak{r}}.$$

sich ergiebt, d. h. für alle konstruierten Polarsysteme geht die Polare von R durch einen festen Punkt, der von den gemeinsamen Axen die Abstände $\frac{pq}{r}$ und $\frac{pq}{\mathfrak{r}}$ hat. Daraus aber folgt für die Kernkegelschnitte K der Satz:

Die Polaren eines Punktes in Bezug auf alle Kegelschnitte, welche dieselben Axen und zwei feste konjugierte Punkte haben, schneiden sich in einem Punkte.

445. Die Gesamtheit der Kegelschnitte, welche dieselben Axen haben und aufserdem durch einen Punkt P gehen oder zwei Punkte P und Q zu konjugierten Punkten haben, bildet ein *Kegelschnittbüschel.* Im ersten Falle haben alle Kegelschnitte desselben aufser P noch drei gemeinsame Punkte; im zweiten haben sie entweder vier gemeinschaftliche Punkte oder gar keine, aber noch drei leicht angebbare Paare von konjugierten Punkten. Sind nämlich $P_1 P_2 P_3$ und $Q_1 Q_2 Q_3$ die in Bezug auf $\mathfrak{S} s M$ symmetrisch liegenden Punkte zu P und Q, so sind P_1 und Q_1, P_2 und Q_2, P_3 und Q_3 konjugierte Punkte in Bezug auf alle Kegelschnitte.

Man unterscheidet also Kegelschnittbüschel mit vier reellen Grundpunkten und ohne Grundpunkte. Jedes der beiden Büschel ist aber durch zwei seiner Kegelschnitte bestimmt; denn dieselben bestimmen im ersten Falle die Grundpunkte und im anderen ein Paar konjugierter Punkte PQ.

446. Sind $K_1 K_2$ zwei ganz beliebige Kegelschnitte, die nicht gemeinschaftliche Axen haben und entweder vier reelle Schnittpunkte oder keinen reellen Schnittpunkt, also ein reelles Poldreieck haben, so läfst sich leicht eine harmonische Verwandtschaft herstellen, in welcher jenen Kegelschnitten zwei andere mit gemeinschaftlichen Axen verwandt sind. Ist nämlich ABC das beiden Kegelschnitten gemeinsame

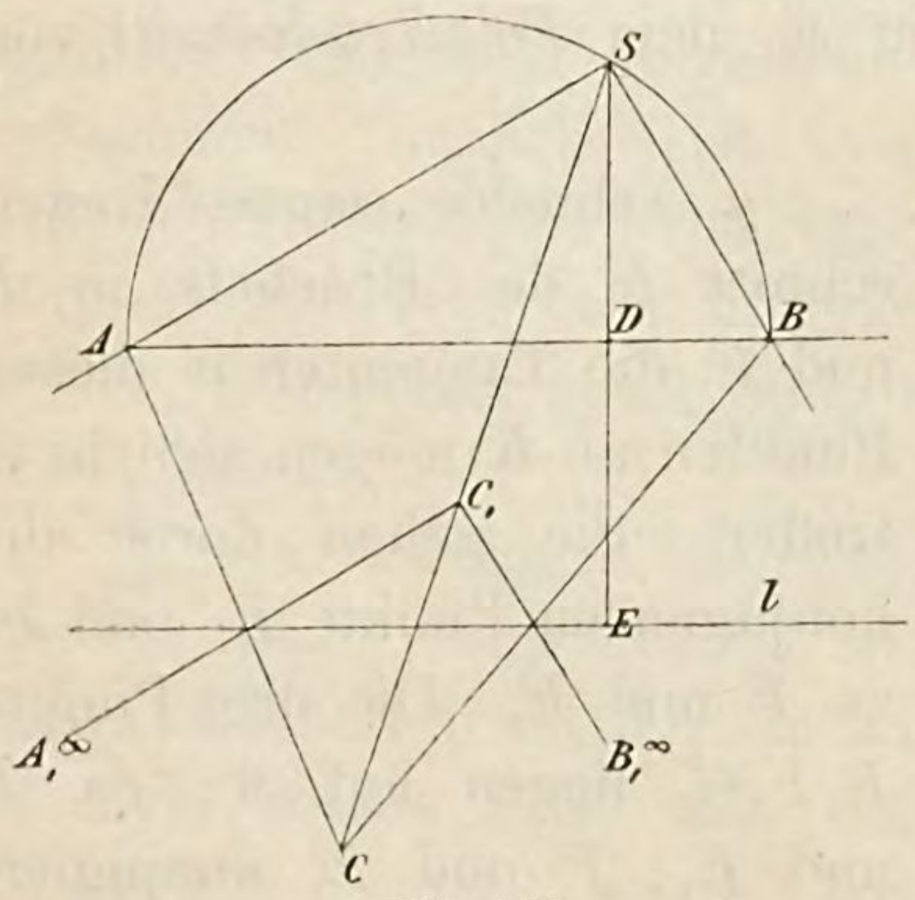


Fig. 176.

Poldreieck, so hat man die Verwandtschaft so zu wählen, dafs die der Geraden AB verwandte Gerade A_1B_1 ins Unendliche fällt und dafs dem Winkel ACB ein rechter Winkel verwandt ist. Der Scheitel desselben ist dann der Mittelpunkt und seine Schenkel sind die Axen des Kegelschnitts. Zu dem Zwecke beschreibe man über AB einen Halbkreis, nehme darauf beliebig S, fälle $SD \perp AB$, mache $DE = SD$, und $l \perp SE$ in E, dann sind S und l Centrum und Axe der Verwandtschaft; sind C und C_1 verwandte Punkte, $C_1A_1 \parallel CA$, $C_1B_1 \parallel CB$, so sind C_1A_1 und C_1B_1 die Axen der verwandten Kegelschnitte. Diese konstituieren ein Büschel, dessen Kegelschnitten andere verwandt sind, welche mit K_1K_2 ein Büschel bilden. Für dieses gilt daher der Satz:

Die Polaren eines Punktes P in Bezug auf alle Kegelschnitte eines Büschels, das vier reelle Grundpunkte oder keinen reellen Grundpunkt hat, schneiden sich in einem Punkte Q, dem konjugierten zu P in Bezug auf das Büschel.

447. Auf einer Geraden g seien AB durch CD harmonisch getrennt, die Pole von g bezüglich der Kegelschnitte des Büschels seien $G_1G_2G_3 \ldots$, die konjugierten Punkte zu $ABCD$ seien $A_1B_1C_1D_1$. Verbindet man letztere mit den Polen $G_1G_2G_3 \ldots$, so erhält man die Polaren von $ABCD$ und diese sind harmonisch, weil $ABCD$ harmonisch sind, daher ist der Ort von $G_1G_2G_3 \ldots$ ein Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, auf welchem auch $A_1B_1C_1D_1$ liegen. Läfst man CD, also auch C_1D_1 sich ändern, so erkennt man, dafs alle zu den Punkten von g konjugierten Punkte auf $\mathfrak{K}$, dem *Polarkegelschnitt* von g liegen.

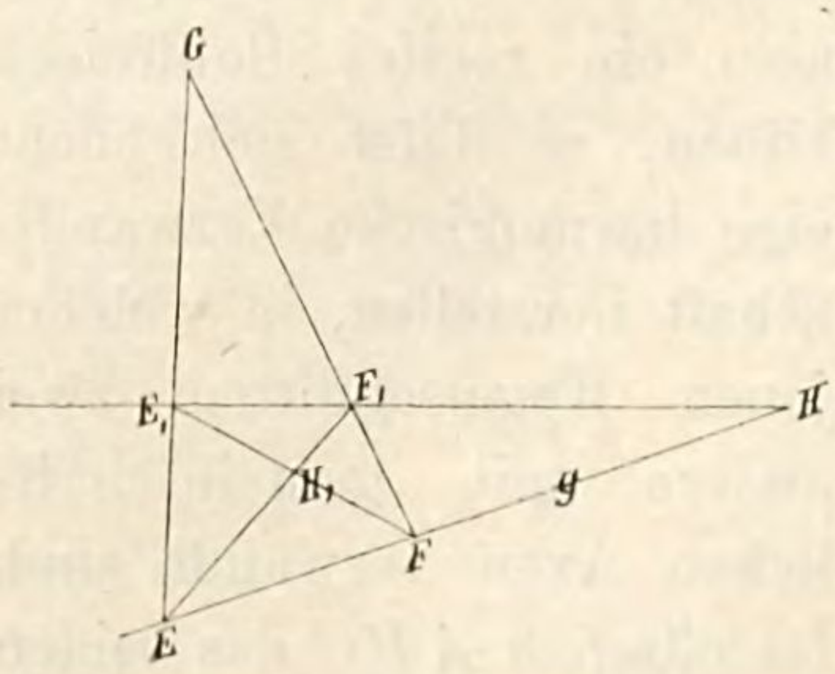


Fig. 177.

g schneide einen Kegelschnitt K des Büschels in E und F, die Tangenten in diesen Punkten an K mögen sich in G treffen. Sie gehen durch die konjugierten Punkte E_1 und F_1 zu E und F. Die drei Punkte E_1F_1G liegen auf $\mathfrak{K}$; da E und E_1, F und F_1 konjugiert sind, so sind auch H und H_1

konjugiert für alle Kegelschnitte des Büschels (cf. 192). Da aber H auf g liegt, so mufs H_1, wie vorhin bewiesen, auf $\mathfrak{K}$ liegen. Es ist also $GE_1H_1F_1$, ein diesem eingeschriebenes Viereck und EF sind konjugierte Punkte in Bezug auf $\mathfrak{K}$. Demnach bilden die Schnittpunkte von g mit allen Kegelschnitten des Büschels eine Involution. Zusammenfassend:

Die Pole einer Geraden g in Bezug auf die Kegelschnitte eines Büschels mit vier Grundpunkten oder ohne Grundpunkte liegen auf einem Kegelschnitte $\mathfrak{K}$, dem Polarkegelschnitte von g; auf diesem liegen auch diejenigen Punkte, welche den Punkten von g bezüglich des Büschels konjugiert sind.

Alle Kegelschnitte des Büschels schneiden eine Gerade g in den Punktpaaren einer Involution. — Die Punktpaare dieser Involution bestehen aus konjugierten Punkten bezüglich des Polarkegelschnittes $\mathfrak{K}$ von g.

Da die Mittelpunkte der Kegelschnitte die Pole der unendlich fernen Geraden g_∞ sind, so folgt auch noch:

Die Mittelpunkte aller Kegelschnitte eines Büschels mit vier Grundpunkten oder ohne Grundpunkte liegen auf einem Kegelschnitte $\mathfrak{M}$.

Die Involution, in welcher die Kegelschnitte eines Büschels eine Gerade schneiden, hat höchstens zwei Doppelpunkte. In ihnen berühren zwei Kegelschnitte die Gerade. Daraus aber folgt:

Von allen Kegelschnitten eines Büschels berühren im Allgemeinen zwei eine Gerade.

448. Es bleibt zu untersuchen, ob in den besprochenen Kegelschnittbüscheln Kegelschnitte von allen drei Gattungen vorkommen. Zunächst ist leicht zu erkennen, dafs in den Kegelschnittbüscheln, deren Kegelschnitte dieselben Axen haben, Ellipsen und Hyperbeln, aber keine Parabeln vorkommen, weil M der Mittelpunkt eines jeden Kegelschnittes ist und im Endlichen liegt.

Ist ein beliebiges Kegelschnittbüschel durch zwei Kegelschnitte K_1K_2 konstituiert, so läfst sich eine harmonische Verwandtschaft herstellen, in welcher allen Kegelschnitten des Büschels solche $\mathfrak{K}_1\mathfrak{K}_2$ mit denselben Axen verwandt sind. (Cf. 446.) S und l seien Centrum und Axe der Verwandtschaft, g sei die Mittellinie beider, also diejenige Gerade,

welcher g_∞ verwandt ist. Die Kegelschnitte des verwandten Büschels schneiden g in einer Involution; von dieser läfst sich leicht erkennen, ob sie Doppelpunkte hat oder nicht. Im ersten Falle sind ihnen auf g_∞ die Berührungspunkte der beiden einzigen im Büschel vorkommenden Parabeln verwandt.

Wenn die Gerade g, was leicht zu erkennen ist, alle Kegelschnitte des verwandten Büschels schneidet, so sind die Kegelschnitte des ursprünglichen Büschels $(K_1 K_2)$ Hyperbeln, denn jedem Punkte von g ist ein Punkt auf g_∞ verwandt.

Beschreibt man über jedem Punktpaare der auf g durch das Büschel $(\mathfrak{K}_1 \mathfrak{K}_2)$ ausgeschnittenen Involution Kreise, so bilden diese ein Büschel; von allen Kreisen desselben geht einer durch S, es sei derjenige über dem Punktpaare $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1$, in welchem g von $\mathfrak{K}_1$ getroffen wird; die Tangenten in $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1$ an $\mathfrak{K}_1$ schneiden sich im Pole $\mathfrak{M}_1$ von g bezüglich $\mathfrak{K}_1$. Ihm ist der Mittelpunkt M_1 von K_1 verwandt und den Geraden $\mathfrak{M}_1 \mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{M}_1 \mathfrak{B}_1$ sind zwei zu einander senkrechte Gerade in M_1 verwandt, die den Geraden $S\mathfrak{A}_1$ und $S\mathfrak{B}_1$ parallel sind; der Kegslschnitt K_1 ist also eine *gleichseitige* Hyperbel mit den zu $S\mathfrak{A}_1$ und $S\mathfrak{B}_1$ parallelen Asymptoten.

Sollte der Fall eintreten, dafs alle Kreise des vorhin konstruierten Kreisbüschels durch S gehen, so werden alle Kegelschnitte des Büschels $(K_1 K_2)$ gleichseitige Hyperbeln.

449. Die auseinandergesetze Methode ergiebt nicht das Polarsystem der Parabel; um gleichzeitig zu diesem zu gelangen, mufs man dieselbe etwas abändern.

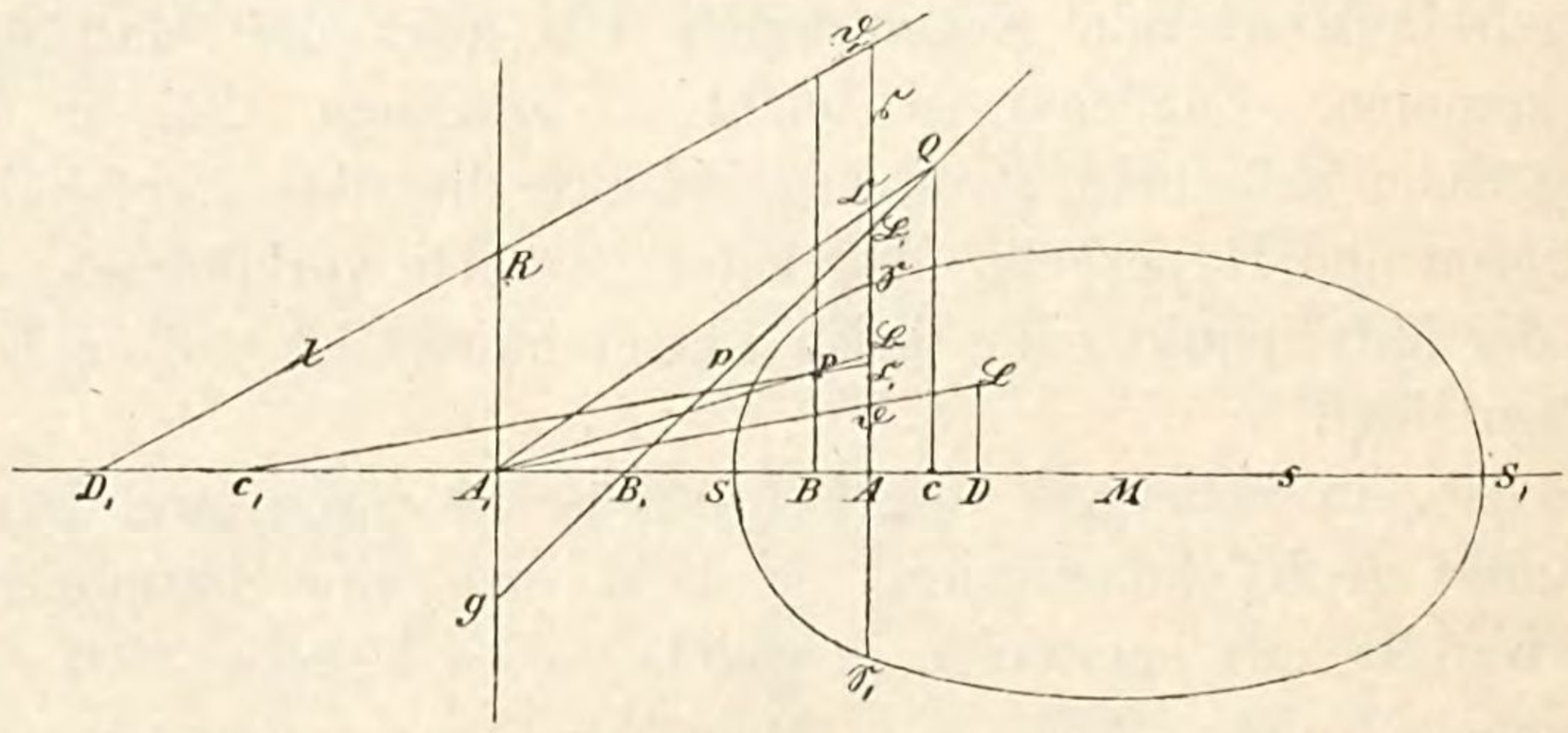


Fig. 178.

Zwei Gerade s und $\mathfrak{s}$ kreuzen sich senkrecht in A; auf

beiden seien Involutionen gegeben, deren Centralpunkte M und A sein mögen. Der zu A involutorisch zugeordnete Punkt auf s sei A_1. Es sei P ein beliebiger Punkt; man fälle $PB \perp s$ und schneide $\mathfrak{s}$ mit A_1P in $\mathfrak{B}$, verbinde dann die beiden B und $\mathfrak{B}$ involutorisch zugeordneten Punkte B_1 und $\mathfrak{B}_1$ durch die Gerade p und ordne P und p als Pol und Polare einander zu. Wie man von der Geraden p zu ihrem Pole P gelangt, ist sofort ersichtlich.

Auf p nehme man beliebig den Punkt Q, fälle $QC \perp s$, schneide $\mathfrak{s}$ mit A_1Q in $\mathfrak{C}$, konstruiere den zu C involutorisch zugeordneten Punkt C_1 und schneide $\mathfrak{s}$ mit PC_1 in $\mathfrak{C}_1$, so läfst sich zeigen, dafs $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}_1$ auf $\mathfrak{s}$ involutorisch zugeordnet sind und dafs die Gerade $\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$ also die Polare q von Q ist. — Aus ähnlichen Dreiecken folgt:

$$A\mathfrak{C}_1 = \frac{BP \,.\, AC_1}{BC_1}, \quad BP = \frac{A\mathfrak{B} \,.\, A_1B}{AA_1}, \text{ also}$$

$$A\mathfrak{C}_1 = \frac{AC_1 \,.\, A\mathfrak{B} \,.\, A_1B}{BC_1 \,.\, AA_1}$$

$$A\mathfrak{C} = \frac{CQ \,.\, AA_1}{A_1C}, \quad CQ = \frac{A\mathfrak{B}_1 \,.\, B_1C}{AB_1} \text{ und daher}$$

$$A\mathfrak{C} = \frac{AA_1 \,.\, A\mathfrak{B}_1 \,.\, B_1C}{A_1C \,.\, AB_1}.$$

Durch Multiplikation

$$A\mathfrak{C} \,.\, A\mathfrak{C}_1 = \frac{AC_1 \,.\, A\mathfrak{B} \,.\, A_1B \,.\, A\mathfrak{B}_1 \,.\, B_1C}{BC_1 \,.\, A_1C \,.\, AB_1}.$$

Bezeichnet man nun die Potenzen der Involutionen auf s und $\mathfrak{s}$ mit a^2 und $\mathfrak{a}^2$, so ist

$$A\mathfrak{B} \,.\, A\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{a}^2 \text{ und}$$

$$MA \,.\, MA_1 = MB \,.\, MB_1 = MC \,.\, MC_1 = a^2.$$

Aus den letzten Gleichungen folgen die Proportionen

$$MA : MB = MB_1 : MA_1$$

$$MB : MC = MC_1 : MB_1$$

$$MC : MA = MA_1 : MC_1$$

und aus diesen durch leichte Umformung

$$AB_1 : A_1B = MA : MB$$

$$BC_1 : B_1C = MB : MC$$

$$CA_1 : C_1A = MC : MA,$$

also durch Zusammensetzung

$$AB_1 \,.\, BC_1 \,.\, CA_1 = A_1B \,.\, B_1C \,.\, C_1A,$$

daher

$$A\mathfrak{C} \,.\, A\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{a}^2.$$

Es sind also $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}_1$ involutorisch zugeordnete Punkte und $\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$ ist die Polare q von Q. Daraus aber ergiebt sich die Haupteigenschaft des Polarsystems:

Durchläuft ein Punkt eine Gerade, so dreht sich seine Polare um den Pol der Geraden und umgekehrt.

Die Polaren von vier harmonischen Punkten sind harmonische Strahlen und die Pole von vier harmonischen Strahlen sind harmonische Punkte.

Wenn man die Konstruktion der Polare für einen Punkt von s vornimmt, so ergiebt sich, dafs die Polare desselben im involutorisch zugeordneten Punkte auf s senkrecht steht.

Für die Punkte der Geraden g, welche in A_1 auf s senkrecht steht, versagt die obige Konstruktion der Polare. Ist R ein Punkt von g, so lege man durch R zwei Gerade l und l' und konstruiere ihre Pole L und L', dann mufs der Pol von LL' nach dem obigen Satze sowohl auf l als auf l' liegen, also R sein; daher ist LL' die Polare von R. Dieselbe mufs durch A gehen, da A der Pol von g ist.

Um aufser den harmonischen Beziehungen auch die Brennpunktseigenschaften abzuleiten, nehme man noch an, dafs die Involutionen auf s und $\mathfrak{s}$ die reellen Doppelpunkte SS_1 und $\mathfrak{S}\mathfrak{S}_1$ haben und dafs AA_1 mittelst der Proportion

$$MS : MA = AA_1 : A\mathfrak{S}$$

bestimmt seien. Schneidet nun die Gerade l die Geraden s und $\mathfrak{s}$ in D_1 und $\mathfrak{D}_1$ und sind D und $\mathfrak{D}$ involutorisch zugeordnet, so ist $A\mathfrak{D} \,.\, A\mathfrak{D}_1 = A\mathfrak{S}^2 = \dfrac{MA^2 \,.\, AA_1{}^2}{MS^2}$

$$= \frac{MA^2 \,.\, AA_1{}^2}{MA \,.\, MA_1} = \frac{MA \,.\, AA_1{}^2}{MA_1}.$$

Aus ähnlichen Dreiecken folgt

$$A\mathfrak{D} = \frac{DL \,.\, AA_1}{A_1D}, \quad A\mathfrak{D}_1 = \frac{A_1R \,.\, AD_1}{A_1D_1}, \quad \text{also}$$

$$\frac{DL \,.\, A_1R \,.\, AD_1}{A_1D \,.\, A_1D_1} = \frac{MA \,.\, AA_1}{MA_1}.$$

Da aber $MA \,.\, MA_1 = MD \,.\, MD_1$, so folgt

$$MA : MD = MD_1 : MA_1$$

und hieraus durch eine einfache Umformung

$$AD : A_1D_1 = MA : MD_1$$
$$AD_1 : A_1D = MD_1 : MA_1, \text{ also}$$

$$AD \,.\, AD_1 : A_1D_1 \,.\, A_1D = MA : MA_1$$

und durch Substitution

$$A_1R \,.\, DL = AA_1 \,.\, AD \text{ oder}$$
$$A_1R : AA_1 = AD : DL.$$

Aus dieser Proportion folgt die Ähnlichkeit der Dreiecke AA_1R und ADL. Mithin steht AL senkrecht auf AR. Dies aber ist die fundamentale Eigenschaft von Brennpunkt und Leitlinie, aus welcher sich die übrigen leicht ergeben.

450. *Ein Polarsystem ist auch bestimmt durch zwei Involutionen konjugierter Punkte und den Pol des Trägers der einen.*

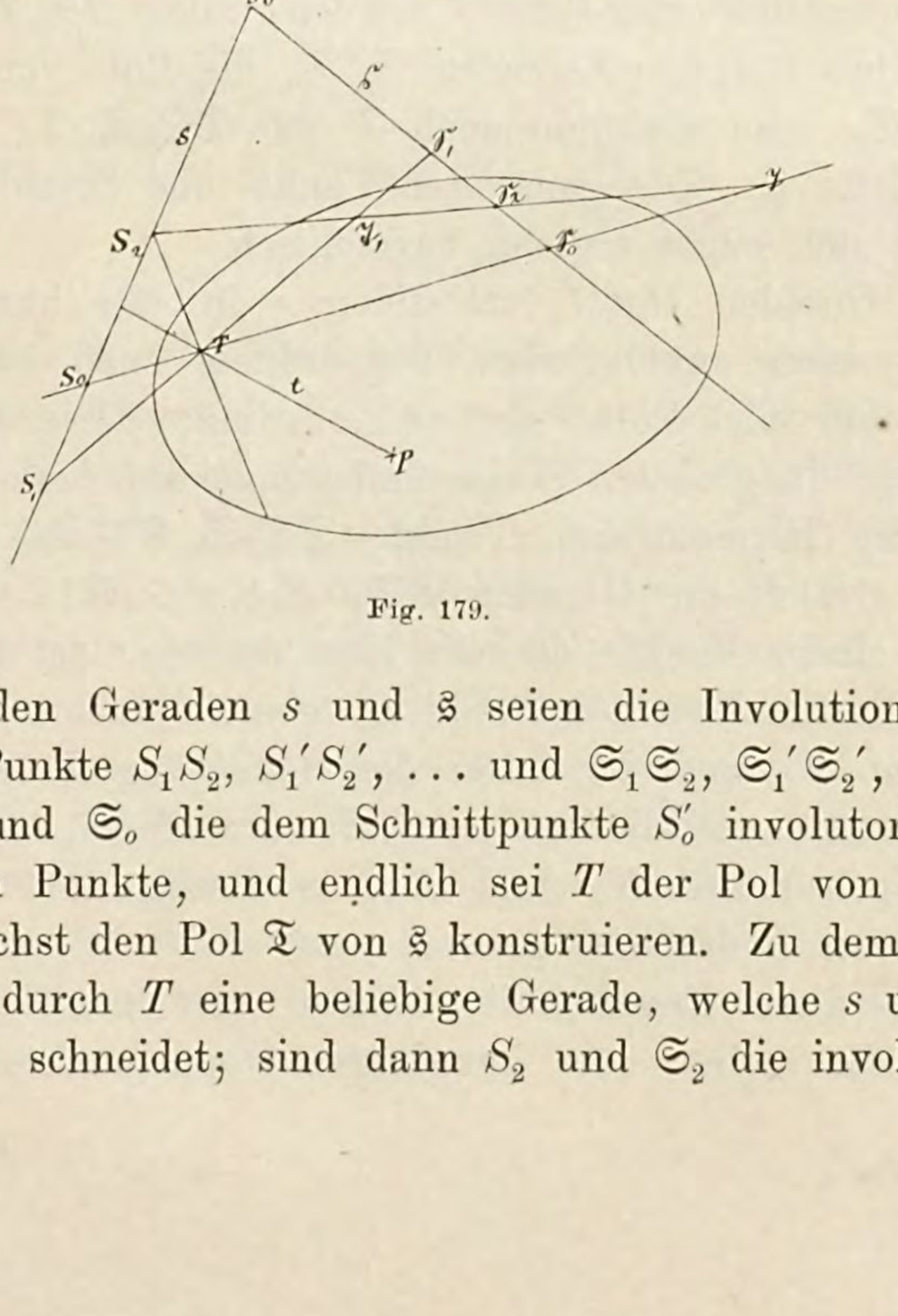


Fig. 179.

Auf den Geraden s und $\mathfrak{s}$ seien die Involutionen konjugierter Punkte S_1S_2, $S_1'S_2'$, ... und $\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_1'\mathfrak{S}_2'$, ...; es seien S_o und $\mathfrak{S}_o$ die dem Schnittpunkte S_o' involutorisch zugeordneten Punkte, und endlich sei T der Pol von s. Man kann zunächst den Pol $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{s}$ konstruieren. Zu dem Zwecke lege man durch T eine beliebige Gerade, welche s und $\mathfrak{s}$ in S_1 und $\mathfrak{S}_1$ schneidet; sind dann S_2 und $\mathfrak{S}_2$ die involutorisch

zugeordneten Punkte, so schneidet $S_2\mathfrak{S}_2$ die Gerade $S_o\mathfrak{S}_o$ im Pole $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{s}$. — In der That ist S_2 der Pol von $S_1\mathfrak{S}_1$ und da die Polare von $\mathfrak{S}_1$ durch $\mathfrak{S}_2$ gehen mufs, so ist $S_2\mathfrak{S}_2$ die Polare von $\mathfrak{S}_1$; da aber auch $S_o\mathfrak{S}_o$ die Polare von S_o' ist, so ist $\mathfrak{T}$ der Pol von $\mathfrak{s}$.

Ist ferner $\mathfrak{T}_1$ der Schnittpunkt von $S_1\mathfrak{S}_1$ mit $S_2\mathfrak{S}_2$, so sind die Schnittpunkte des Kernkegelschnittes mit $S_1\mathfrak{S}_1$, falls solche reell vorhanden sind, harmonisch getrennt durch S_1T und $\mathfrak{S}_1\mathfrak{T}_1$. — Man findet also beliebig viele Punkte des Kernkegelschnittes K oder, wenn solche nicht reell vorhanden sind, auf einer Geraden die Involution konjugierter Punkte.

Wenn T mit S_o zusammenfällt, so fällt S_1 mit S_o und daher S_2 mit S_o' zusammen, also $\mathfrak{T}$ mit $\mathfrak{S}_o$. Daher sind S_1 und die sämtlichen Punkte von s wie von $\mathfrak{s}$ Punkte des Kernkegelschnittes; derselbe besteht in diesem Falle aus dem Geradenpaar $(s\mathfrak{s})$; er heifse K_o.

Durch zwei andere Punkte T_m und T_n, die auf $S_o\mathfrak{S}_o$ so gewählt sein sollen, dafs sie TS_o harmonisch trennen, sind zwei andere Polarsysteme K_m und K_n bestimmt.

Man verbinde einen Punkt P mit den Punkten $TS_o\,T_m\,T_n$ durch die Geraden $tt_o\,t_m\,t_n$. Es seien $\mathfrak{T}_m\,\mathfrak{T}_n$ die Pole von $\mathfrak{s}$ bezüglich K_mK_n; man verbinde auch P mit $\mathfrak{T}\mathfrak{S}_o\,\mathfrak{T}_m\,\mathfrak{T}_n$ durch die Geraden $\mathfrak{t}\mathfrak{t}_o\,\mathfrak{t}_m\,\mathfrak{t}_n$. Die genannten Punkt- und Strahlengruppen sind, wie sich leicht ergiebt, harmonisch.

Die Geraden $tt_o\,t_m\,t_n$ schneiden s in vier harmonischen Punkten, deren involutorisch zugeordnete auch harmonische Punkte und die Pole von $\mathfrak{t}\mathfrak{t}_o\,\mathfrak{t}_m\,\mathfrak{t}_n$ sind; diese Pole seien $SS_o'S_mS_n$. In gleicher Weise findet man auf $\mathfrak{s}$ als Pole von $\mathfrak{t}\mathfrak{t}_o\,\mathfrak{t}_m\,\mathfrak{t}_n$ die harmonischen Punkte $\mathfrak{S}S_o'\mathfrak{S}_m\mathfrak{S}_n$ und daher als Polaren von P die Geraden $S\mathfrak{S}$, $S_o'S_o'$, $S_m\mathfrak{S}_m$, $S_n\mathfrak{S}_n$, die sich in einem Punkte Q schneiden müssen, da die harmonischen Punktreihen den Punkt S_o' gemein haben.

Wenn T_m und T_n, unter der Bedingung T und S_o harmonisch zu trennen, die Geraden $S_o\mathfrak{S}_o$ durchlaufen, so erhält man neue Kegelschnitte K_m und K_n, in Bezug auf welche die Polaren von P durch Q gehen.

Alle diese Kegelschnitte haben vier gemeinschaftliche Punkte, die reellen oder imaginären Doppelpunkte der Invo-

lutionen auf s und $\mathfrak{s}$. Besitzen beide Involutionen reelle Doppelpunkte, so haben alle Kegelschnitte vier reelle Schnittpunkte; sonst haben sie zwei reelle und zwei imaginäre oder vier imaginäre Schnittpunkte. In allen drei Fällen bilden sie ein Kegelschnittbüschel, für dieses gilt der Satz:

Die Polaren eines Punktes in Bezug auf die Kegelschnitte eines Büschels schneiden sich in einem Punkte.

Aus ihm leitet man die übrigen Polareigenschaften des Kegelschnittbüschels leicht ab. Cf. 447.

450a. *Ein Polarsystem ist durch fünf Punkte bestimmt.*

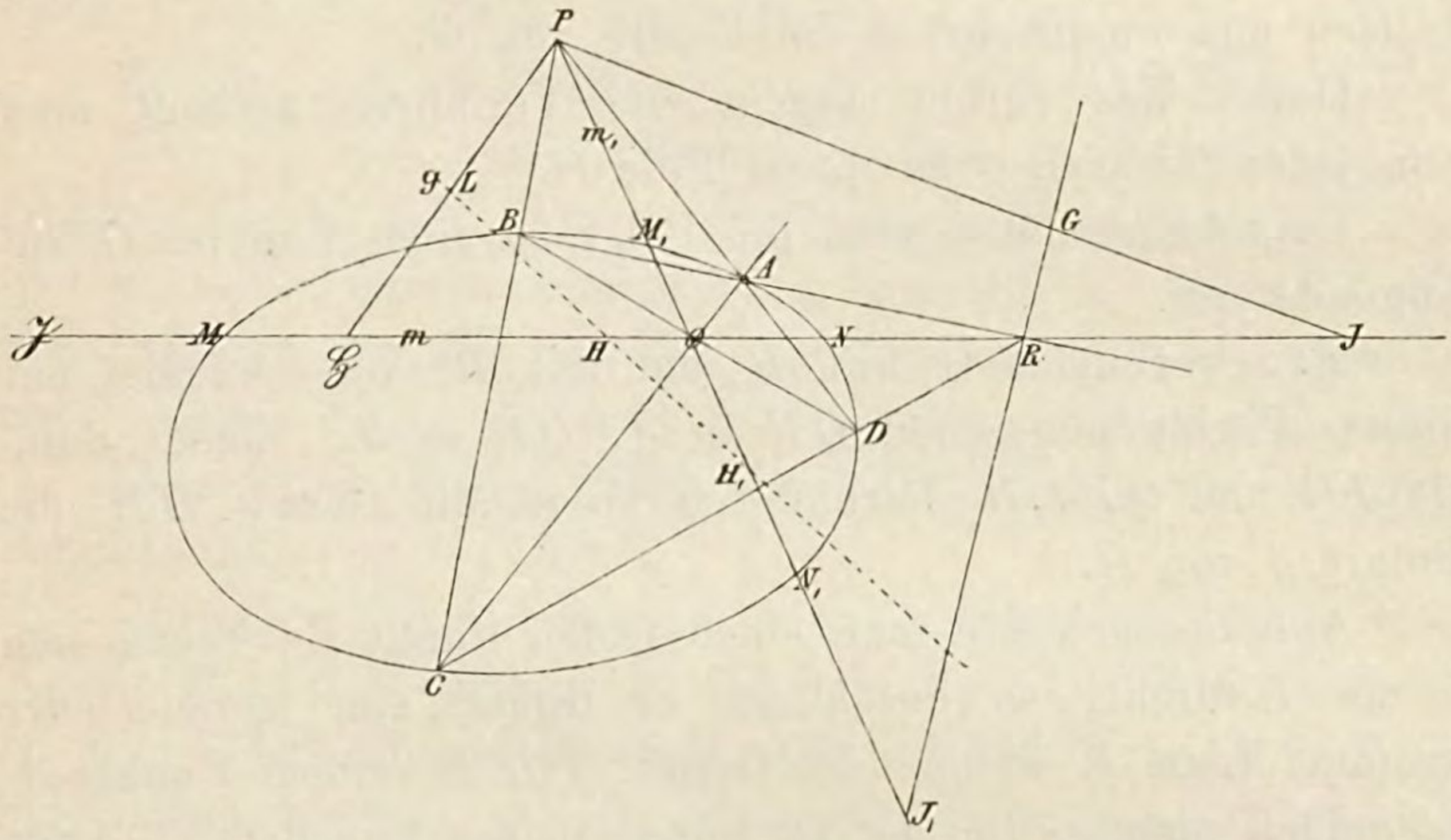


Fig. 180.

$ABCDE$ seien fünf beliebige Punkte; man konstruiere das Diagonaldreieck PQR des vollständigen Vierecks $ABCD$. Durch P ziehe man die Gerade PE und bestimme auf ihr denjenigen Punkt F, welcher E von P und QR harmonisch trennt. Wegen der harmonischen Eigenschaften des vollständigen Vierseits müssen sich die Geraden CE und DF, sowie DE und CF in zwei Punkten S und T von QR schneiden. Auf der letzteren Geraden konstruiere man nun diejenigen Punkte M und N, welche sowohl die Strecke QR als ST harmonisch trennen. Cf. Fig. 54. Seite 91.

In gleicher Weise ziehe man RE und bestimme auf dieser Geraden denjenigen Punkt F_1, welcher E von R und PQ harmonisch trennt; dann müssen sich, wie aus den harmo-

nischen Eigenschaften des vollständigen Vierseits folgt, die Geraden BE und CF_1 sowie BF_1 und CE in zwei Punkten S_1 und T_1 von PQ schneiden. Wie vorhin bestimme man auf dieser Geraden diejenigen Punkte M_1 und N_1, welche PQ und S_1T_1 gleichzeitig harmonisch teilen.

Die Geraden QR und PQ mögen mit m und m_1 bezeichnet werden.

Eine beliebige Gerade g schneide m in H und m_1 in H_1; man mache $MNHJ$ und $M_1N_1H_1J_1$ harmonisch, so dafs HJ sowie H_1J_1 zugeordnete Punkte sind, ziehe PJ und RJ_1, so soll der Schnittpunkt G dieser beiden Geraden der Pol von g heifsen und umgekehrt g die Polare von G.

Durch das vorher angegebene Verfahren gelangt man von jeder Geraden g zu ihrem Pole G.

Umgekehrt findet man die Polare g eines Punktes G auf folgende Art.

Man verbindet G mit P und mit R und schneidet mit diesen Verbindungslinien QR in J, QP in J_1, macht dann $QRJH$ und QPJ_1H_1 harmonisch, so ist die Gerade HH_1 die Polare g von G.

Auf dieser wähle man einen festen Punkt L. Wenn sich g um L dreht, so durchläuft G irgend eine gerade oder krumme Linie l, welche die Gerade PR in einem Punkte U schneiden mag. — Bei der Drehung gelangt g auch in die Lage LQ; es fallen hier die Punkte H und H_1 mit Q, J mit R und J_1 mit P zusammen; der Schnittpunkt G der Geraden PR und RP wird also unbestimmt; man findet ihn aber in dem Punkte U, dem Schnittpunkte von PR mit l.

Sind nun $g'g''$ zwei Gerade durch L, welche eine beliebige Gerade g harmonisch von LQ trennen, und QR in $H'H''$, QP in $H_1'H_1''$ schneiden, so sind $HQH'H''$ und $H_1QH_1'H_1''$ je vier harmonische Punkte. Macht man

$$QRH'J',\ QRH''J'',\ QPH_1'J_1',\ QPH_1''J_1''$$

harmonisch, so dafs $H'J'$, $H''J''$, $H_1'J_1'$, $H_1''J_1''$ zugeordnete Punkte sind, so sind auch

$$JRJ'J'' \text{ und } J_1PJ_1'J_1''$$

je vier harmonische Punkte und die Strahlen $P(JRJ'J'')$ und

$R\,(J_1 P J_1' J_1'')$ harmonische Strahlenbüschel. Diese haben den Strahl PR gemeinsam, also liegen die Schnittpunkte L von PJ und RJ_1, L' von PJ' und RJ_1', L'' von PJ'' und RJ_1'' auf einer Geraden. Diese Gerade geht durch den festen Punkt U auf PR und bleibt, wenn man g festhält, dieselbe, wie man auch g' und g'' wählen mag, wofern diese Geraden nur g und LQ harmonisch trennen, da sie stets durch G, den Pol von g geht.

Demnach liegen die Pole aller Geraden durch einen Punkt L auf einer Geraden l und die Polaren aller Punkte einer Geraden l schneiden sich in einem Punkte L.

Es läfst sich nachweisen, dafs L und l Pol und Polare sind.

Wenn g sich um L dreht, so kommt es auch in die Lagen LP und LR. Die erste Gerade LP schneide m in $\mathfrak{H}$ und m_1 in P; man mache $MN\mathfrak{H}\mathfrak{J}$ harmonisch. Dann ist der Schnittpunkt von $P\mathfrak{J}$ mit QR der Pol von LP; da derselbe auf l liegen mufs, so ist $\mathfrak{J}$ der Schnittpunkt von QR mit l

In gleicher Weise findet man den Pol $\mathfrak{J}_1$ von LR als Schnittpunkt von QP mit l.

Um aber die Polare von L zu konstruieren, mufs man L mit P und R verbinden, die Schnittpunkte $\mathfrak{H}$ mit m und $\mathfrak{H}_1$ mit m_1 bestimmen, die Punktreihen $MN\mathfrak{H}\mathfrak{J}$ und $M_1 N_1 \mathfrak{H}_1 \mathfrak{J}_1$ harmonisch machen, so dafs $\mathfrak{H}\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{H}_1\mathfrak{J}_1$ zugeordnete Punkte sind, und endlich $\mathfrak{J}$ mit $\mathfrak{J}_1$ verbinden. Diese Verbindungsgerade ist die Polare von L und fällt demnach mit l zusammen. Der vorige Satz nimmt mithin die genauere Fassung an:

Die Pole aller Geraden durch einen Punkt liegen auf der Polare des Punktes und

Die Polaren aller Punkte einer Geraden schneiden sich im Pol der Geraden.

Von besonderem Interesse ist es, solche Punkte aufzusuchen, die auf ihren Polaren liegen.

Zunächst weifs man, dafs die Punkte MNM_1N_1 diese Eigenschaft besitzen. Denn um die Polare von M zu bestimmen, mufs man M mit P und R verbinden, darauf m und m_1 mit MP und MR schneiden, die Schnittpunkte sind M

und Q, zu diesen bezüglich MN und M_1N_1 die zugeordneten harmonischen M und P suchen und M mit P verbinden.

Durch M lege man beliebig die Gerade s und wähle auf ihr den Punkt X, dessen Polare x die Gerade s in X_1 schneiden mag. Es mufs dann nach dem obigen Satze die Polare x_1 von X_1 durch X gehen. Ist nun M' der zu M bezüglich XX_1 zugeordnete harmonische Punkt, m' seine Polare, so müssen die vier Polaren MP, m', x, x_1 der vier harmonischen Punkte M, M', X, X_1 vier harmonische Strahlen sein, wie sich unmittelbar aus der Konstruktion von Pol und Polare folgern läfst. Da aber MP durch M, x durch X_1, x_1 durch X geht, so mufs m' durch M' gehen und es ist M' ein solcher Punkt von s, der auf seiner Polare liegt.

Es kann aber auf s keinen dritten Punkt von dieser Eigenschaft geben. Denn wäre etwa M'' ein solcher und m'' seine Polare; wären $MM'M''Y$ harmonisch, so müssten auch die Polaren MP, $m'm''y$ harmonisch sein und da MP, m' und m'' durch ihre Pole M, M' und M'' gehen, so müsste auch Y auf seiner Polare y liegen.

Somit erfüllen alle Punkte, welche auf ihren Polaren liegen, eine Kurve $\mathfrak{K}$ II. O. Sind OO_1 zwei ganz beliebige solche Punkte, Z ein Punkt von OO_1, z seine Polare, welche OO_1 in Z_1 schneidet, so mufs die Polare z_1 von Z_1 durch Z gehen. Sind $OO'ZZ_1$ harmonisch, so sind auch ihre Polaren $oo'zz_1$ harmonisch. Da o durch O, z durch Z_1, z_1 durch Z geht, so mufs o' durch den vierten harmonischen, dem Punkte O bezüglich Z und Z_1 zugeordneten Punkt, also durch O_1 gehen und es mufs also O_1 mit O' zusammenfallen. Daraus aber folgt:

Jede Sehne der Kurve $\mathfrak{K}$ wird durch einen ihrer Punkte und seine Polare harmonisch geteilt.

Hieraus aber läfst sich zeigen, dafs $\mathfrak{K}$ ein Kegelschnitt ist.

Fig. 181. Die Polare eines Punktes G läfst sich mit Hilfe der eben entwickelten Eigenschaften nun auch in folgender Weise konstruieren. Es mögen die Tangenten a durch A und b durch B die Gerade PQ in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ treffen; man schneide AD mit $\mathfrak{A}G$ in $\mathfrak{A}_1$, BC mit $\mathfrak{B}G$ in $\mathfrak{B}_1$, mache $AD\mathfrak{A}_1A_1$ und $BC\mathfrak{B}_1B_1$ harmonisch, so dafs $\mathfrak{A}_1A_1$ und $\mathfrak{B}_1B_1$ harmonisch sind, so ist A_1B_1 die Polare von G.

Denn A_1 ist der Pol von $\mathfrak{A}G$, weil es erstens auf der Polare AD von $\mathfrak{A}$ liegt und weil zweitens $AD\mathfrak{A}_1A_1$ harmonische Punkte sind. Da auch B_1 der Pol von $\mathfrak{B}G$ ist, so mufs A_1B_1 die Polare von G sein.

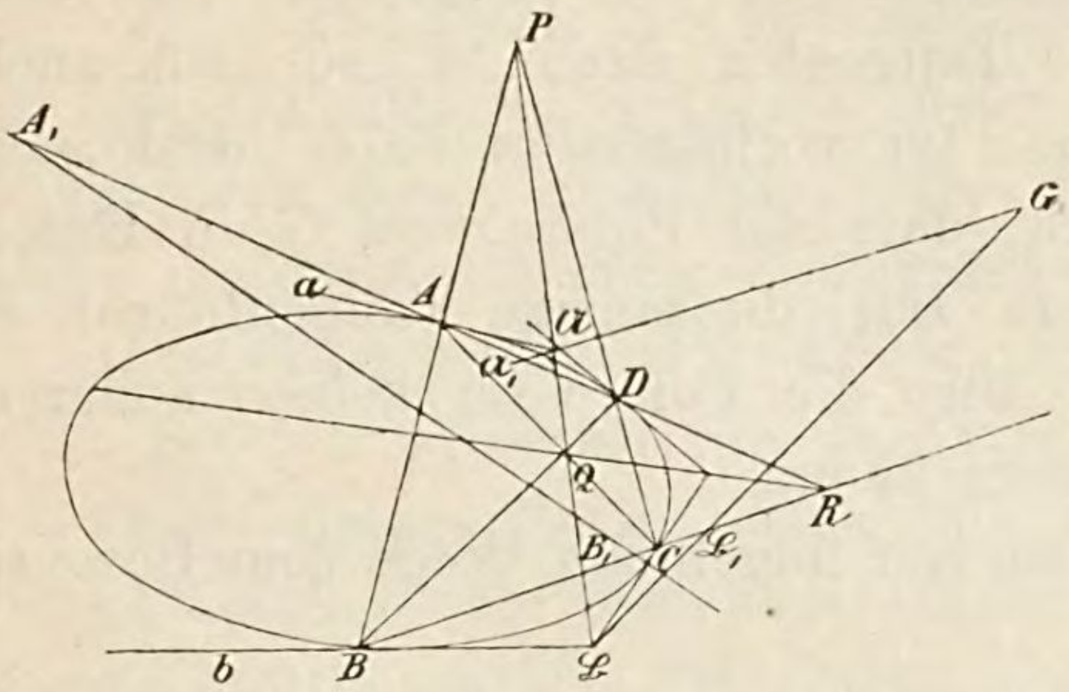


Fig. 181.

Durch die Punkte $ABCD$ und die Tangente a in A ist der Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ bestimmt. Läfst man die Tangente a mit der Geraden AR zusammenfallen, so degeneriert $\mathfrak{K}$ in das Geradenpaar (AR, BR). Dreht sich a um A, so durchläuft $\mathfrak{K}$ ein Büschel von Kegelschnitten mit den Grundpunkten $ABCD$.

Will man die Polare von G bezüglich des Geradenpaares (AR, BR) bestimmen, so fallen zunächst die Punkte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ mit den Punkten $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{C}$ zusammen, in denen PQ die Geraden AR und BR trifft, also vereinigen sich A_1 und B_1 in R und die Polare von G geht durch R und mufs G von AR und BR wegen des letzten Satzes harmonisch trennen. Es seien g und $\mathfrak{g}$ die Polaren von G bezüglich $\mathfrak{K}$ und (AR, BR).

Sind a' und a'' zwei solche Gerade durch A, welche a und AR harmonisch trennen, so bestimmen sie als Tangenten zwei Kegelschnitte $\mathfrak{K}'$ und $\mathfrak{K}''$ des Büschels und es sind

$$\mathfrak{A}\mathfrak{D}\mathfrak{A}'\mathfrak{A}'', \quad \mathfrak{A}_1\mathfrak{D}\mathfrak{A}_1'\mathfrak{A}_1'', \quad A_1RA_1'A_1'' \text{ sowie}$$
$$\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{B}'\mathfrak{B}'', \quad \mathfrak{B}_1\mathfrak{C}\mathfrak{B}_1'\mathfrak{B}_1'', \quad B_1RB_1'B_1''$$

je vier harmonische Punkte. Die Verbindungslinien

$$A_1B_1, \quad A_1'B_1', \quad A_1''B_1''$$

sind die Polaren von G in Bezug auf die Kegelschnitte $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}'$, $\mathfrak{K}''$ und müssen sich, da die harmonischen Punktreihen den Punkt R gemeinschaftlich haben, in einem Punkte $\mathfrak{G}$ schneiden. Durch diesen Punkt mufs auch die Polare von G in Bezug auf das Geradenpaar (AR, BR) gehen.

Letzteres ergiebt sich aus folgender Überlegung.

Wenn auf jeder der Geraden m und m_1 vier harmonische

Punkte liegen, so sind die vier Verbindungslinien derselben Tangenten eines Kegelschnittes, der auch m und m_1 berührt. Degeneriert dieser Kegelschnitt in ein Punktpaar $Q\mathfrak{G}$ und gehen drei von den vier Tangenten durch $\mathfrak{G}$, so mufs auch die vierte hindurchgehen. Im vorliegenden Falle liefse sich überdies noch nachweisen, dafs die Polare von G in Bezug auf das Geradenpaar (AR, BR) die einzige Tangente von G durch $\mathfrak{G}$ sein mufs, dafs also die Polare für keinen anderen Kegelschnitt durch $\mathfrak{G}$ gehen kann.

Man kann jedoch auch auf folgendem Wege zum Beweise gelangen.

Man wähle die drei Geradenpaare

$$(AB, CD), \quad (AC, BD), \quad (AD, BC)$$

als Kegelschnitte aus dem Büschel, mache AB, AC, AD, a harmonisch, so dafs AD und a zugeordnet sind; es soll K der Kegelschnitt des Büschels sein, welcher a berührt. Dann findet man wie vorhin, dafs die Polaren von G in Bezug auf

$$(AB, CD), \quad (AC, BD), \quad K$$

sich in einem Punkte $\mathfrak{G}$ schneiden.

Bei der Konstruktion hatten die Punkte P und Q eine von R verschiedene Rolle; man kann jedoch zwei derselben mit einander vertauschen und wenn man dann von neuem die Konstruktion durchführt, so findet man, dafs die Polaren von G in Bezug auf

$$(AB, CD), \quad (AD, BC), \quad K$$

oder

$$(AC, BD), \quad (AD, BC), \quad K$$

sich in einem Punkte $\mathfrak{G}$ treffen. Daraus folgt zunächst der schon früher bewiesene Satz:

Die Polaren eines Punktes in Bezug auf die drei Geradenpaare eines Büschels schneiden sich in einem Punkte.

Ist nun a' eine feste Gerade durch A, so bestimmt sie einen Kegelschnitt K' des Büschels. Man mache

$$AB, a', AC, a'' \text{ und } AB, a', AD, a'''$$

harmonisch, so dafs AC nnd a'', sowie AD und a''' zugeordnet sind. Durch a'' und a''' als Tangenten sind zwei Kegelschnitte K'' und K''' bestimmt. Wiederholt man jetzt die

frühere Konstruktion, so ergiebt sich, dafs sich die Polaren von G bezüglich

K', (AC, BD), K'' und auch K', (AD, BC), K'''

in einem Punkte schneiden. Durch diesen aber mufs nach dem letzten Satze auch die Polare in Bezug auf (AB, CD) gehen, so dafs also ohne Einschränkung bewiesen ist:

Die Polaren eines Punktes in Bezug auf die Kegelschnitte eines Büschels schneiden sich in einem Punkte.

Von diesem Satze ausgehend gelangt man, wie schon früher gezeigt, zu den hauptsächlichsten Eigenschaften des Kegelschnittbüschels. Um diese unmittelbar aus der Konstruktion von Pol und Polare abzuleiten, mufs man zunächst einen Hilfssatz beweisen.

„Sind $O_1 O_2 O_3 O_4$ die Mittelpunkte von vier Kreisen eines Büschels mit den Grundpunkten A und B, sind die Tangenten $a_1 a_2 a_3 a_4$ in A vier harmonische Strahlen, so sind auch die Polaren eines beliebigen Punktes P in Bezug auf die vier Kreise vier harmonische Strahlen.“

Die Radien AO_1, AO_2, AO_3, AO_4, stehen auf vier harmonischen Strahlen senkrecht und sind daher selbst harmonisch; also sind $O_1 O_2 O_3 O_4$, sowie die Strahlen $P(O_1 O_2 O_3 O_4)$ harmonisch und da die Polaren von P auf letzteren senkrecht stehen, so sind es auch diese.

Aus diesem Satze aber folgert man weiter:

Sind $A_1 A_2 A_3 A_4$ vier harmonische Punkte, ist A irgend ein fester Punkt derselben Geraden, sind

$$M_1 N_1,\ M_2 N_2,\ M_3 N_3,\ M_4 N_4$$

vier Punktpaare einer Involution, welche bezüglich

$$A A_1,\ A A_2,\ A A_3,\ A A_4$$

harmonisch trennen, so sind auch die vier Punkte $B_1 B_2 B_3 B_4$, welche einen festen Punkt B derselben Geraden von jenen involutorischen Punktpaaren harmonisch trennen, harmonische Punkte.

In Bezug auf einen Kegelschnitt K des Büschels wurde der Pol von g gefunden, indem man m und m_1 (Fig. 180.) mit g in H und H_1 schnitt, $MNJH$ und $M_1 N_1 J_1 H_1$ harmonisch machte und PJ mit RJ_1 in G zum Durchschnitt brachte.

Man denke sich nun in A vier harmonische Gerade $aa'a''a'''$, so sind durch sie als Tangenten vier Kegelschnitte $KK'K''K'''$ bestimmt. Wegen des oben bewiesenen Hilfssatzes sind dann auch $JJ'J''J'''$ und $J_1J_1'J_1''J_1'''$ harmonisch und daher auch $P(JJ'J''J''')$ und $R(J_1J_1'J_1''J_1''')$, folglich liegen die vier Pole $GG'G''G'''$ mit den Punkten P und R auf einem Kegelschnitte. (188.)

Dieselbe Rolle, wie den Punkten P und R bei der Konstruktion des Poles von g kann man den Punkten P und Q zugestehen und daraus schliefst man sofort, dafs auch Q auf dem Kegelschnitte liegt.

Hält man a und a' fest, wählt aber zwei andere Gerade $a_1''a_1'''$, welche jene harmonisch trennen, so bestimmen sie zwei andere Kegelschnitte des Büschels, in Bezug auf welche die Pole $G_1''G_1'''$ sein mögen. Diese müssen dann mit $GG'PQR$ auf einem Kegelschnitte liegen, der mit dem ersten zusammenfällt und somit folgt:

Die Pole einer Geraden in Bezug auf die Kegelschnitte eines Büschels liegen auf einem Kegelschnitte.

Dieser schneidet g im Allgemeinen in zwei Punkten, diese sind daher Pole von g in Bezug auf solche Kegelschnitte, welche g berühren; daher:

In einem Kegelschnittbüschel giebt es im Allgemeinen zwei Kegelschnitte, welche eine Gerade berühren.

Aus den entwickelten Polareigenschaften ergiebt sich wie schon früher gezeigt, (414.) die Haupteigenschaft des Büschels jede Gerade in einer Involution zu schneiden. Die letztere löst folgende Aufgaben:

I. *Von zwei Kegelschnitten kennt man drei Schnittpunkte und noch je zwei Punkte; man soll den vierten Schnittpunkt bestimmen.*

Es seien ABC die drei bekannten Schnittpunkte der Kegelschnitte K und K_1; vom ersten kenne man noch die Punkte E und F, vom zweiten E_1 und F_1; man soll den vierten Schnittpunkt bestimmen.

Auf einer beliebigen Geraden g z. B. EE_1 bestimme man die Schnittpunkte $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}_1$ mit K und K_1; dann sind $E\mathfrak{E}$

und $E_1\mathfrak{E}_1$ zwei Punktpaare der Involution, in welcher g von den Kegelschnitten des Büschels geschnitten wird. Zu diesen Kegelschnitten gehören die Geradenpaare

$$(AB, CD) \text{ und } (AC, BD).$$

Wenn AB und AC die Gerade g in C_1 und B_1 schneiden und $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{B}_1$ die den Schnittpunkten involutorisch zugeordneten Punkte sind, so treffen sich die Geraden

$$C\mathfrak{C}_1 \text{ und } B\mathfrak{B}_1 \text{ in } D.$$

II. *Von zwei Kegelschnitten kennt man zwei Schnittpunkte und noch je drei Punkte; man soll die beiden anderen Schnittpunkte konstruieren.*

Die gegebenen Schnittpunkte seien A und B, die gesuchten C und D; die aufserdem bekannten Punkte der Kegelschnitte K und K_1 seien EFG und $E_1F_1G_1$.

Man bestimme auf EE_1 und FF_1 die Schnittpunkte $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}_1$ sowie $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}_1$; die Punktpaare $E\mathfrak{E}$ und $E_1\mathfrak{E}_1$, sowie $F\mathfrak{F}$ und $F_1\mathfrak{F}_1$ gehören den Involutionen an, in denen die Geraden EE_1 und FF_1 durch die Kegelschnitte des Büschels (KK_1) getroffen werden.

Die Gerade AB schneide EE_1 in C_1 und FF_1 in C_1'; sind $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_1'$ die diesen Punkten involutorisch zugeordneten Punkte, so ist $\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_1'$ eine gemeinschaftliche Sekante beider Kegelschnitte. Sie trifft die Kegelschnitte in den gesuchten gemeinschaftlichen Punkten.

Vierter Abschnitt.

§ 29.

Die projektivischen Gebilde.

451. Alle Punkte einer Geraden bilden eine *Punktreihe,* alle Strahlen eines Punktes ein *Strahlenbüschel.* Punktreihe und Strahlenbüschel sind die *Grundgebilde.* Die Punkte und Strahlen heifsen die *Elemente des Gebildes.*

452. Wenn ein Punkt eine Punktreihe durchläuft und man denkt ihn in jeder seiner Lagen mit zwei festen Punkten S und S_1 verbunden, so entstehen in S und S_1 zwei Strahlenbüschel, die in einer bestimmten Beziehung sich befinden. Ordnet man je zwei Strahlen der beiden Büschel, die in einem Punkte der Punktreihe sich treffen, als *entsprechende* oder *homologe* einander zu, so läfst sich die Beziehung dahin charakterisieren, dafs der gemeinsame Strahl sich selbst entspricht und dafs irgend vier harmonischen Strahlen des einen Büschels vier harmonische des anderen entsprechen. Verschiebt man die beiden Büschel in der Ebene, so ändert sich zwar die durch das harmonische Entsprechen ausgedrückte Beziehung nicht, aber der gemeinsame Strahl entspricht sich im Allgemeinen nicht mehr selbst.

Wenn ein Strahl ein Strahlenbüschel durchläuft und man denkt ihn in jeder seiner Lagen von zwei festen Geraden s und s_1 geschnitten, so entstehen auf s und s_1 zwei Punktreihen, die in einer bestimmten Beziehung sich befinden. Ordnet man je zwei Punkte der beiden Punktreihen, welche auf einem Strahle des Büschels liegen, als *entsprechende* oder *homologe* einander zu, so läfst sich die Beziehung dahin charakterisieren, dafs der gemeinsame Punkt sich selbst entspricht und dafs irgend vier harmonischen Punkten der einen Reihe vier harmonische der anderen entsprechen. Verschiebt man die beiden

Punktreihen in der Ebene, so ändert sich zwar die durch das harmonische Entsprechen ausgedrückte Beziehung nicht, aber der gemeinsame Punkt entspricht sich im Allgemeinen nicht mehr selbst.

453. Zwischen gleichartigen Gebilden läfst sich demnach eine solche Beziehung herstellen, dafs jedem Elemente des einen ein bestimmtes des anderen und diesem wieder jenes erste entspricht und dafs ferner irgend vier harmonischen Elementen des einen vier harmonische des anderen entsprechen. Solche Gebilde heifsen *projektivisch.*

454. Aus dieser Definition folgt: *Sind zwei Gebilde zu einem dritten projektivisch, so sind sie selbst projektivisch.*

Man bezeichnet die Punktreihe $ABC\ldots$ auf s mit $s(ABC\ldots)$, das Strahlenbüschel $abc\ldots$ in S mit $S(abc\ldots)$. Das Zeichen der Projektivität ist $\barwedge$.

455. Fundamentalsatz: a. *Haben zwei projektivische Strahlenbüschel denselben Scheitel und fallen drei Paar entsprechende Strahlen zusammen, so sind sie identisch.*

Es seien $S(abcd\ldots)$ und $S(a_1b_1c_1d_1\ldots)$ die projektivischen Büschel und es fallen aa_1, bb_1, cc_1 zusammen. Sind $abcp$ und $a_1b_1c_1p_1$ harmonisch, so sind p und p_1 entsprechende Strahlen, welche zusammenfallen müssen. Zum Strahle p ziehe man eine Parallele s, welche die projektivischen Büschel in den projektivischen Punktreihen $ABCP\ldots$ und $A_1B_1C_1P_1\ldots$ schneidet. In diesen Punktreihen fallen die entsprechenden Punkte AA_1, BB_1, CC_1, PP_1 zusammen. Da $s \parallel p$ ist, so liegt P im Unendlichen und C in der Mitte von AB (4b. 5a.). Sind $ACPA'$ und $BCPB'$ harmonisch, so entsprechen auch A' und B' sich selbst. Sie sind die Mitten von AC und BC. Halbiert man die Hälften von AC und BC und weiter die dann erhaltenen Teile u. s. f. in inf., so müssen alle Teilpunkte sich selbst entsprechen und die ganze Strecke AB kontinuierlich erfüllen, da nach unendlich oft wiederholter Teilung die zu halbierende Strecke unendlich klein wird, also mit ihrer Mitte zusammenfällt. Da aber jeder Punkt aufserhalb AB von einem auf AB liegenden durch A und B harmonisch getrennt wird, so müssen auch alle aufserhalb AB liegenden Punkte sich

selbst entsprechen. Daraus aber folgt, dafs auch alle Strahlen der beiden Büschel in S sich selbst entsprechen.

b. *Liegen zwei projektivische Punktreihen auf derselben Geraden und fallen drei Paar entsprechende Punkte zusammen, so sind die Punktreihen identisch.*

Man verbindet dieselben mit einem Punkte S und erhält zwei projektivische Strahlenbüschel, in denen drei Paar entsprechende Strahlen zusammenfallen. Daher sind diese Büschel und folglich auch die Punktreihen identisch.

456. a. *Entspricht der gemeinschaftliche Strahl zweier projektivischen Strahlenbüschel S und S_1 sich selbst, so liegen die Schnittpunkte aller entsprechenden Strahlen auf einer Geraden.* Die projektivischen Büschel sind in *perspektivischer Lage.*

Die entsprechenden Strahlen aa_1 und bb_1 schneiden sich in A und B; die Gerade AB oder s wird von den projektivischen Büscheln in projektivischen Punktreihen geschnitten. Diese haben drei Punkte entsprechend gemein, nämlich A, B und den Schnittpunkt mit SS_1, also sind sie (455b.) identisch und je zwei entsprechende Strahlen der Büschel S und S_1 schneiden sich auf s.

b. *Entspricht der gemeinsame Punkt zweier projektivischen Punktreihen s und s_1 sich selbst, so schneiden sich die Verbindungslinien entsprechender Punkte in einem Punkte.* Die projektivischen Punktreihen sind in *perspektivischer Lage.*

Die Geraden a und b, welche die entsprechenden Punkte AA_1 und BB_1 verbinden, schneiden sich in S. Diesen Punkt denke man sich mit den projektivischen Punktreihen s und s_1 verbunden; dadurch entstehen in S zwei projektivische Strahlenbüschel, welche drei entsprechend gemeinsame Strahlen besitzen, nämlich a, b und die Verbindungsgerade von S mit dem Schnittpunkte von s und s_1. Daher sind die Büschel identisch und jeder Strahl geht durch entsprechende Punkte auf s und s_1.

457. *Von zwei projektivischen Gebilden kennt man drei Paar homologe Elemente; man soll zu einem Elemente des ersten Gebildes das homologe des anderen konstruieren.*

I. Fall. Die Gebilde haben verschiedene Träger.

a. In den Strahlenbüscheln S und S_1 seien aa_1, bb_1, cc_1 entsprechende Strahlen. Durch den Schnittpunkt A von a und a_1 lege man die Geraden s und s_1; schneide s durch b und c in B und C, s_1 durch b_1 und c_1 in B_1 und C_1, ziehe BC und B_1C_1 bis zum Durchschnitte in P. Mit dem Strahle d von S schneide man s in D; schneide s_1 mit PD in D_1, so ist S_1D_1 der dem Strahle d homologe Strahl d_1. (456 b. 453).

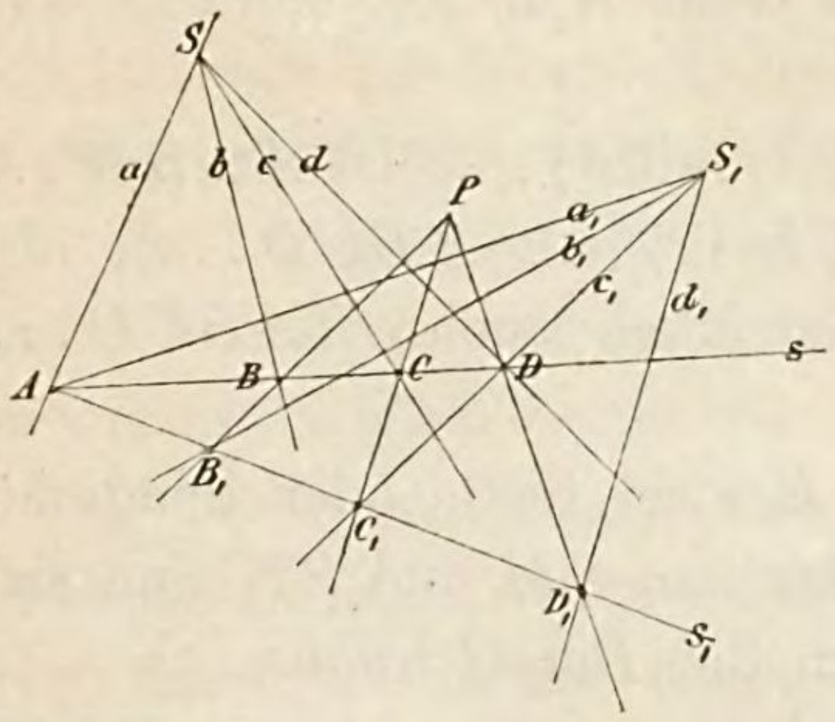


Fig. 182.

b. In den Punktreihen s und s_1 seien AA_1, BB_1, CC_1 entsprechende Punkte. Auf der Verbindungsgeraden a von A und A_1 nehme man die Punkte S und S_1, verbinde S mit B und C durch die Strahlen b und c, S_1 mit B_1 und C_1 durch b_1 und c_1, und verbinde den Schnittpunkt von b und b_1 mit demjenigen von c und c_1 durch die Gerade p. Den Punkt D verbinde man mit S durch d, verbinde S_1 mit dem Schnittpunkte pd durch d_1 und schneide mit d_1 die Gerade s_1 in dem zu D homologen Punkte D_1. (456 a. 453.).

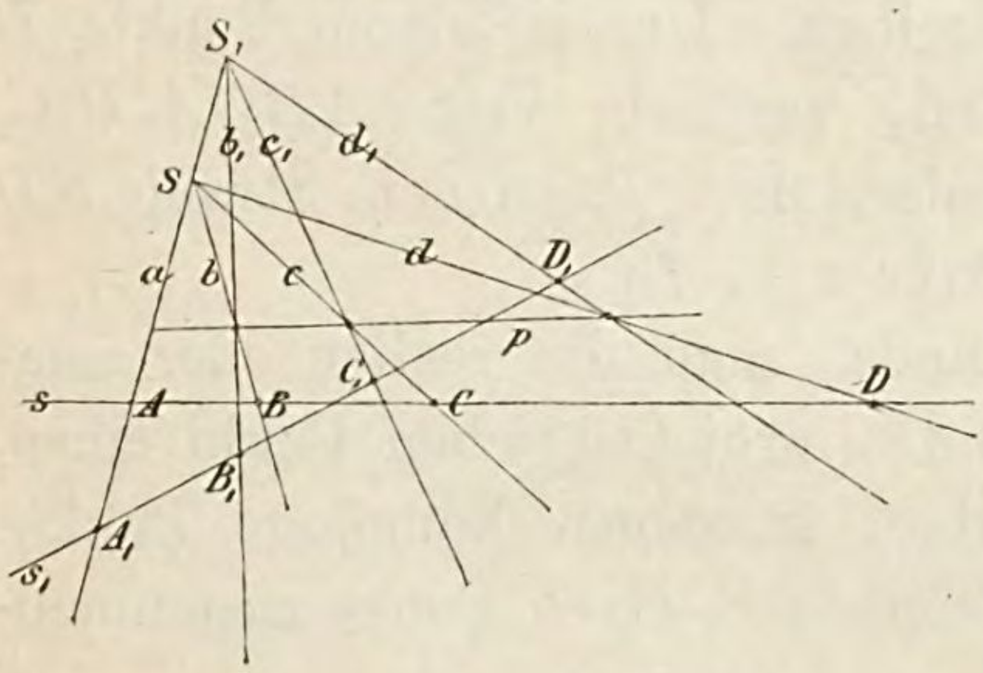


Fig. 183.

II. Fall. Die Gebilde haben denselben Träger.

a. In S seien zwei projektivische Strahlenbüschel; aa_1, bb_1, cc_1 seien entsprechende Strahlen. Durch S lege man einen Kreis K, und schneide ihn mit abc in ABC, mit $a_1b_1c_1$ in $A_1B_1C_1$, bestimme die Durchschnitte β, γ von AB_1 und A_1B, AC_1 und

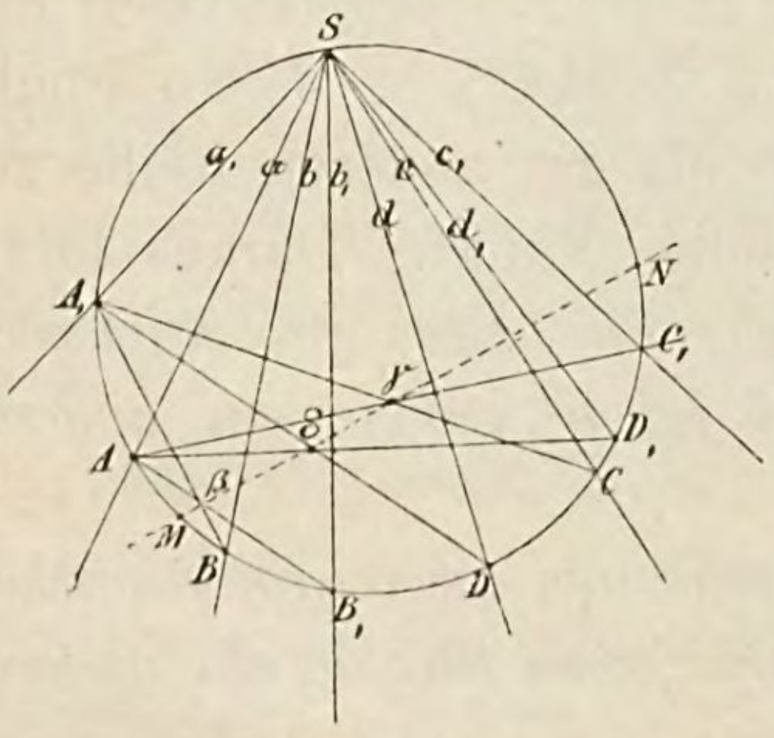


Fig. 184.

A_1C, ziehe $\beta\gamma$. Ein veränderlicher Strahl d von S schneide K in D; A_1D treffe $\beta\gamma$ in δ, $A\delta$ treffe K in D_1, dann ist SD_1 der zu d homologe Strahl d_1.

Ist α der Schnittpunkt von AA_1 mit $\beta\gamma$, so ist $A(\alpha\beta\gamma\delta\ldots)$ $\barwedge$ $A_1(\alpha\beta\gamma\delta\ldots)$ oder $A(A_1B_1C_1D_1)$ $\barwedge$ $A_1(ABCD\ldots)$, also wegen Gleichheit der Peripheriewinkel auch $S(ABCD\ldots)$ $\barwedge$ $S(A_1B_1C_1D_1\ldots)$.

a′. Die Gerade $\beta\gamma$ hat mit K zwei reelle oder imaginäre Schnittpunkte M und N. Die Strahlen SM und SN sind sich selbst entsprechende. Sie heifsen die *Doppelstrahlen.*

Wenn man statt AA_1 irgend zwei entsprechende Punkte XX_1 wählt, so erhält man doch stets als perspektivischen Durchschnitt die Gerade $\beta\gamma$ (455.). Die Doppelstrahlen können auch zusammenfallen, wenn $\beta\gamma$ den Kreis berührt.

b. Auf s seien AA_1, BB_1, CC_1 drei Paar homologe Punkte zweier projektivischen Punktreihen. Um zu einem Punkte D den homologen D_1 zu finden, verbinde man $ABCA_1B_1C_1$ mit einem Punkte S, konstruiere nach a. zu dem Strahle SD den homologen, so schneidet er s in D_1.

b′. In gleicher Weise findet man die reellen oder imaginären *Doppelpunkte* der beiden projektivischen Punktreihen, d. h. diejenigen beiden Punkte, in denen homologe Punkte sich vereinigen. Auch diese können in einen Punkt zusammenfallen.

458. Die Paare AA_1, BB_1, CC_1, ... von konjugierten Punkten auf einer Geraden g bezüglich eines Kreises bilden (36a.) eine Involution. Da aber die konjugierten Punkte zu vier harmonischen Punkten auch harmonische Punkte sind (20), so ist (453) die Reihe der Punkte $ABC\ldots$ projektivisch mit derjenigen der konjugierten Punkte $A_1B_1C_1\ldots$ Jeden Punkt von g kann man sowohl der einen als der anderen Reihe zuweisen; ihm entspricht stets derselbe Punkt. Daraus folgt:

a. *Eine Punktinvolution besteht aus zwei projektivischen Punktreihen in solcher Lage, dafs jedem Punkte ein anderer doppelt entspricht.*

b. *Eine Strahleninvolution besteht aus zwei projektivischen Strahlenbüscheln in solcher Lage, dafs jedem Strahle ein anderer doppelt entspricht.* (454. 458).

Diese Lage projektivischer Gebilde heifst daher die *involutorische Lage.*

c. *Jede Strahleninvolution wird von irgend einer Geraden in einer Punktinvolution geschnitten.* (454).

459. *Zwei projektivische Gebilde auf demselben Träger befinden sich in involutorischer Lage, wenn irgend einem Elemente ein anderes doppelt entspricht.*

a. Die konzentrischen Büschel $S(aa_1bc\ldots)$ und $S(a_1ab_1c\ldots)$ seien projektivisch; dem Strahle a entspreche a_1 doppelt. Man lege durch S einen Kreis K, welcher von den Strahlen $aa_1bc\ldots b_1c_1\ldots$ in $AA_1BC\ldots B_1C_1\ldots$ geschnitten wird. Aus Gleichheit der Peripheriewinkel und aus 454. folgt, dafs $B_1(AA_1BC\ldots) \barwedge B(A_1AB_1C_1\ldots)$ ist. Da der gemeinsame Strahl BB_1 sich selbst entspricht, so sind die Büschel in perspektivischer Lage (456.). Der perspektivische Durchschnitt sei p. Der perspektivische Durchschnitt der Büschel $C_1(AA_1BC\ldots)$ und $C(A_1AB_1C_1\ldots)$ mufs aus den in 457. angegebenen Gründen auch p sein. Nennt man die Schnittpunkte von AB und A_1B_1, AB_1 und A_1B, AC und A_1C_1, AC_1 und A_1C, ... β, β_1, γ, γ_1, ... so folgt aus den Eigenschaften des vollständigen Vierseits, dafs $\beta\beta_1$, $\gamma\gamma_1$, ... Paare konjugierter Punkte in Bezug auf den Kreis K sind (15.). Daher entspricht in den projektivischen Punktreihen $(\beta\gamma\ldots)$ und $(\beta_1\gamma_1\ldots)$ und also auch in den projektivischen Strahlenbüscheln $A(\beta\gamma\ldots)$ und $A(\beta_1\gamma_1\ldots)$ und endlich in den projektivischen Büscheln $S(BC\ldots)$ und $S(B_1C_1\ldots)$ jedem Elemente ein anderes doppelt; also sind diese Büschel in involutorischer Lage.

b. Aus dem vorigen Beweise folgt noch, dafs die Geraden AA_1, BB_1, CC_1, ... sich im Pole P von p schneiden müssen, wodurch ein neuer Beweis von 40a. gegeben ist.

c. Sind die projektivischen Gebilde Punktreihen, so projiziere man sie aus einem Punkte S und wende den Beweis in a. an.

460. *Der Kegelschnitt als Erzeugnis projektivischer Strahlenbüschel.*

Es seien $S(abcd\ldots)$ und $S_1(a_1b_1c_1d_1\ldots)$ zwei projektivische Strahlenbüschel; der Ort des Schnittpunktes entsprechen-

der Strahlen ist eine kontinuierliche krumme Linie, Kurve, welche mit einer Geraden g höchstens zwei Punkte gemeinsam hat. Denn diese Gerade wird von den projektivischen Strahlenbüscheln in zwei projektivischen Punktreihen geschnitten; die Doppelpunkte beider sind die Schnittpunkte von g mit der Kurve. Diese nennt man daher von der *II. Ordnung*. Da dem gemeinsamen Strahle SS_1 sowohl im Büschel (S) als im Büschel (S_1) ein Strahl entspricht, so sind S und S_1 Punkte der Kurve.

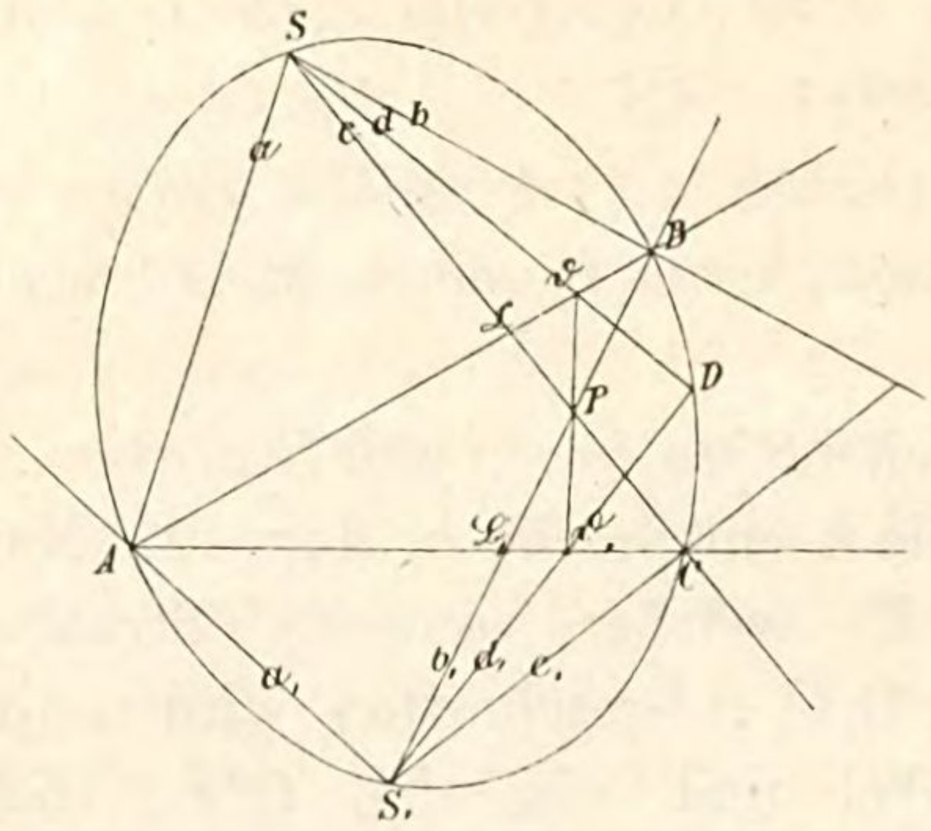


Fig. 185.

Jeder Strahl durch S oder S_1 hat aufser S oder S_1 noch einen zweiten Punkt mit der Kurve gemein, den Schnittpunkt mit dem entsprechenden Strahle. Bei denjenigen Strahlen, welche dem gemeinsamen Strahle SS_1 entsprechen, fällt dieser zweite Schnittpunkt mit S oder S_1 zusammen. Diese Strahlen haben also mit der Kurve nur je den Punkt S oder S_1 gemein; sie heifsen *Tangenten der Kurve II. O.*

Die Schnittpunkte von aa_1, bb_1, cc_1, dd_1, ... seien A, B, C, D, ... Man ziehe AB und AC und schneide diese Geraden mit den Strahlen der Büschel in $AB\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ ... und $A\mathfrak{B}_1C\mathfrak{D}_1$ ..., so sind diese Punktreihen projektivisch und in perspektivischer Lage, also schneiden sich die Verbindungslinien homologer Punkte, $B\mathfrak{B}_1$ $\mathfrak{C}C$, $\mathfrak{D}\mathfrak{D}_1$, ... in einem Punkte P.

Man denke sich nun in der Figur die fünf Punkte SS_1BCD fest, aber A beweglich auf der Kurve II. O. Es drehen sich dabei die Geraden BA und CA um die Punkte B und C, die Punkte $\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{B}_1\mathfrak{D}_1$ verändern auf ihnen ihre Lage, aber die Gerade $\mathfrak{D}\mathfrak{D}_1$ geht stets durch P, weil dieser Punkt als Schnittpunkt der festen Geraden S_1B und SC unverändert bleibt. Da sich also $\mathfrak{D}\mathfrak{D}_1$ um den festen Punkt P dreht, so beschreiben $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}_1$ auf den festen Strahlen SD und S_1D perspektivische Punktreihen, also sind die von BA und CA beschriebenen Strahlenbüschel projektivisch. Sie erzeugen also

auch die Kurve und da B und C zwei ganz beliebige Punkte derselben sind, so kann man den Satz aufstellen:

Zwei projektivische Strahlenbüschel erzeugen eine Kurve II. O., welche von keiner Geraden in mehr als zwei Punkten geschnitten wird. Sie wird aus irgend zwei ihrer Punkte durch projektivische Strahlenbüschel projiziert.

Daraus folgt, dafs es in jedem Punkte der Kurve II. O. eine Tangente giebt.

461. Faſst man die Punkte ABS_1DSC als Ecken eines Sechsecks auf, so findet man, dafs die Schnittpunkte der Gegenseiten, $\mathfrak{D}$ von AB und DS, P von BS_1 und CS, $\mathfrak{D}_1$ von DS_1 und AC in einer Geraden liegen. Dies aber ist der Pascal'sche Lehrsatz:

In jedem einer Kurve II. O. eingeschriebenen Sechsecke liegen die Schnittpunkte der Gegenseiten in einer Geraden.

462. Läfst man S_1 mit B und S mit C zusammenfallen, so erhält man ein der Kurve eingeschriebenes Viereck $ABDC$,

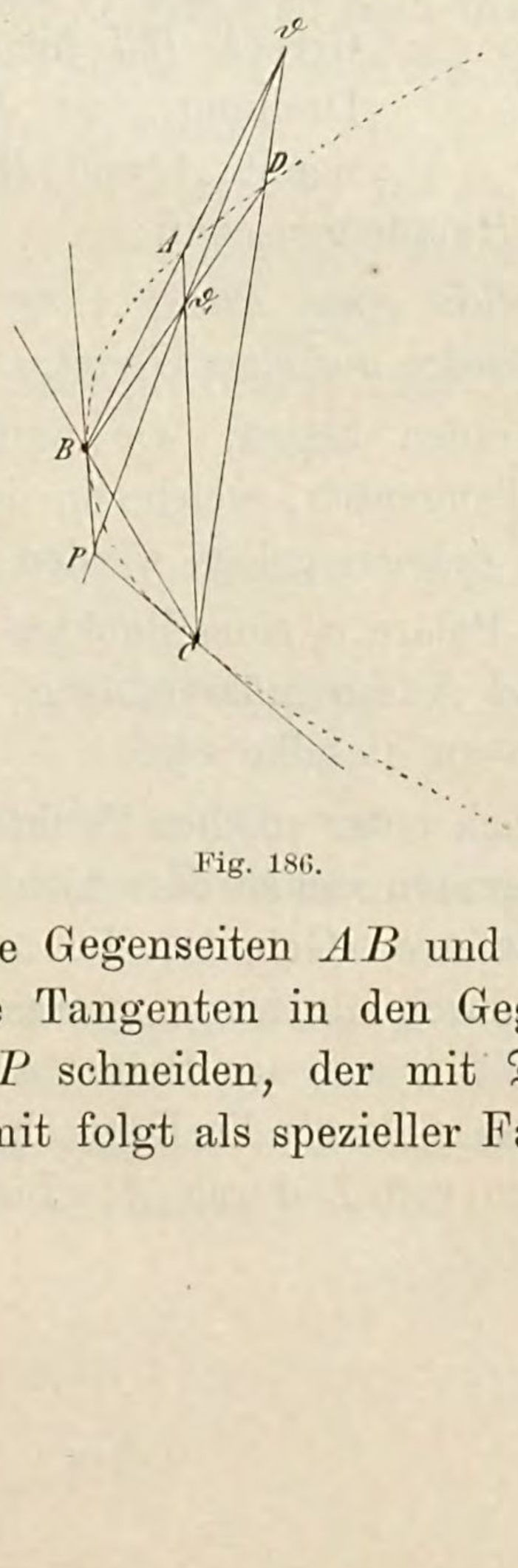


Fig. 186.

in welchem sich die Gegenseiten AB und CD in $\mathfrak{D}$, AC und BD in $\mathfrak{D}_1$ und die Tangenten in den Gegenecken B und C in einem Punkte P schneiden, der mit $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}_1$ in einer Geraden liegt. Somit folgt als spezieller Fall des Pascal'schen Satzes:

In jedem einer Kurve II. O. eingeschriebenen Vierecke liegen die Schnittpunkte der Gegenseiten und der Tangenten in den Gegenecken auf einer Geraden.

463. Mit Hilfe dieses Satzes ergeben sich ungemein einfach die Polareigenschaften.

Zieht man von einem Punkte A durch eine Kurve II. O. K eine feste Sehne BC und eine veränderliche DE, so nehme man $BDCE$ als eingeschriebenes Viereck. Dann schneiden sich die Gegenseiten BD und CE, BE und CD und die Tangenten in den Gegenecken B und C in drei Punkten F, G und H einer Geraden. Diese trifft BC und DE in zwei Punkten J und L, welche von A durch die Punkte BC resp. DE harmonisch getrennt sind. Da also J auf der festen Sehne BC ein fester Punkt ist, ebenso wie H, so ist die Gerade HJ unveränderlich bei der Drehung von DE um A. Man nennt A und HJ *Pol und Polare* und hat sofort die Haupteigenschaft:

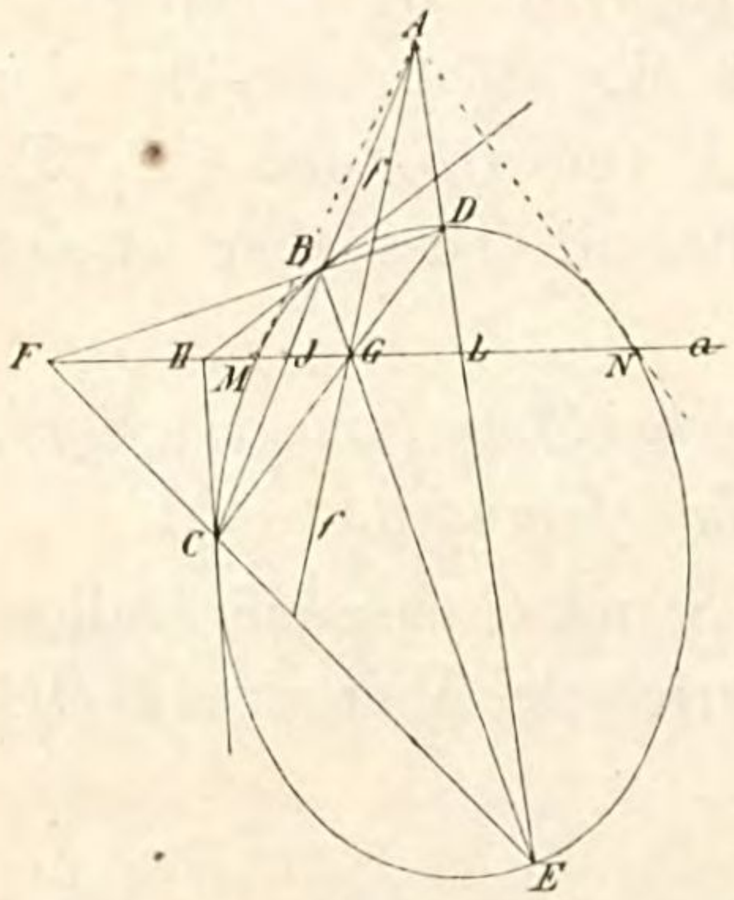


Fig. 187.

Alle Punkte, welche einen Punkt A von einer Kurve II. O. harmonisch trennen, liegen auf einer Geraden a, der Polare von A.

Auf dieser Geraden liegen, wie unmittelbar folgt, die Schnittpunkte der Tangenten, welche in den Endpunkten der durch A gezogenen Sehnen gelegt werden können.

464. Wenn die Polare a eines Punktes A die Kurve II. O. schneidet, in M und N, so müssen nach vorigem Satze AM und AN Tangenten an dieselbe sein.

Man hat demnach unter solchen Punkten zu unterscheiden, von denen sich Tangenten ziehen oder nicht ziehen lassen. Die ersten liegen im äufseren Gebiete, die anderen im inneren; beide Gebiete sind durch die Kurve getrennt.

Liegt ein Punkt L auf der Polare a von A im inneren Gebiete, so ist L von A durch die Kurve harmonisch getrennt, also geht die Polare von L durch A. Liegt aber ein Punkt

H auf a im äufseren Gebiete, so ziehe man die Tangenten HB und HC durch Konstruktion der Polare h von H. Diese mufs wegen 463. durch A gehen, also so hat man den Satz:

Durchläuft ein Punkt eine Gerade, so dreht sich seine Polare um den Pol der Geraden und umgekehrt.

465. Zwei Punkte heifsen *konjugiert*, wenn jeder auf der Polare des anderen liegt; zwei Strahlen heifsen *konjugiert*, wenn jeder durch den Pol des anderen geht. Fig. 187.

Es seien A und a Pol und Polare; ein Punkt F durchlaufe a, dann dreht sich seine Polare f um F. Um f zu konstruieren, ziehe man durch F die Sehne BD, dann ABC und ADE, BE und CD und endlich AG oder f. Wenn sich F auf a bewegt, so halte man den Punkt B und also auch C fest. Aus ihnen wird der veränderliche Punkt D durch zwei projektivische Strahlenbüschel projiziert, deren homologe Strahlen sich in G schneiden. Die Punktreihen $F\ldots$ und $G\ldots$ stehen demnach in projektivischer Beziehung. Da die Polare f von F durch G geht, so mufs diejenige von G durch F gehen und jedem Punkte der Geraden a, ob man ihn zur Reihe $F\ldots$ oder $G\ldots$ rechnet, entspricht derselbe Punkt. Die Reihen sind also involutorisch. Die Punkte F und G sind aber konjugiert, denn jeder liegt auf der Polare des anderen, also folgt:

Die Paare konjugierter Punkte einer Geraden bilden eine Involution

und ebenso:

Die Paare konjugierter Strahlen eines Punktes bilden eine Involution.

Liegt von zwei konjugierten Strahlen der eine im äufseren Gebiete, so liegt sein Pol im inneren und der andere Strahl mufs daher die Kurve schneiden, also:

Von zwei konjugierten Strahlen schneidet mindestens einer die Kurve II. O.

466. Der Pol der unendlich fernen Geraden g_∞ sei M; er halbiert jede durch ihn gehende Sehne (4b. 463) und heifst deshalb der *Mittelpunkt* der Kurve; die Sehnen durch ihn heifsen *Durchmesser*. Diese Durchmesser ordnen sich paarweise zu

einer Involution; in derselben giebt es zwei senkrechte konjugierte Strahlen (40c). Man nennt dieselben die *Axen* der Kurve. Die gröfsere derselben oder, falls nur eine die Kurve schneidet, die schneidende habe mit der Kurve die Punkte A und A_1 gemein; sie heifst die *Hauptaxe*, die andere die *Nebenaxe*. Um M, die Mitte von AA_1, beschreibe man mit MA einen Kreis. Eine Tangente der Kurve schneide diesen Kreis in E und E_1, die Hauptaxe in N. Der Punkt N mufs für die Kurve II. O. und den Kreis M dieselbe Polare haben,

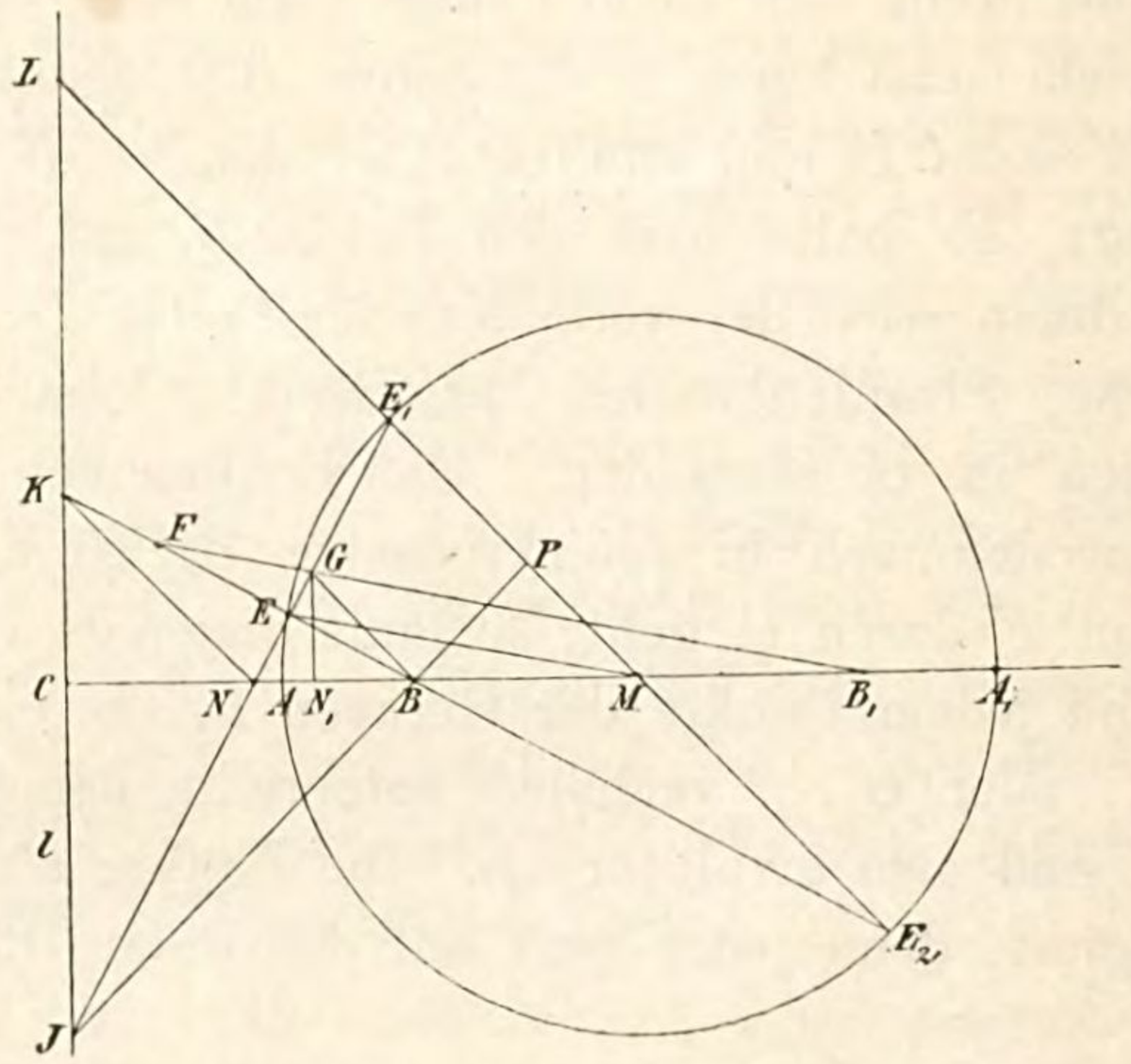


Fig. 188.

welche im harmonischen Gegenpunkte N_1 von N bezüglich AA_1 auf der Hauptaxe senkrecht steht. Sie schneide EE_1 in G, dann sind EE_1GN harmonisch (14). In E und E_1 errichte man auf EE_1 Senkrechte, welche die Hauptaxe in B und B_1 treffen, dann ist $MB = MB_1$. Macht man $EF = EB$, so mufs B_1F durch G gehen (3.). Die Polare von B sei l, dann sind EE_2BK harmonisch, also auch $N(EE_2BK)$. Diese Strahlen schneiden den Durchmesser E_1E_2 in E_1E_2M und noch im Unendlichen, da $ME_1 = ME_2$ ist, also ist $NK \parallel E_1E_2$. In den harmonischen Punktreihen EE_1NG und EE_2KB ist der Punkt E gemeinsam, also schneiden sich E_1E_2, NK und BG in einem Punkte, folglich ist auch $BG \parallel NK \parallel E_1E_2$.

Zieht man JB, so sind E_1E_2LP harmonisch, demnach ist JP die Polare von L für den Kreis M und steht auf dem Durchmesser E_1E_2 senkrecht.

Da der Punkt G der Schnittpunkt der Tangente EE_1 mit der Polare von N ist, so ist er ein Punkt der Kurve, denn die Polare eines Punktes einer Tangente geht durch den Berührungspunkt. Die Polare von J in Bezug auf die Kurve ist BG (463. 464), also sind BG und BJ konjugierte Strahlen. Sie stehen auf einander senkrecht. In B sind noch BA und die Senkrechte zur Hauptaxe konjugierte Strahlen; es hat also die Involution konjugierter Strahlen in B zwei rechtwinklige Strahlenpaare und somit lauter solche Strahlenpaare. Dasselbe gilt vom Punkte B_1. Man nennt B und B_1 *Brennpunkte* der Kurve, ihre Polaren l und l_1 *Leitlinien*.

467. Es sei J ein ganz beliebiger Punkt der Leitlinie, so sind JB und die in B darauf errichtete Senkrechte i konjugierte Strahlen der Kurve. Ueber BJ beschreibe man einen Kreis, welcher den Kreis M schneiden mufs. Einer der Schnittpunkte sei E, dann ist JE eine Tangente der Kurve und ihr Schnittpunkt G mit i der Berührungspunkt. Dies ist bewiesen, wenn man zeigt, dafs $NGEE_1$ harmonische Punkte sind.

Sind EE_1NX harmonisch, so müssen wieder NK, BX, E_1E_2 parallel sein und JB ist die Polare von L bezüglich des Kreises, also senkrecht auf E_1E_2 und also auch auf BX, folglich fällt BX mit BG zusammen, und EE_1NG sind harmonisch. Somit liegt G auf der Polare von N bezüglich des Kreises M und der Kurve, denn der Punkt N hat für beide dieselbe Polare. Umgekehrt mufs also die Polare von G durch N und J gehen, also GJ selbst, d. h. eine Tangente der Kurve sein; der Berührungspunkt ist G.

Zieht man B_1G bis F, so ist $BE = FE$, also $ME \parallel B_1F$ und $ME = \frac{1}{2}B_1F = \frac{1}{2}(B_1G + BG)$.

Aber $ME = \frac{1}{2}AA_1$, also

$$B_1G + BG = AA_1, \text{ d. h.}$$

Die Kurve II. O. ist der Ort eines Punktes, dessen Entfernungssumme (oder Entfernungsdifferenz) von zwei festen Punkten konstant gleich der Hauptaxe ist.

Hiermit ist die Identität der Kurve II. O. mit einem Kegelschnitte nachgewiesen; dies läfst sich auch noch auf folgende Art thun.

468. Die Sehne DD_1 der Kurve II. O. K schneide die Leitlinie l in E; man errichte die Senkrechte BF auf BE,

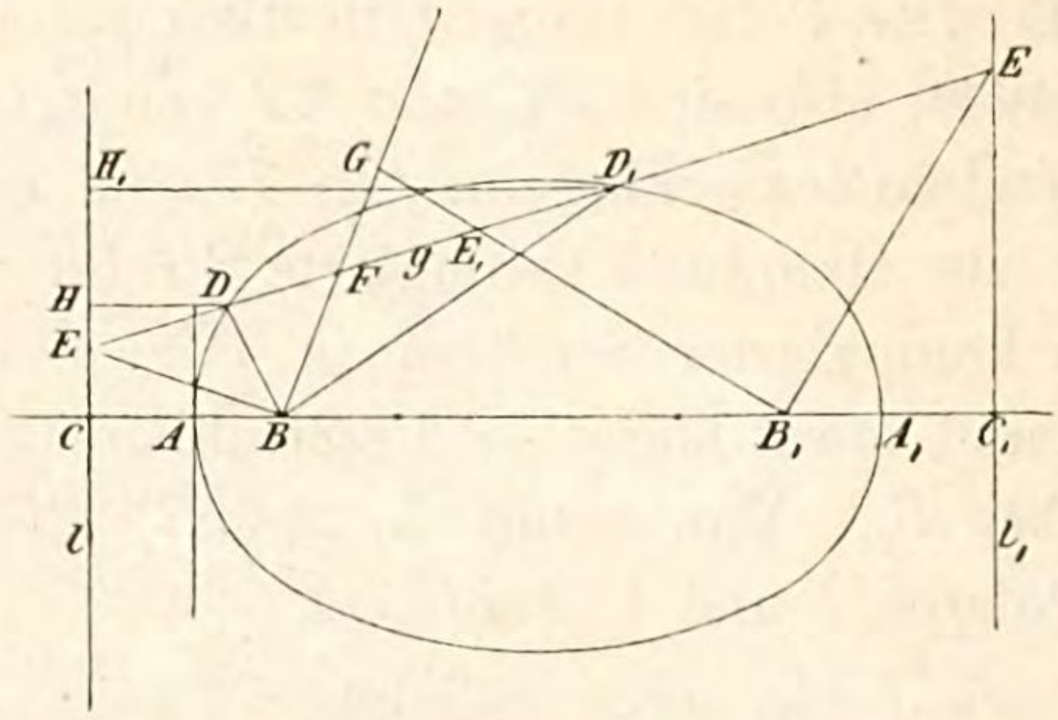


Fig. 189.

also die Polare von E, so sind DD_1EF harmonisch, also (6c.) sind BE und BF die Halbierungslinien der von DB und D_1B gebildeten Winkel, folglich verhält sich (7.)

$$BD : BD_1 = ED : ED_1 = DH : D_1H_1$$

oder $$DB : DH = D_1B : D_1H_1.$$

Wenn sich DD_1 um D dreht, so bleibt das erste Verhältnis konstant, also auch das zweite, d. h.

Die Kurve II. O. ist der Ort eines Punktes, dessen Abstände von einem festen Punkte und einer festen Geraden ein konstantes Verhältnis haben.

469. *Der Kegelschnitt als Erzeugnis projektivischer Punktreihen.*

Es seien $s(ABCD\ldots)$ und $s_1(A_1B_1C_1D_1\ldots)$ zwei projektivische Punktreihen; der Ort der Verbindungsgeraden entsprechender Punkte ist eine kontinuierliche krumme Linie, Kurve, $\mathfrak{K}$, an welche von jedem Punkte G nur zwei Verbindungslinien, Tangenten, sich ziehen lassen. Denn aus diesem Punkte werden die projektivischen Punktreihen durch zwei projektivische Strahlenbüschel projiziert, deren Doppelstrahlen die Tangenten durch G sind. Man nennt daher die Kurve von der *II. Klasse.* Da dem gemeinsamen Punkte ss_1 sowohl

in der Punktreihe (s) als in der Reihe (s_1) ein Punkt entspricht, so sind s und s_1 auch Tangenten der Kurve $\mathfrak{K}$.

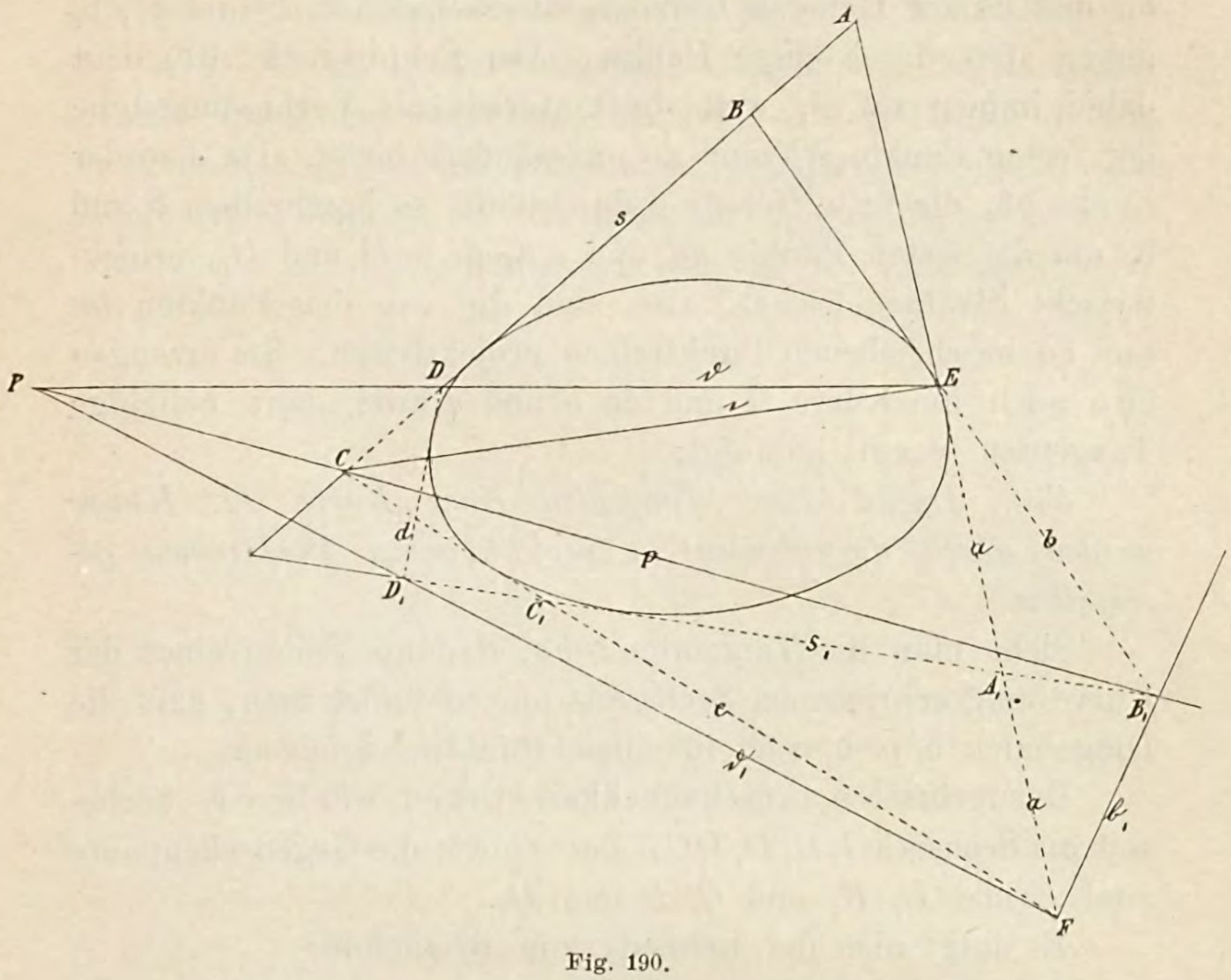


Fig. 190.

Von jedem Punkte auf s oder s_1 läfst sich aufser s oder s_1 noch eine zweite Tangente an die Kurve ziehen, die Verbindungslinie mit dem entsprechenden Punkte. Bei denjenigen Punkten, welche dem gemeinsamen Punkte ss_1 entsprechen, fällt diese zweite Tangente mit s oder s_1 zusammen. Von diesen Punkten läfst sich also an die Kurve nur je eine Tangente s oder s_1 ziehen; sie heifsen *Berührungspunkte der Kurve II. Klasse.*

Die Verbindungslinien AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, ... seien a, b, c, d, ... Man konstruiere die Schnittpunkte ab und ac und ziehe von ihnen noch den Punkten der Reihen die Strahlen $abcd$ ... und ab_1cd_1 ..., so sind diese Strahlenbüschel projektivisch und in perspektivischer Lage, also liegen die Schnittpunkte homologer Strahlen auf einer Geraden p.

Man denke sich nun in der Figur die fünf Geraden

ss_1bcd fest, aber a beweglich auf der Kurve II. Klasse, so dafs es stets Tangente bleibt. Dabei durchlaufen die Punkte ba und ca die Geraden b und c, die Geraden $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{d}_1$ gehen stets durch diese Punkte. Der Schnittpunkt $\mathfrak{d}\mathfrak{d}_1$ liegt dabei immer auf p, weil diese Gerade als Verbindungslinie der festen Punkte s_1b und sc unverändert bleibt. Da also der Punkt $\mathfrak{d}\mathfrak{d}_1$ die feste Gerade p durchläuft, so beschreiben $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{d}_1$ um die festen Punkte sd und s_1d_1 d. i. D und D_1, projektivische Strahlenbüschel, also sind die von den Punkten ba und ca beschriebenen Punktreihen projektivisch. Sie erzeugen also auch die Kurve $\mathfrak{K}$ und da b und c zwei ganz beliebige Tangenten waren, so folgt:

470. *Irgend zwei Tangenten einer Kurve II. Klasse werden durch die übrigen in projektivischen Punktreihen geschnitten.*

Sieht man die Tangenten abs, dsc als Seiten eines der Kurve umgeschriebenen Sechsseits an, so findet man, dafs die Diagonalen $\mathfrak{d}$, p, $\mathfrak{d}_1$ sich in einem Punkte schneiden.

Der gröfseren Anschaulichkeit wegen werde das Sechsseit als Sechseck EB_1D_1DCF bezeichnet; die Gegeneckenpaare sind E und D, B_1 und C, F und D_1.

Es folgt also der Lehrsatz von Brianchon:

In jedem einer Kurve II. Klasse umgeschriebenen Sechsseite schneiden sich die Verbindungslinien der Gegenecken in einem Punkte.

471. Läfst man s_1 mit b und s mit c zusammenfallen, so erhält man ein der Kurve umgeschriebenes Vierseit $abdc$, in welchem sich die Verbindungslinien der Gegenecken $\mathfrak{d}$ von ab und cd, $\mathfrak{d}_1$ von ac und bd und die Verbindungslinie p der Berührungspunkte auf b und c in einem Punkte schneiden. Somit folgt als specieller Fall des vorigen Satzes:

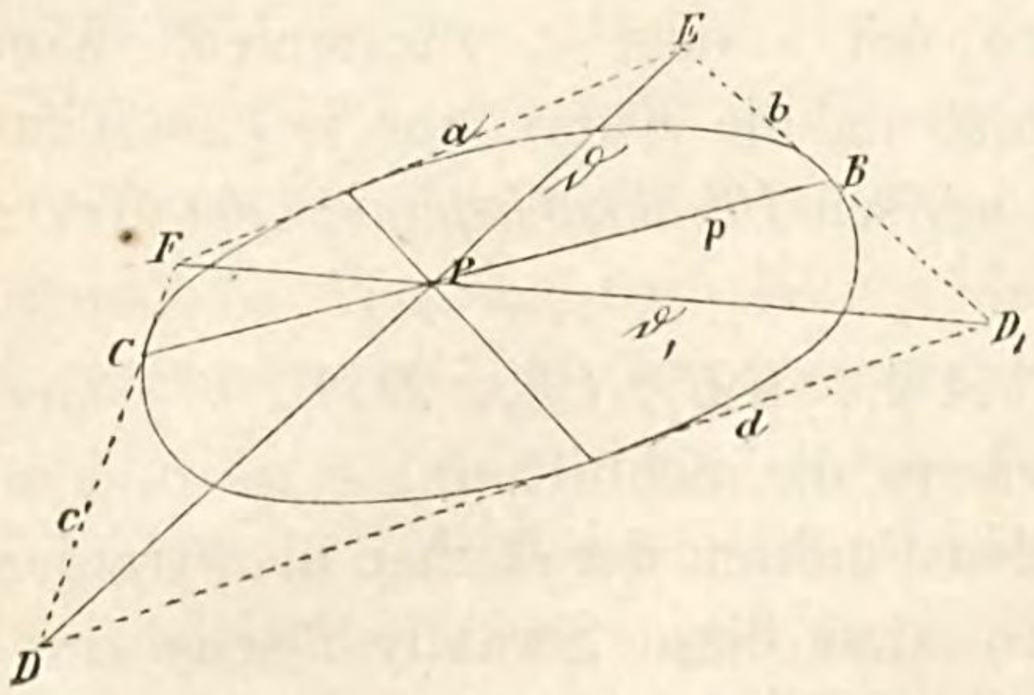


Fig. 191.

In jedem einer Kurve II. Klasse umgeschriebenen Vierseite schneiden sich die Diagonalen und die Verbindungslinien der Berührungspunkte auf den Gegenseiten in einem Punkte.

472. Es sei a eine beliebige Gerade; von einem festen Punkte derselben ziehe man an eine Kurve II. Kl. K die Tangenten b und c und von einem veränderlichen Punkte die Tangenten d und e, so hat man ein umgeschriebenes Vierseit $bcde$. In diesem schneiden sich die Verbindungslinien f

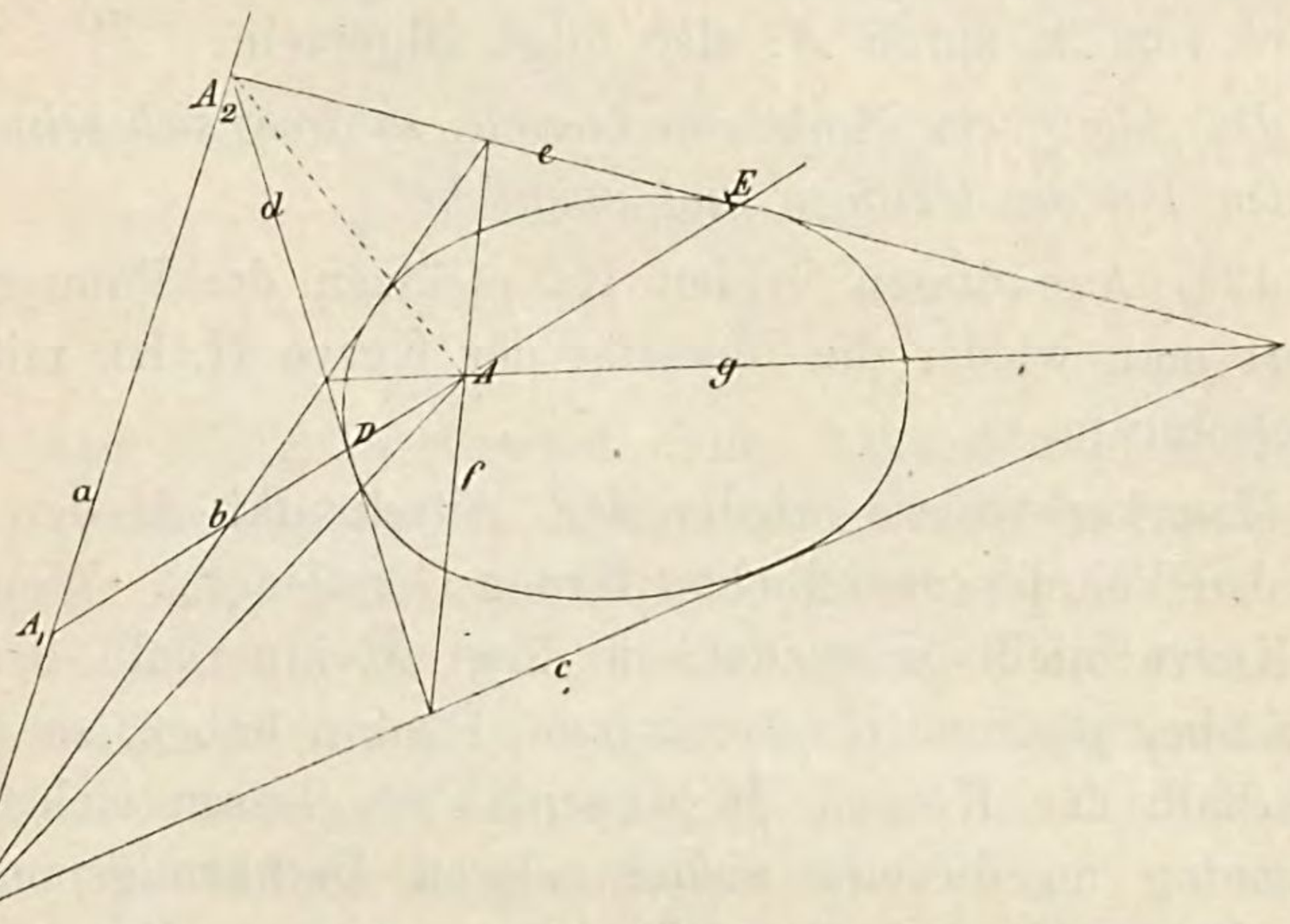


Fig. 192.

und g der Gegenecken be, cd und bd, ce in einem Punkte A, durch welchen auch die Verbindungslinie der Berührungspunkte D und E auf den Tangenten d und e geht. Aus den Eigenschaften des vollständigen Vierseits ergiebt sich, dafs d und e durch A und a harmonisch getrennt sind, also werden auch D und E durch A und a harmonisch getrennt und es folgt:

Alle Punkte, welche durch eine Kurve II. Kl. von einem Punkte A harmonisch getrennt sind, liegen auf einer Geraden a; diese heifst die Polare von A.

473. Die Gerade a schneidet entweder die Kurve oder nicht. Im ersten Falle sind die Verbindungslinien der Schnittpunkte mit A Tangenten der Kurve. Im zweiten Falle lassen sich von A keine Tangenten an K ziehen. Der Punkt A liegt im ersten Falle aufserhalb, im zweiten innerhalb der Kurve

II. Kl. und diese scheidet, wie eine Kurve II. O. die Ebene in zwei Gebiete, ein inneres und ein äufseres.

Liegt A innerhalb und ist A_1 irgend ein Punkt seiner Polare a, so mufs wegen des letzten Satzes die Polare von A_1 durch A gehen. Dasselbe folgt aus diesem Satze, wenn A aufserhalb, aber A_1 innerhalb auf a liegt.

Ist A_2 ein Punkt von a (Fig. 192), welcher aufserhalb der Kurve liegt und sind de die Tangenten von ihm an K, so geht die Verbindungslinie der Berührungspunkte DE, d. i. die Polare von A_2 durch A, also folgt allgemein:

Durchläuft ein Punkt eine Gerade, so dreht sich seine Polare um den Pol der Geraden und umgekehrt.

474. Aus diesen beiden Hauptsätzen der Polarentheorie folgert man wieder die Identität der Kurve II. Kl. mit einem Kegelschnitte.

Man konstruiere wieder den Mittelpunkt M der Kurve, d. i. den Pol der unendlichen fernen Geraden g_∞. Wenn diese die Kurve nicht schneidet, so liegt M innerhalb derselben; wenn aber g_∞ und K gemeinsame Punkte haben, so liegt M aufserhalb der Kurve. In diesem Falle lassen sich von M Tangenten an dieselbe ziehen, deren Berührungspunkte im Unendlichen liegen. Diese Tangenten heifsen die *Asymptoten* der Kurve.

475. In der Involution konjugierter Durchmesser bestimme man das rechtwinklige Paar konjugierter Strahlen, die *Axen* der Kurve. Beide Axen müssen die Kurve schneiden, wenn M innerhalb liegt. Die gröfsere von ihnen heifst die Hauptaxe. Wenn aber M aufserhalb liegt, so ist jede Asymptote sich selbst konjugiert; *die Asymptoten sind demnach die Doppelstrahlen der Involution konjugierter Durchmesser und trennen jedes andere Paar konjugierter Durchmesser harmonisch.* Der von ihnen gebildete Winkel wird daher durch die Axen halbiert.

Die Asymptoten teilen die Ebene in vier Gebiete, die paarweise in Scheitelwinkeln liegen. In einem dieser Gebiete liegt die Kurve II. Kl. Von den beiden Axen kann daher nur eine die Kurve schneiden; diese heifst die Hauptaxe. Zieht man in ihren Endpunkten, den Scheiteln der Kurve, die Scheitel-

tangenten, so liegt zwischen diesen kein Punkt der Kurve. Alle Tangenten derselben schneiden die Hauptaxe.

476. Man ziehe in den Endpunkten AA_1 der Hauptaxe die Scheiteltangenten und schneide sie mit den Asymptoten

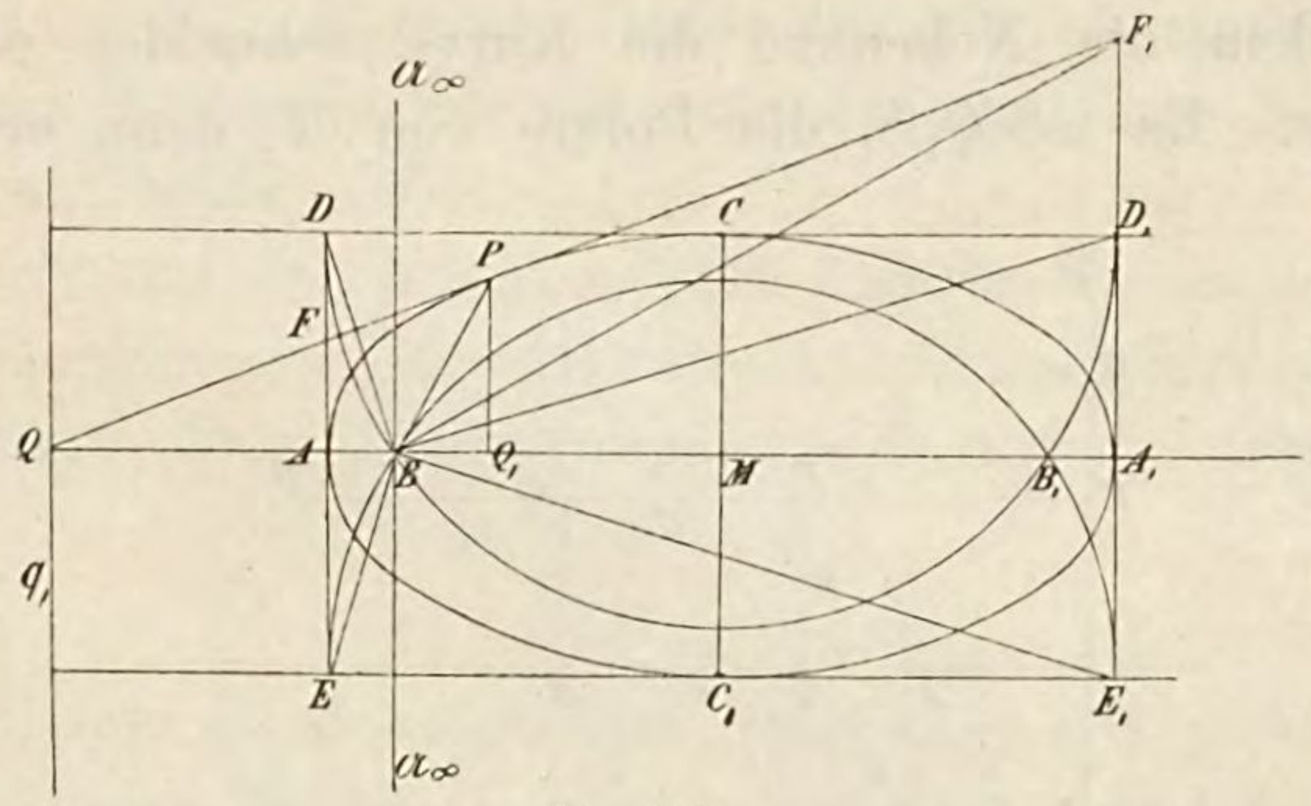


Fig. 193.

in DE und D_1E_1, im zweiten Falle, wenn M innerhalb liegt, mit den Tangenten in den Endpunkten der Nebenaxe, in DE und D_1E_1. Über DD_1 und EE_1 beschreibe man Kreise, so schneiden sich diese in zwei Punkten BB_1 der Hauptaxe.

Nennt man den Schnittpunkt der Scheiteltangenten $\mathfrak{A}_\infty$, so sind die Punktreihen $(\mathfrak{A}_\infty ADEF\ldots)$ und $(A_1\mathfrak{A}_\infty D_1E_1F_1\ldots)$, in denen die Scheiteltangenten von den übrigen geschnitten werden, in projektivischer Beziehung und da

$$\sphericalangle ABD = \mathfrak{A}_\infty BD_1,\ \sphericalangle ABE = \mathfrak{A}_\infty BE_1$$

[denn beide haben entweder $DB\mathfrak{A}_\infty$ oder $EB\mathfrak{A}_\infty$ zum Komplementwinkel,] so mufs auch

$$\sphericalangle ABF = \mathfrak{A}_\infty BF_1$$

und daher $\sphericalangle FBF_1 = 90^0$ sein.

Denkt man sich einen Kegelschnitt konstruiert, welcher AA_1 zur Hauptaxe, B und B_1 zu Brennpunkten hat, so erscheint letzteren jedes von den Scheiteltangenten abgeschnittene Stück einer anderen Tangente unter einem rechten Winkel. Die Tangenten dieses Kegelschnittes müssen daher mit den Tangenten der Kurven II. Klasse zusammenfallen, also ist letztere mit dem Kegelschnitte identisch.

477. *Andere Ableitung der Fundamentaleigenschaft der Brennpunkte.*

Es sei q_1 die Polare von Q_1; man fälle RS senkrecht auf die Nebenaxe und konstruiere auf ihr den zu S konjugierten Punkt S_1; dann ist

$$MS \,.\, MS_1 = \mp b^2$$

je nachdem die Nebenaxe die Kurve schneidet oder nicht schneidet. Es ist $Q_1 S_1$ die Polare von R, denn erstens sind

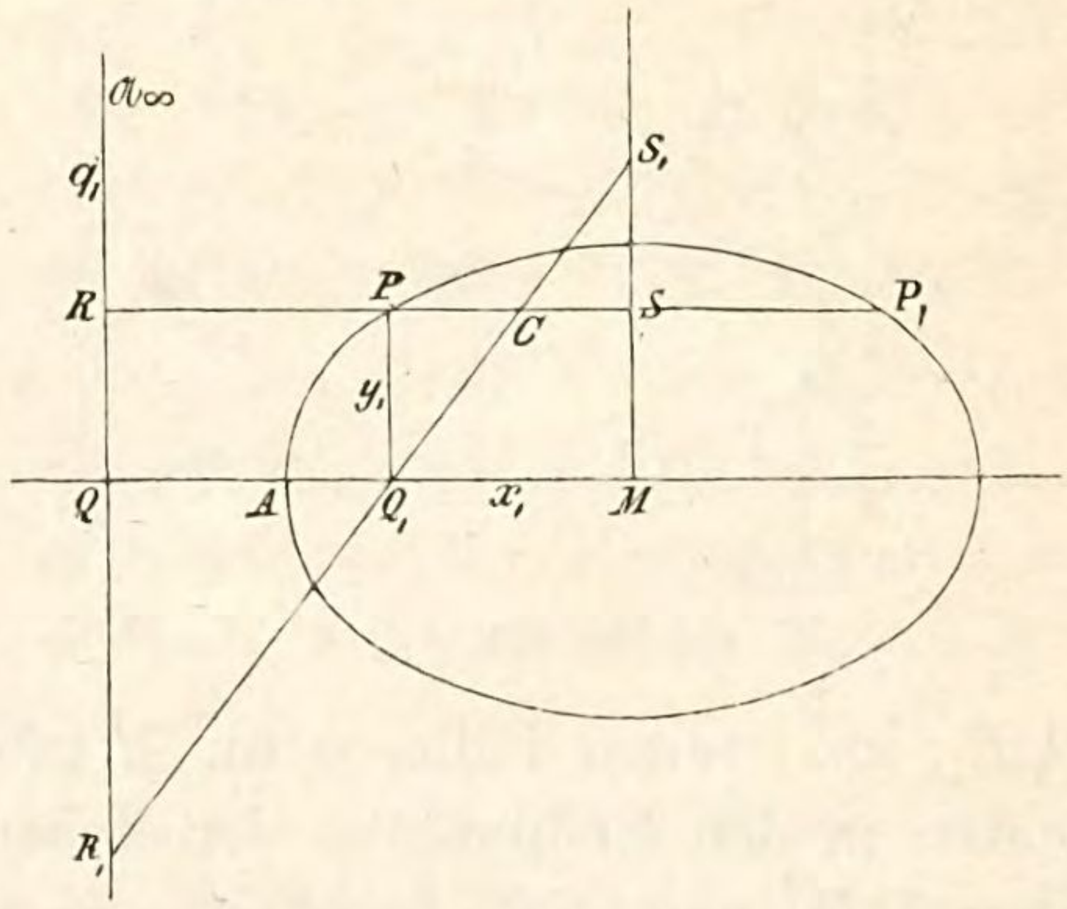


Fig. 194.

R und S_1 konjugierte Punkte, weil RS die Polare von S_1 ist und zweitens sind R und Q_1 konjugierte Punkte. Alle Paare konjugierter Punkte auf q_1 bilden eine Involution, deren Centralpunkt Q ist, denn der ihm zugeordnete ist $\mathfrak{A}_\infty$. Die Potenz dieser Involution ist $QR \,.\, QR_1$. Man setze

$$MQ = x,\ MQ_1 = x_1,\ AM = a;$$

dann ist

$$R_1 Q : x - x_1 = MS_1 : x_1$$

$$R_1 Q = \frac{MS_1\,(x - x_1)}{x_1}$$

und

$$QR \,.\, QR_1 = \frac{(x - x_1)\ MS \,.\, MS_1}{x_1} = \mp \frac{(x - x_1)\, b^2}{x_1}.$$

Aus 472. folgt

$$x \,.\, x_1 = a^2,\ x = \frac{a^2}{x_1},\ x - x_1 = \frac{a^2 - {x_1}^2}{x_1}.$$

Soll nun $QR \,.\, QR_1 = QQ_1^{\,2}$ sein, so hat man

$$\mp \frac{b^2\,(x - x_1)}{x_1} = (x - x_1)^2,$$

also

$$\mp b^2 = x_1\,(x - x_1) = a^2 - {x_1}^2$$

und

$${x_1}^2 = a^2 \mp b^2.$$

Beschreibt man über allen Punktpaaren RR_1 Kreise, so schneiden sie sich in zwei Punkten der Hauptaxe, denn diese steht im Centralpunkte auf q_1 senkrecht und zwar mufs einer dieser Punkte Q_1 sein. Man bezeichne ihn in diesem Falle mit B. Da $RB \perp R_1 B$ und beide Strahlen konjugiert sind, so folgt mit Rücksicht auf die symmetrische Lage der Kurve in Bezug auf beide Axen:

Es giebt auf der Hauptaxe zwei Punkte, in denen die Involutionen konjugierter Strahlen circulare Involutionen sind.

Die Lage dieser Punkte ergiebt sich aus der Gleichung

$$a^2 \mp b^2 = e^2$$

wenn man $MB = e$ setzt.

Aus diesem Fundamentalsatze folgt aber wie vorhin (476) die Identität der Kurve II. Klasse mit dem Kegelschnitte.

478. Mit Hilfe der harmonischen Punkte $RSPP_1$ folgt aus ähnlichen Dreiecken

$$QQ_1 : y_1 = QM : S_1 M;$$

Es ist aber $QQ_1 = x - x_1 = \frac{a^2 - x_1^2}{x_1}$, $QM = \frac{a^2}{x_1}$,

$$S_1 M = \mp \frac{b^2}{SM} = \mp \frac{b^2}{y_1},$$

also $$\frac{(a^2 - x_1^2)}{x_1} : y_1 = \frac{a^2}{x_1} : \mp \frac{b^2}{y_1}$$

oder $\mp b^2 (a^2 - x_1^2) = a^2 y_1^2$ und durch Division durch $x_1^2 y_1^2$

$$\frac{x_1^2}{a^2} \mp \frac{y_1^2}{b^2} = 1.$$

Die Gleichung der Kurve II. Klasse ist also die Kegelschnittsgleichung.

479. Wenn g_∞ eine Tangente der Kurve II. Klasse wird, so wird der Mittelpunkt M derselben der Berührungspunkt mit g_∞, also ein unendlich ferner Punkt. Alle Durchmesser dieser Kurve sind parallel. Da der Pol eines jeden im Unendlichen liegt, so erhält man einen Durchmesser, wenn man die Halbierungspunkte zweier parallelen Sehnen verbindet. Zieht man zwei zu diesem Durchmesser senkrechte Sehnen, so ist der Durchmesser a, welcher ihre Mitten verbindet, die Axe der Kurve, denn ihr Pol liegt senkrecht über ihr im Unendlichen. Die Tangente im Endpunkte A der Axe ist die

Scheiteltangente. Macht man auf ihr $AD = AE$, zieht durch D und E die Tangenten DD_∞ und EE_∞ an die Kurve und errichtet auf ihnen in D und E Senkrechte, so schneiden sie sich in einem Punkte B der Axe. Die Winkel DBD_∞ und EBE_∞ sind rechte Winkel. Schneidet irgend eine andere Tangente die Scheiteltangente in F und g_∞ in F_∞, so folgt wie oben (476), dafs auch $\sphericalangle FBF_\infty = 90^0$ ist.

480. Denkt man sich eine Parabel konstruiert, welche a zur Hauptaxe und die Senkrechte in A zur Scheiteltangente hat, so mufs sie, wie unmittelbar aus der Konstruktion folgt, mit der Kurve II. Klasse zusammenfallen.

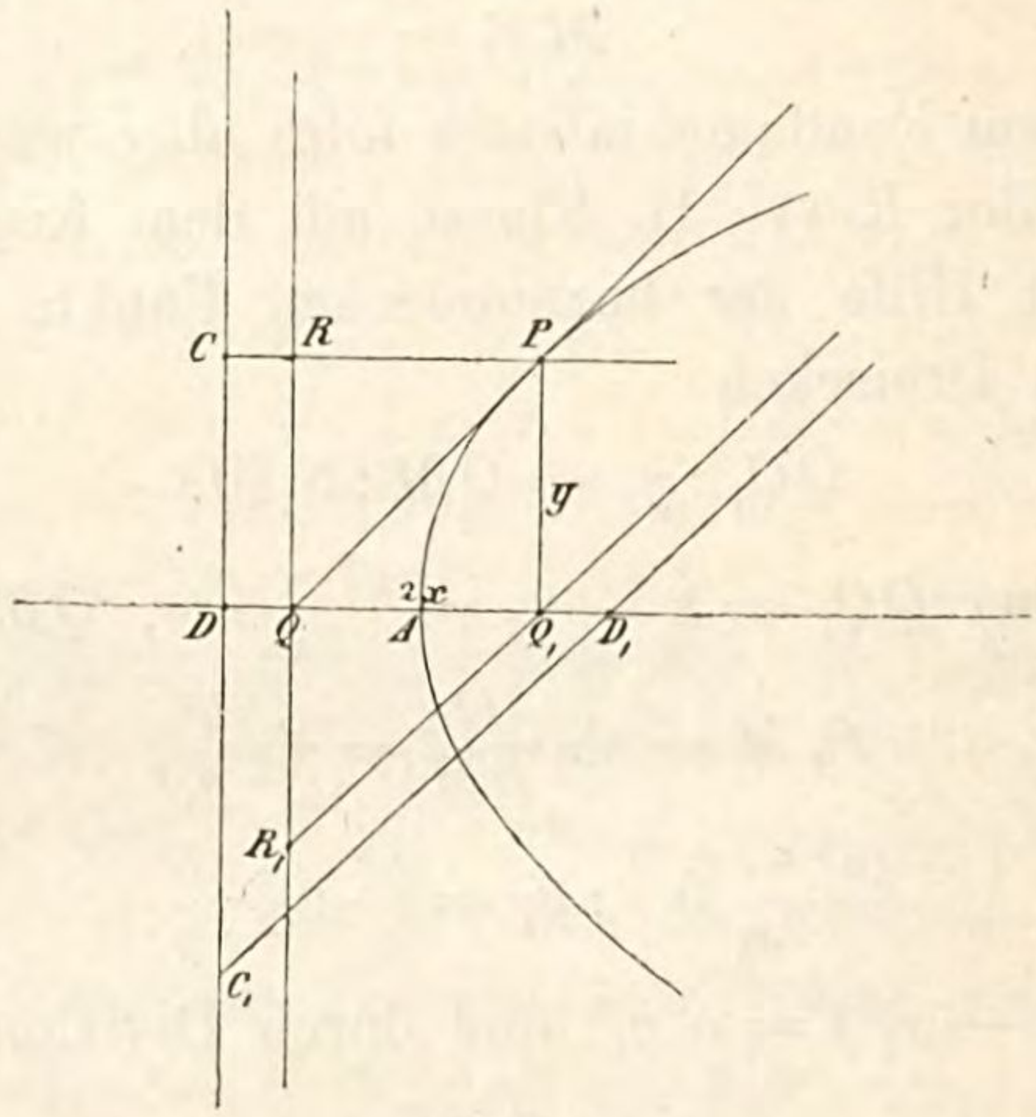


Fig. 195.

Sind Q und Q_1 zwei konjugierte Punkte der Axe, so müssen sie gleichweit von A entfernt sein, weil die Axe unendlich grofs ist.

Man errichte in Q_1 die Senkrechte $Q_1 P$, nehme auf der Axe noch zwei konjugierte Punkte DD_1 beliebig, errichte in Q und D die Senkrechten und fälle PR senkrecht darauf; der Durchschnitt mit der Senkrechten in D sei C. Da die Gerade PR die Richtung der Durchmesser hat, so liegt ihr Pol im Unendlichen auf der Tangente QP. Zieht man daher durch Q_1 und D_1 die Parallelen zur Tangente QP, so sind sie die Polaren von R und C und RR_1 sowie CC_1 sind konjugierte Punkte. Nun verhält sich

$$DC_1 : DD_1 = RQ : QQ_1 \text{ und, da } DC = RQ,$$
$$DC_1 \,.\, DC : DD_1 = RQ^2 : QQ_1.$$

Die Kreise über den Punktpaaren CC_1 konjugierter Punkte schneiden sich in zwei Punkten der Axe. Sollen diese Kreise sich in D_1 schneiden, so mufs

$$DC_1 \,.\, DC = \frac{DD_1 \,.\, RQ^2}{QQ_1} = DD_1^{\,2}$$

oder

$$RQ^2 = DD_1 \,.\, QQ_1$$

sein. Bezeichnet man DD_1 mit $2p$, QQ_1 mit $2x$, PQ_1 mit y, so hat man als Gleichung der Kurve

$$y^2 = 4p \,.\, x,$$

die Gleichung der Parabel. Da in diesem Falle $\sphericalangle CD_1C_1 = 90^0$, so folgt für den Punkt D_1 die Fundamentaleigenschaft des Brennpunktes, dafs je zwei konjugierte Strahlen desselben auf einander senkrecht sind.

481. Die Identität der Kurven II. Ordnung und II. Klasse mit den Kegelschnitten ist somit auf verschiedene Arten nachgewiesen. Zu einem anderen Identitätsbeweise gelangt man auf folgende Art.

Die Kurve K II. O. ist durch projektivische Büschel (S) und (S_1) erzeugt. Diese sind durch drei Paar homologe Strahlen bestimmt, also ist die Kurve selbst durch SS_1 und die Schnittpunkte ABC dieser Strahlenpaare bestimmt:

Jede Kurve K II. O. ist durch fünf ihrer Punkte bestimmt;

Durch fünf beliebige Punkte läfst sich stets eine einzige Kurve II. O. legen.

Sind $ABCDE$ fünf beliebige Punkte der Kurve K II. Ord., so stelle man eine solche harmonische Verwandtschaft her, dafs dem Fünfecke $ABCDE$ ein Kreisfünfeck $A_1B_1C_1D_1E_1$ verwandt ist (87). Dem um das letztere beschriebenen Kreise ist die Kurve K verwandt. Denn wegen Gleichheit der Peripheriewinkel auf demselben Bogen sind die Büschel, welche aus A_1 und B_1 die Punkte des Kreises projicieren, kongruent, also projektivisch; ihnen aber sind die Büschel verwandt, welche die Punkte der dem Kreise verwandten Kurve aus A und B projicieren. Da aber den homologen Strahlenpaaren A_1C_1 und B_1C_1, A_1D_1 und B_1D_1, A_1E_1 und B_1E_1 die homo-

logen Strahlenpaarre AC und BC, AD und BD, AE und BE verwandt sind, so fällt die dem Kreise verwandte Kurve mit der Kurve K zusammen:

Jede Kurve II. Ord. ist einem Kreise harmonisch verwandt.

482. Auch auf folgende Art läfst sich der letzte Satz erweisen.

Die Strahlenbüschel $S(ABCDE\ldots)$ und $S'(ABCDE\ldots)$ erzeugen die Kurve K II. Ord. Man schneide beide Büschel durch eine Gerade g, welche K nicht trifft, in den Punkten $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{E}\ldots$ und $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'\mathfrak{D}'\mathfrak{E}'\ldots$, so giebt es zwei Punkte, von denen die Segmente $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{D}\mathfrak{D}'$, ... unter gleichen Winkeln erscheinen. (8. 453.) Diese beiden Punkte seien $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}'$; der eine ist der Gegenpunkt des anderen bezüglich g. Man ziehe durch $\mathfrak{O}'$ eine Gerade o und nehme $\mathfrak{O}$ und o als Centrum und Axe einer harmonischen Verwandtschaft. Der Geraden g ist g_∞ verwandt. Den Punkten S und S' sind $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ verwandt, den Strahlen $S\mathfrak{A}$ und $S'\mathfrak{A}'$ sind parallele Gerade durch $\mathfrak{S}$ zu $\mathfrak{O}\mathfrak{A}$ und durch $\mathfrak{S}'$ zu $\mathfrak{O}\mathfrak{A}'$ verwandt, so dafs also $\sphericalangle\,\mathfrak{A}\mathfrak{O}\mathfrak{A}'$ dem von den letzteren gebildeten Winkel gleich ist. Da aber $\sphericalangle\,\mathfrak{A}\mathfrak{O}\mathfrak{A}' = \mathfrak{B}\mathfrak{O}\mathfrak{B}' = \mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{C}' = \ldots$, so sind auch die Winkel aller verwandten homologen Strahlen einander gleich und da sie über derselben Strecke $\mathfrak{S}\mathfrak{S}'$ gezeichnet sind, so liegen ihre Scheitel auf einem Kreise, der durch $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ geht. Dieser Kreis und die Kurve K sind also harmonisch verwandt.

Im Obigen ist nachgewiesen, dafs fünf Punkte eine Kurve II. O. eindeutig bestimmen. Zwei von ihnen sollen zusammenfallen, so dafs also die Kurve ihre Verbindungslinie in ihnen berührt. Es seien also $AABCD$ die fünf Punkte und a die Verbindungslinie AA; dann bestimmen die Strahlenpaare AA und BA, AC und BC, AD und BD zwei projektivische Strahlenbüschel und diese erzeugen eine Kurve durch $AABCD$.

Fallen auch noch B und C zusammen, so mufs die Kurve auch die Verbindungsgerade b in B berühren. Die Strahlenpaare AA und BA, AB und BB, AD und BD bestimmen wieder zwei projektivische Büschel und diese erzeugen eine Kurve II. O. Es folgt:

Durch vier Punkte und die Tangente in einem oder durch

drei Punkte und die Tangenten in zweien ist eine Kurve II. Ord. eindeutig bestimmt.

484. In gleicher Weise folgert man die Sätze:

Eine Kurve II. Klasse ist bestimmt durch fünf Tangenten oder durch vier Tangenten und den Berührungspunkt auf einer oder durch drei Tangenten und die Berührungspunkte auf zweien.

Sind *abcde* fünf Tangenten, so schneide man *a* und *b* durch *cde*, dann sind durch die Paare von Schnittpunkten *ac* und *bc*, ad und *bd*, *ae* und *be* zwei projektivische Punktreihen bestimmt, welche eine Kurve II. Kl. erzeugen.

Fällt *e* mit *a* zusammen, so werden diese projektivischen Punktreihen bestimmt durch die Punktpaare *aa* und *ba*, *ac* und *bc*, *ad* und *be*. Der Schnittpunkt *aa* ist in diesem Falle der gegebene Berührungspunkt.

Wenn *e* mit *a* und *d* mit *b* zusammenfällt, so kennt man also die Berührungspunkte auf *a* und *b* und die projektivischen Punktreihen sind bestimmt durch die Punktpaare *aa* und *ba*, *ab* und *bb*, *ac* und *bc*.

Um die Identität der Kurve II. Klasse mit einem Kegelschnitte nachzuweisen, stelle man eine harmonische Verwandtschaft her, in welcher dem durch *abcde* gebildeten Fünfseite ein anderes $\mathfrak{abcde}$ verwandt ist, dem sich ein Kreis einzeichnen läfst (90.). Der durch *abcde* bestimmten Kurve II. Kl. ist dieser Kreis harmonisch verwandt.

485. *Das gemeinschaftliche Poldreieck zweier Kegelschnitte.*

Zwei Kegelschnitte haben stets ein gemeinschaftliches Poldreieck, von welchem entweder alle drei Ecken reell oder zwei imaginär sind.

Eine beliebige Gerade g habe in Bezug auf die Kegelschnitte K_1 und K_2 die Pole G_1 und G_2; die Polaren eines Punktes P von g seien p_1 und p_2. Wenn P die Gerade g durchläuft, so durchlaufen p_1 und p_2 um G_1 und G_2 zwei projektivische Strahlenbüschel (20. 453.) und erzeugen einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, den Ort des dem Punkte P bezüglich beider Kegelschnitte konjugierten Punktes Q. Legt man durch einen festen Punkt P_o von g eine zweite Gerade g', so ist der Ort der ihren Punkten konjugierten Punkte ein zweiter Kegel-

schnitt $\mathfrak{K}'$, der den ersten in dem konjugierten Punkte Q_o schneiden mufs. Beide Kegelschnitte müssen deshalb entweder noch einen oder noch drei gemeinschaftliche Punkte haben, wie sich leicht ergiebt, wenn man einen Punkt den einen Kegelschnitt durchlaufen läfst und die Teile seines Weges unterscheidet, die er im innern und äufseren Gebiete des anderen zurücklegt.

Ist nur noch ein reeller Schnittpunkt vorhanden, so mag er A heifsen; sind aber drei reelle Schnittpunkte vorhanden, so mögen sie ABC heifsen.

Jeder dieser Punkte hat die Eigenschaft, dafs seine Polaren bezüglich K_1 und K_2 in eine Gerade zusammenfallen, weil sie sich sowohl auf g als auf g' schneiden müssen.

Nennt man a und b die Polaren von A und B, so mufs der Schnittpunkt (ab) die Gerade AB als gemeinsame Polare haben. Da es aber aufser ABC keinen Punkt giebt, welcher für beide Kegelschnitte dieselbe Polare hat, so mufs (ab) mit C zusammenfallen und es es ergiebt sich, dafs ABC ein Poldreieck ist, in welchem jede Seite die Polare ihrer Gegenecke ist.

486. Durch A lege man eine beliebige Gerade m; ihre Pole M_1 und M_2 bezüglich K_1 und K_2 liegen auf der Polare $a = BC$ und ordnet man die Polaren eines veränderlichen Punktes von m einander zu, so erhält man in M_1 und M_2 zwei projektivische Strahlenbüschel in perspektivischer Lage, denn der Punkt A von m hat a oder M_1M_2 als gemeinsame Polare, Diese Strahlenbüschel erzeugen also eine Gerade m', die auch durch A geht.

In gleicher Weise erhält man in B zwei zusammengehörige Gerade n und n' der Art, dafs die Punkte der einen konjugiert sind zu denen der anderen; die Geraden m und m' schneiden deshalb n und n' in zwei Paaren konjugierter Punkte. Da aber die konjugierten Punkte zu vier harmonischen Punkten auf n harmonische Punkte von n' sind, so beschreiben m und m' bei ihrer Drehung um A zwei projektivische Strahlenbüschel und zwar haben diese involutorische Lage, denn dem Strahl m entspricht m' doppelt. Rechnet man nämlich m zum ersten Büschel und schneidet damit n in D, so geht m' durch den

konjugierten Punkt D' auf n'; rechnet man aber m zum zweiten Büschel und schneidet damit n' in E, so mufs der Schnittpunkt E' von m' und n zu E konjugiert sein.

Die Involution der Strahlenpaare (mm') hat in A zwei Doppelstrahlen, $m_o m_o'$. Jeder von ihnen schneidet irgend zwei zugeordnete Strahlen der Involution (nn') in B oder (oo') in C in zugeordneten Punkten einer Involution, die für beide Kegelschnitte konjugierte Punkte sind. Also, wenn man diese Geraden gemeinschaftliche Sekanten nennt:

In jeder Ecke des gemeinschaftlichen Dreiecks giebt es zwei reelle oder imaginäre gemeinschaftliche Sekanten.

487. Auf a nehme man einen beliebigen Punkt M; seine Polaren m_1 und m_2 in Bezug auf K_1 und K_2 schneiden sich in A. Ordnet man die Pole einer veränderlichen Geraden durch M einander zu, so erhält man zwei projektivische Punktreihen in perspektivischer Lage. Der Schnittpunkt M' der Verbindungsgeraden homologer Punkte liegt auf a. Wenn M und M' sich auf a bewegen, so durchlaufen sie die Punktpaare einer Involution, deren Doppelpunkte die Eigenschaft haben, dafs je zwei konjugierte Strahlen für den einen Kegelschnitt auch konjugiert für den andern sind. Zu den Punktpaaren der Involution auf a gehören auch B und C; diese aber werden durch die Doppelpunkte harmonisch getrennt, also:

Auf jeder Seite des gemeinschaftlichen Poldreiecks giebt es zwei reelle oder imaginäre Punkte, welche für beide Kegelschnitte dieselbe Involution konjugierter Strahlen haben und durch zwei Ecken des Poldreiecks harmonisch getrennt werden.

Wegen weiterer projektivischer Untersuchungen mufs auf die eingehenden Werke von Schroeter und Reye verwiesen werden.

Wie im Vorhergehenden ausführlich gezeigt, lassen sich zwei Kegelschnitte durch harmonische Verwandtschaft entweder in konzentrische Kegelschnitte mit gemeinschaftlichen Axen verwandeln, wenn sie sich in vier reellen oder vier imaginären Punkten schneiden, oder auch in zwei Kreise, wenn sie entweder zwei reelle und zwei imaginäre oder vier imaginäre Punkte gemein haben. Daraus aber ergeben sich in einfacher Weise die Grundeigenschaften der Büschel und

besonders auch durch Zurückführung auf einfachere Gebilde leichtere Vorstellungen über den Verlauf und die Zusammensetzung des Büschels aus den einzelnen Individuen.

In gleicher Weise lassen sich zwei Kegelschnitte durch harmonische Verwandtschaft in zwei confocale Kegelschnitte mit gemeinschaftlicher Hauptaxe oder in zwei biconfocale Kegelschnitte verwandeln, je nachdem sie zwei reelle und zwei imaginäre oder vier imaginäre Tangenten haben. Mit Hilfe dieser Zurückführung gelangt man zu den Eigenschaften der Kegelschnittschar.

Sätze und Aufgaben.*)

1. Wenn man aus drei festen Punkten ACE einer Geraden Parallelen zu drei festen Geraden ace zieht, so schneiden sie sich in drei Punkten, die in einer Geraden liegen.

Die Parallelen durch A und E zu e und a mögen sich in M, diejenigen durch C und E zu e und c in N schneiden; ist dann O der Schnittpunkt von MN mit der durch A zu c gezogenen Parallelen, so ist, wenn man G den Schnittpunkt von AC mit MN nennt,

$$GE : GN = GA : GO \quad \text{und} \quad GA : GM = GC : GN,$$

also

$$GN \,.\, GA = GE \,.\, GO \quad \text{und} \quad GN \,.\, GA = GM \,.\, GC,$$

daher

$$GE \,.\, GO = GM \,.\, GC \quad \text{oder} \quad GE : GM = GC : GO,$$

d. h. $CO \parallel ME \parallel a$.

2. Die Höhenpunkte der vier Dreiecke, welche von vier Geraden $abcd$ gebildet werden, liegen in einer Geraden.

Die Höhen der vier Dreiecke sind vier Geraden $a_1 b_1 c_1 d_1$ parallel; man schneide d mit abc und wende auf die drei Schnittpunkte den vorigen Satz an, indem man $a_1 b_1 c_1$ als die festen Geraden nimmt.

3. Wenn A und B die Endpunkte einer Strecke sind, so soll mit AB nicht nur die Länge des von einem Punkte von A bis B zurückgelegten Weges, sondern auch die Richtung desselben bezeichnet werden, so dafs AB und BA entgegengesetzte Strecken bezeichnen. Sind $ABCD$ irgend vier Punkte einer Geraden, so nennt man das Verhältnis der Brüche $\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$ ein *Doppelverhältnis* und bezeichnet es mit

$$(ABCD) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}.$$

4. Auf einer Geraden sind drei Punkte ABC gegeben, man

---

*) Die mit einem Sterne (*) bezeichneten Aufgaben setzen Projektivität voraus.

soll einen vierten Punkt D konstruieren, so daſs das Doppelverhältnis $(ABCD)$ einen bestimmten Wert μ hat.

Fig. 1. Zwei parallele Gerade durch A und B schneide man mit einer beliebigen Geraden durch C in E und F, schneide auf FB über B hinaus eine Strecke BG ab, so daſs $BG : FB = \mu$ ist, so trifft die Gerade EG die gegebene Gerade in dem gesuchten Punkte D.

Würde man BG nach entgegengesetzter Richtung abgeschnitten haben, so würde das Doppelverhältnis auch den entgegengesetzten Wert annehmen.

Aus ähnlichen Dreiecken folgt

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AE}{BF}, \quad \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{BG}$$

und hieraus durch Division

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{BG}{BF} = \mu.$$

5. Vier Strahlen durch einen Punkt schneiden jede Gerade in vier Punkten von demselben Doppelverhältnis.

Fig. 1. Man schneide die vier Strahlen $E(ABCD)$ durch eine Gerade in $A_1B_1C_1D_1$, ziehe $F_1G_1 \parallel FG$, so ist

$$(A_1B_1C_1D_1) = B_1G_1 : B_1F_1 = BG : BF = \mu.$$

Den konstanten Wert des Doppelverhältnisses der vier Punkte, in welchen vier Strahlen irgend eine Gerade schneiden, nennt man das *Doppelverhältnis der vier Strahlen.*

5a. Wenn zwei Punktgruppen $ABCD$ und $AB_1C_1D_1$ von demselben Doppelverhältnisse μ einen Punkt A gemein haben, so treffen sich die Verbindungsgeraden der übrigen Punktpaare BB_1, CC_1, DD_1 in einem Punkte.

Es sei S der Schnittpunkt von BB_1 und CC_1; dann müssen die Strahlen $S(ABCD)$ die Gerade AB_1 im Doppelverhältnisse μ teilen, also muſs SD durch D_1 gehen.

5b. Wenn zwei Strahlenbüschel $abcd$ und $ab_1c_1d_1$ von demselben Doppelverhältnisse μ einen Strahl a gemein haben, so liegen die Schnittpunkte der übrigen Strahlenpaare bb_1, cc_1, dd_1 in einer Geraden.

Es sei s die Verbindungsgerade der Schnittpunkte bb_1 und cc_1, die Gerade s muſs von beiden Büscheln im Doppelverhältnisse μ geschnitten werden. Da aber drei Paar Schnittpunkte zusammenfallen, so thut dies auch das vierte Paar.

*5c. Sind ABC und $A_1B_1C_1$ drei feste Punkte zweier Geraden g und g_1, X und X_1 solche veränderliche Punkte, dafs

$$(ABCX) = (A_1B_1C_1X_1),$$

so durchlaufen X und X_1 zwei projektivische Reihen.

Denn denkt man sich die Geraden so verschoben, dafs A_1 mit A zusammenfällt, so treffen sich BB_1, CC_1, XX_1 in einem Punkte und die Punktreihen liegen perspektivisch.

*5d. Sind abc und $a_1b_1c_1$ drei Strahlen zweier Punkte P und P_1, x und x_1 solche veränderliche Strahlen, dafs

$$(abcx) = (a_1b_1c_1x_1),$$

so durchlaufen x und x_1 zwei projektivische Strahlenbüschel.

*5e. In zwei projektivischen Gebilden haben irgend vier Elemente des einen dasselbe Doppelverhältnis, wie die entsprechenden des anderen.

*5f. Wenn zwei projektivische Gebilde drei Elemente entsprechend gemein haben, so sind sie identisch. 5c. und 5d.

5g. Wenn die Ecken zweier Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ paarweise auf Geraden liegen, die sich in einem Punkte S schneiden, so schneiden sich ihre Seiten paarweise auf einer Geraden und umgekehrt.

Die Seitenpaare AB und A_1B_1, BC und B_1C_1, AC und A_1C_1 mögen sich in $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ treffen und die Gerade $\mathfrak{AB}$ mag von AA_1, BB_1, CC_1 in $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$ geschnitten werden.

Projiziert man $S\mathfrak{B}_1BB_1$ aus $\mathfrak{A}$ auf CC_1 und

$S\mathfrak{A}_1AA_1$ aus $\mathfrak{B}$ auf CC_1, so ist

$$(S\mathfrak{B}_1BB_1) = (S\mathfrak{C}_1CC_1) = (S\mathfrak{A}_1AA_1),$$

also treffen sich

$$\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_1,\ AC,\ A_1C_1$$

in einem Punkte und dieser mufs $\mathfrak{C}$ sein.

5h. Wenn von zwei vollständigen Vierecken fünf Paare von Seiten sich auf einer Geraden schneiden, so liegt auch der Schnittpunkt des sechsten Paares auf dieser Geraden.

Die Vierecke seien $ABCD$ und $A_1B_1C_1D_1$; es mögen sich AB und A_1B_1, BC und B_1C_1, CD und C_1D_1, AD und A_1D_1, AC und A_1C_1 auf einer Geraden g schneiden; man soll zeigen, dafs BD und B_1D_1 sich auch auf dieser Geraden schneiden.

Nach dem vorigen Satze treffen sich AA_1, BB_1, CC_1 in einem Punkte S wegen der Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$; ebenso folgt aber auch, dafs sich wegen der Dreiecke ACD und $A_1C_1D_1$ die

Geraden AA_1, CC_1, DD_1 in S treffen müssen. Daher liegen die Vierecke perspektivisch; da dies auch die Dreiecke ABD und $A_1B_1D_1$ thun, so müssen sich BD und B_1D_1 auf derselben Geraden schneiden, wie AB und A_1B_1, AD und A_1D_1.

6. In einer harmonischen Verwandtschaft haben vier Punkte oder vier Strahlen dasselbe Doppelverhältnis wie ihre verwandten Punkte und Strahlen.

7. Auf einer Geraden sind drei Punkte ABC gegeben, man soll eine harmonische Verwandtschaft herstellen, in welcher das Verhältnis der zu AC und BC verwandten Strecken $\mathfrak{AC}$ und $\mathfrak{BC}$ einen bestimmten Wert μ hat.

Man konstruiere auf AB einen Punkt D so, dafs

$$(ABCD) = \mu \text{ (Cf. 4)}$$

ist und nehme irgend eine Gerade durch D als Mittellinie der Verwandtschaft.

Der dem Punkte D verwandte Punkt $\mathfrak{D}$ fällt ins Unendliche; da aber $\mathfrak{ABCD}$ mit $ABCD$ auf denselben Strahlen durch das Centrum O der Verwandtschaft liegen, so ist

$$\mu = (ABCD) = (\mathfrak{ABCD}) = \frac{\mathfrak{AC}}{\mathfrak{BC}} : \frac{\mathfrak{AD}}{\mathfrak{BD}} = \frac{\mathfrak{AC}}{\mathfrak{BC}} : \frac{\infty}{\infty} = \frac{\mathfrak{AC}}{\mathfrak{BC}}.$$

8. Ein Viereck $ABCD$ durch harmonische Verwandtschaft in ein anderes $\mathfrak{ABCD}$ zu verwandeln, welches einem gegebenen Vierecke $A_1B_1C_1D_1$ ähnlich ist.

Die Diagonalen AC und BD, A_1C_1 und B_1C_1 schneiden sich in E und E_1; man konstruiere auf AC und BD die Punkte F und G so, dafs

$$(ACEF) = A_1E_1 : C_1E_1 \text{ und } (BDEG) = B_1E_1 : D_1E_1$$

und nehme FG als Mittellinie der Verwandtschaft.

Um das Centrum zu erhalten, schneide man FG mit AB und AD in H und J, und beschreibe über HJ und FG Kreise deren Peripheriewinkel gleich $B_1A_1D_1$ und $B_1E_1C_1$ sind, so schneiden sich diese in zwei Punkten, von denen man jeden als Centrum wählen kann.

9. Einen Kegelschnitt in einen anderen durch harmonische Verwandtschaft zu verwandeln, so dafs zwei gegebene Punkte P und Q in die Brennpunkte verwandelt werden.

Man schneide den gegebenen Kegelschnitt mit PQ in P_1Q_1 und konstruiere das Punktpaar RS, welches PQ und P_1Q_1 harmonisch teilt; durch P lege man zwei konjugierte Gerade, welche die durch R gehende Polare s von S in T und T_1 schneiden, dann sind QT und QT_1 auch konjugierte Strahlen, da PQ und s auch

konjugiert sind. Ersteres ist eine Folge des Satzes: Sind a und b sowie c und d konjugierte Strahlen, so sind auch die Geraden, welche die Schnittpunkte ac und bd sowie ad und bc verbinden, konjugiert.

Über den Punktpaaren der auf s erhaltenen Involution beschreibe man Kreise; diese treffen sich in zwei Punkten O und O_1. Wählt man einen von ihnen als Centrum und s als Mittellinie der Verwandtschaft, so sind in dieser dem Kegelschnitte und den Punkten P und Q ein anderer Kegelschnitt und seine Brennpunkte verwandt.

10. Einen Kegelschnitt und zwei Punkte durch harmonische Verwandtschaft in einen anderen Kegelschnitt, den Mittelpunkt und einen Brennpunkt zu verwandeln.

11. Einen Kegelschnitt und einen Punkt durch harmonische Verwandtschaft in einen Kreis und seinen Mittelpunkt zu verwandeln.

Ist P der gegebene Punkt, p seine Polare, so konstruiere man auf dieser zwei Paar konjugierter Punkte AA_1, BB_1; beschreibe über ihren Abständen Kreise, die sich in O und O_1 schneiden, so ist jeder dieser beiden Punkte das Centrum und p die Mittellinie der Verwandtschaft.

12. Gegeben seien ein fester Punkt O und eine feste Gerade o als Centrum und Axe; man konstruiere auf einer beliebig durch O gezogenen Geraden, welche die Axe in A' schneidet, irgend zwei Punkte A und $\mathfrak{A}$ so, dafs das Doppelverhältnis $(OA'A\mathfrak{A})$ einen festen Wert μ hat.

Dadurch ist jedem Punkte A der Ebene ein anderer $\mathfrak{A}$ und diesem wieder jener als verwandt zugeordnet; die so hergestellte Beziehung zwischen den Punkten der Ebene nennt man *centrische Collineation.*

In dieser ist jeder Punkt der Axe sich selbst verwandt.

Verbindet man die vier Punkte $OA'A\mathfrak{A}$ mit irgend einem Punkte P der Axe und schneidet das Büschel $P(OA'A\mathfrak{A})$ mit einer Geraden durch O in $OB'B\mathfrak{B}$, so sind auch B und $\mathfrak{B}$ verwandte Punkte. Durchläuft A die Gerade PA, so mufs $\mathfrak{A}$ die Gerade $P\mathfrak{A}$ durchlaufen. Man nennt daher die Geraden PA und $P\mathfrak{A}$ verwandte Gerade und folgert also:

Zwei verwandte Punkte liegen mit dem Centrum in einer Geraden.

Zwei verwandte Gerade schneiden sich auf der Axe.

Verwandte Punkte liegen stets auf verwandten Geraden und umgekehrt.

Es giebt eine Gerade g, welcher die unendlich ferne Gerade g_∞ verwandt ist; man nennt sie die *Gegenaxe der Collineation.*

Ist C irgend ein Punkt derselben, $\mathfrak{C}$ der verwandte Punkt, C' der Schnittpunkt von OC mit der Axe, so ist

$$(OC'C\mathfrak{C}) = \mu = \frac{OC}{C'C} : \frac{O\mathfrak{C}}{C'\mathfrak{C}} = \frac{OC}{C'C} : \frac{\infty}{\infty} = \frac{OC}{C'C}.$$

Demnach teilt die Gegenaxe g jede Strecke zwischen Centrum und Axe nach dem festen Verhältnisse μ und ist zur Axe parallel.

Die centrische Collineation ist durch Centrum, Axe und Gegenaxe bestimmt.

13. In jeder centrischen Collineation ist einem harmonischen oder involutorischen Gebilde wieder ein solches verwandt; jedem Kegelschnitte ist wieder ein Kegelschnitt verwandt. Beide schneiden sich auf der Collineationsaxe.

14. Liegt das Collineationscentrum O auf einem Kegelschnitte, so berührt er den verwandten Kegelschnitt in O.

15. Liegt das Collineationszentrum O auf einem Kegelschnitte K und geht die Collineationsaxe o durch O, so mufs K mit dem verwandten Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ in O drei zusammenfallende Punkte oder eine Berührung der *zweiten Ordnung* haben.

16. *In einem Punkte O eines Kegelschnittes K den Krümmungskreis zu konstruieren.*)*

Es kommt darauf an, den Kegelschnitt K in centrische Kollineation zum Krümmungskreise des Punktes O zu setzen. Es sei M der Mittelpunkt desselben und g_∞ seine Polare. Um M drehe sich ein Durchmesser des Kreises, dann mufs die verwandte Sehne des Kegelschnittes K sich um einen Punkt $\mathfrak{M}$ drehen; jeder Durchmesser und also auch jede ihm verwandte Kegelschnittsehne spannt in O einen rechten Winkel. Daher bilden die Schenkel dieser Winkel in O eine cirkulare Involution mit dem Involutionszentrum $\mathfrak{M}$. Dieses ist somit bekannt und seine Polare g in Bezug auf K ist die Gegenaxe der Kollineation. Da diese aber der Kollineationsaxe parallel ist, so ist auch diese bekannt; sie trifft K in seinem Schnittpunkte mit dem Krümmungskreise.

Dadurch erhält man die folgende Konstruktion des Krümmungskreises eines Punktes O.

Man lege durch O zwei rechte Winkel, verbinde die Punkte, in denen die Schenkelpaare den Kegelschnitt treffen, konstruiere die Polare g des Schnittpunktes $\mathfrak{M}$ dieser Verbindungslinie und

---

*) Fiedler, darstellende Geometrie.

lege durch O zu g die Parallele, welche den Kegelschnitt noch in A schneiden mag, so ist derjenige Kreis durch A, welcher die in O gezogene Kegelschnitttangente in O berührt, der Krümmungskreis.

17. Einen Kegelschnitt zu konstruieren aus dem Krümmungskreise in einem Punkte O und zwei Punkten A und B.

Die Geraden AO und BO mögen den Kreis $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ schneiden, dann sind AB und $\mathfrak{AB}$ verwandte Gerade und schneiden sich in einem Punkte C der Kollineationsaxe OC. Diese treffe den Kreis in D, so ist D auch ein Punkt des Kegelschnittes, von dem man also vier Punkte $ABDO$ und die Tangente in O kennt.

18. Das Doppelverhältnis von vier Punkten $ABCD$ bleibt ungeändert, wenn man sie in zwei Paare teilt und die Punkte eines jeden Paares vertauscht.

$$(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA).$$

Dies ergiebt sich erstens augenblicklich, wenn man die Doppelverhältnisse bildet und vergleicht, dann aber auch auf folgendem geometrischen Wege:

Einen beliebigen Punkt P verbinde man mit den Punkten $ABCD$, schneide die Strahlen $P(ABCD)$ mit einer durch A gezogenen Geraden in $AEFG$ und PC mit DE in Q, dann ist

$(ABCD) = (AEFG)$, wegen des Büschels $P(ABCD)$

$(AEFG) = (CQFP)$, wegen des Büschels $D(AEFG)$

$(CQFP) = (CDAB)$, wegen des Büschels $E(CQFP)$,

also auch

$$(ABCD) = (CDAB).$$

18a. Sind AA_1, BB_1, CC_1 drei solche Punktpaare einer Geraden g, dafs

$$(AA_1BC) = (A_1AB_1C_1),$$

so giebt es einen Punkt Q von solcher Lage, dafs

$$QA \,.\, QA_1 = QB \,.\, QB_1 = QC \,.\, QC_1;$$

die Punktpaare sind also in Involution. Man suche einen solchen Punkt Q, dafs

$$(AA_1BB_1CC_1Q) = (A_1AB_1BC_1C\infty),$$

dann folgt aus

$$(ABA_1Q) = (A_1B_1A\infty), \text{ dafs}$$

$$\frac{AA_1}{BA_1} : \frac{AQ}{BQ} = \frac{A_1A}{A_1\infty} : \frac{B_1A}{B_1\infty}$$

oder
$$\frac{B_1A}{BA_1} = \frac{AQ}{BQ}.$$

Ebenso
$$\frac{A_1B}{AB_1} = \frac{A_1Q}{B_1Q}$$

und daher
$$AQ \,.\, A_1Q = BQ \,.\, B_1Q.$$

18b. Sind AA_1, BB_1, CC_1 drei Punktpaare in Involution, so ist

$$(AA_1BC) = (A_1AB_1C_1).$$

Ist Q der Centralpunkt der Involution, so ist

$$QA \,.\, QA_1 = QB \,.\, QB_1 = QC \,.\, QC_1$$

und
$$QA : QB = QB_1 : QA_1,$$

also auch
$$AB_1 : A_1B = QA : QB$$

und
$$AB : A_1B_1 = QA : QB_1.$$

Hieraus
$$\frac{AB}{A_1B} \cdot \frac{AB_1}{A_1B_1} = \frac{QA^2}{QB \,.\, QB_1}.$$

Ebenso
$$\frac{AC}{A_1C} \cdot \frac{AC_1}{A_1C_1} = \frac{QA^2}{QC \,.\, QC_1},$$

also auch
$$\frac{AB}{A_1B} : \frac{AC}{A_1C} = \frac{A_1B_1}{AB_1} : \frac{A_1C_1}{AC_1}$$

oder
$$(AA_1BC) = (A_1AB_1C_1).$$

*19. Die drei Seitenpaare eines vollständigen Vierecks werden von jeder Geraden in den Punktpaaren einer Involution geschnitten.

Die Seitenpaare AB und CD, BC und AD, AC und BD mögen von irgend einer Geraden g in M und M_1, N und N_1, O und O_1 geschnitten werden, dann ist, wenn der Schnittpunkt (AC, BD) mit S bezeichnet wird

$$(AOSC) = (N_1OO_1M_1) = (MOO_1N)$$

sobald man $AOSC$ aus D und B auf g projiziert. Da aber auch nach dem Satze in 18.

$$(M_1O_1ON_1) = (N_1OO_1M_1),$$

so ist auch $(MOO_1N) = (M_1O_1ON_1)$, d. h.

die Punktpaare MM_1, NN_1, OO_1 sind drei Punktpaare einer Involution; denn die Punktgruppen MOO_1N und $M_1O_1ON_1$ haben dasselbe Doppelverhältnis, sind also projektivisch und jedem der Elemente O und O_1 entsprechen die Elemente O_1 und O doppelt. (Cf. auch 18b.)

20. Die drei Eckenpaare eines vollständigen Vierseits werden aus jedem Punkte durch die Strahlenpaare einer Involution projiziert.

21. Die drei Geraden, welche einen Punkt P von den drei Seitenpaaren eines vollständigen Vierecks harmonisch trennen, schneiden sich in einem Punkte.

Es mögen sich die Geraden, welche den Punkt P von zwei Seitenpaaren harmonisch trennen, in Q schneiden; die Gerade PQ trifft die Seitenpaare in den Punktpaaren einer Involution. Zwei dieser Punktpaare werden durch P und Q harmonisch geteilt, also mufs dies auch beim dritten Paare der Fall sein; die Gerade, welche P von dem dritten Seitenpaare harmonisch trennt, mufs durch Q gehen.

22. Die drei Punkte, welche eine Gerade p von den drei Eckenpaaren eines vollständigen Vierseits harmonisch trennen, liegen auf einer Geraden q.

23. Vier Punkte eines Kegelschnittes werden aus jedem anderen Punkte desselben durch ein Strahlenbüschel von konstantem Doppelverhältnisse projiciert.

I. Sind $ABCD$ vier Punkte eines Kegelschnittes K, E und F irgend zwei andere, so soll sein

$$E\,(ABCD) \curlywedge F\,(ABCD).$$

Stellt man eine harmonische Verwandtschaft her, in welcher dem Kegelschnitte K ein Kreis $\mathfrak{K}$ und den sechs Punkten $ABCDEF$ die Punkte $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{E}\mathfrak{F}$ verwandt sind, so sind die Büschel

$$\mathfrak{E}\,(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}) \text{ und } \mathfrak{F}\,(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D})$$

kongruent.

II. Man wende 5e. auf die projektivische Erzeugung an.

24. Welches ist der Ort eines Punktes, dessen Verbindungsgeraden mit vier festen Punkten ein konstantes Doppelverhältnis haben?

25. Jede Gerade g wird von einem Kegelschnitte K und den Gegenseitenpaaren eines eingeschriebenen Vierecks in einer Involution geschnitten.

Es seien MM_1, NN_1 und OO_1 die Schnittpunkte mit K und den Gegenseitenpaaren AB, CD und AD, BC dann ist

$$D\,(MM_1AC) \curlywedge B\,(MM_1AC) \curlywedge B\,(M_1MCA)$$

oder

$$(MM_1ON_1) \curlywedge (M_1MO_1N)$$

26. Alle Kegelschnitte eines Büschels schneiden eine Gerade in den Punktpaaren einer Involution.

27. Die sechs Ecken zweier Poldreiecke liegen auf einem Kegelschnitte.

Sind ABC und $A_1B_1C_1$ die beiden Poldreiecke, so ist der Pol von AB_1 der Schnittpunkt D von BC mit A_1C_1 und der Pol von AC_1 der Schnittpunkt E von BC mit A_1B_1. Nennt man D_1 und E_1 die Schnittpunkte von BC mit AB_1 und AC_1, so sind DD_1 und EE_1 je zwei konjugierte Punkte; da auch B und C konjugierte Punkte sind, so sind

$$BC,\ DD_1,\ EE_1$$

in Involution. — Durch $BAA_1B_1C_1$ lege man den Kegelschnitt $\mathfrak{K}$; er schneide BC noch in $\mathfrak{C}$, dann müssen auch

$$B\mathfrak{C},\ DD_1,\ EE_1 \text{ wegen } 25.$$

in Involution sein und $\mathfrak{C}$ mufs mit C zusammenfallen.

28. Die sechs Seiten zweier Poldreiecke sind Tangenten eines Kegelschnittes.

29. Liegen die Ecken zweier Dreiecke auf einem Kegelschnitte, so berühren die sechs Seiten einen andern Kegelschnitt.

Die beiden Dreiecke seien ABC und DEF, sieht man

$$ABCDEF$$

als ein eingeschriebenes Sechseck an, so schneiden sich

$$AB \text{ und } DE,\ BC \text{ und } EF,\ CD \text{ und } FA \text{ in}$$
$$M\ ,\ N\ ,\ O$$

Es treffen sich also

$$AF,\ CD,\ MN \text{ in einem Punkte } O.$$

Diese drei Geraden sind die Hauptdiagonalen des Sechsecks

$$FNCAMD$$

also werden die sechs Seiten desselben von einem Kegelschnitte nach Brianchons Satze berührt; die sechs Seiten sind aber die Seiten der Dreiecke ABC und DEF.

30. Berühren die Seiten zweier Dreiecke einen Kegelschnitt, so liegen die sechs Ecken auf einem anderen Kegelschnitte.

31. Ist ein Dreieck einem Kegelschnitte K ein- und einem anderen $\mathfrak{K}$ umgeschrieben, so giebt es unendlich viele Dreiecke, welche dem ersten Kegelschnitte ein- und dem zweiten umgeschrieben sind.

32. Alle Kegelschnitte, welche ein gemeinschaftliches Poldreieck haben, schneiden jede Transversale, welche durch eine Ecke desselben geht, in einer Involution.

Denn diese Ecke und der Schnittpunkt der Gegenseite mit der Transversale trennen die Schnittpunkte jedes Kegelschnittes harmonisch.

33. Jede Transversale durch eine Ecke des gemeinschaftlichen Poldreiecks einer Kegelschnittschar mit vier reellen Tangenten, wird von den Kegelschnitten der Schar und den Gegenseitenpaaren des umgeschriebenen Vierseits in den Punktpaaren einer Involution geschnitten. 32.

34. Wenn zwei Kegelschnitte K und K_1 ihre gemeinschaftlichen Tangenten $abcd$ in $ABCD$ und $A_1B_1C_1D_1$ berühren, so hat ein Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, der durch ABC geht und d in D_1 berührt, zur zweiten gemeinschaftlichen Sehne mit K_1 die gerade Linie, welche die Schnittpunkte von a mit BC, b mit AC, c mit AB verbindet. (Salmon-Fiedler. Anal. Geom. der Kegelschnitte. IV. Aufl. S. 410.)

Die Gerade, welche die Berührungspunkte zweier Gegenseiten eines umgeschriebenen Vierseits verbindet, geht durch einen Diagonalpunkt desselben, folglich auch die Gerade AB. Sie werde von K_1 in $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$ geschnitten; sind noch $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ ihre Schnittpunkte mit c und d, so sind

$$AB,\ \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1,\ \mathfrak{C}\mathfrak{D}$$

drei Punktpaare in Involution.

Die Gerade AB wird aber von den Kegelschnitten K_1 und $\mathfrak{K}$ und den gemeinschaftlichen Sehnen derselben in einer Involution geschnitten; diese Schnittpunkte sind AB auf $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$ auf K_1, also ist die Involution dieselbe mit der vorigen und da d die eine gemeinschaftliche Sehne ist, mufs die andere durch den Schnittpunkt von c mit AB gehen.

35. *Der Feuerbach'sche Satz.* In jedem Dreiecke berühren sich ein Berührungskreis und derjenige Kreis, welcher durch die Mitten der drei Seiten geht. (Salmon-Fiedler. Anal. Geom. der Kegelschnitte.)

Den Ecken $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ eines Dreiecks liegen die Seiten abc gegenüber; diese werden in ihren Halbierungspunkten ABC von einer Ellipse K und in den Punkten $A_1B_1C_1$ von einem Kreise K_1 berührt. Die vierte gemeinschaftliche Tangente von K und K_1 sei d und berühre K_1 in D_1. Legt man nun durch die Mitten ABC einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, welcher d in D_1 also auch K_1 in D_1 berührt, so ist seine zweite gemeinschaftliche Sekante mit K_1 diejenige Gerade, auf welcher die Schnittpunkte von $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ mit AB, $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ mit BC, $\mathfrak{C}\mathfrak{A}$ mit CA liegen. Diese Gerade liegt aber im Unendlichen, also geht der Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ durch die Kreispunkte der unendlich fernen Geraden, in denen diese von jedem Kreise geschnitten wird und ist daher selbst ein Kreis.

36. *Zwei beliebige Vierecke $ABCD$ und $A_1B_1C_1D_1$ lassen sich stets als entsprechende Figuren in einer centrischen Collineation betrachten.*

Man verwandle zunächst durch harmonische Verwandtschaft oder centrische Collineation das Viereck $ABCD$ in ein anderes $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$, welches dem Vierecke $A_1B_1C_1D_1$ ähnlich ist. Ist S das Centrum der Verwandtschaft, so lege man zwischen die Geraden $S\mathfrak{A}$ und $S\mathfrak{B}$ eine Strecke $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$ parallel zu $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und gleich A_1B_1 und konstruiere darüber zwischen den Geraden $S(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D})$ ein Viereck, welches dem Vierecke $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ ähnlich ist, so ist es dem Vierecke $A_1B_1C_1D_1$ kongruent. Also liegt $ABCD$ mit einem dem Vierecke $A_1B_1C_1D_1$ kongruenten Vierecke $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1$ perspektivisch.

Es bleibt zu zeigen, dafs beide auch collinear-verwandt in einer centrischen Collineation sind.

Da $ABCD$ und $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ in centrischer Collineation sind, so liegen die Schnittpunkte

M, N, O, P von

AB und $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, BC und $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, CD und $\mathfrak{C}\mathfrak{D}$, DA und $\mathfrak{D}\mathfrak{A}$

in einer Geraden g.

Es schneiden nun

AB, BC, CD, DA die Seiten $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_1\mathfrak{A}_1$

in M_1, N_1, O_1, P_1,

so ist wegen paralleler Geraden

$AM : AM_1 = A\mathfrak{A} : A\mathfrak{A}_1 = AP : AP_1$, also $M_1P_1 \parallel MP$ und

$BM : BM_1 = B\mathfrak{B} : B\mathfrak{B}_1 = BN : BN_1$, also $M_1N_1 \parallel MN$

Daher folgt, dafs $M_1N_1O_1P_1$ in einer zu g parallelen Geraden g_1 liegen.

S und g_1 sind Centrum und Axe der centrischen Collineation, in welcher $ABCD$ und $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1$ sich entsprechen.

37. In der durch die Vierecke $ABCD$ und $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1$ (Cf. 36) hergestellten centrischen Collineation entspricht jedem Punkte X ein anderer Punkt Y_1.

Denkt man sich alle Punkte Y_1 der Ebene starr mit dem Vierecke $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1$ verbunden und dieses in die Lage $A_1B_1C_1D_1$ gebracht, so gelangen die Punkte Y_1 in die Lage X_1, stehen aber in einer bestimmten Beziehung zu den Punkten X. Diese Beziehung nennt man *Collinearität*. Dieselbe ist dadurch ausgezeichnet, dafs vier Punkten von einem bestimmten Doppelverhältnisse vier Punkte von demselben Doppelverhältnisse entsprechen. Es folgt:

Die collineare Beziehung ist durch zwei Vierecke als entsprechende bestimmt.

Man hat also die Ebene als doppelt zu betrachten und rechnet alle Punkte X zu einem Systeme Σ, alle Punkte X_1 zu einem andern Σ_1.

Die Systeme Σ und Σ_1 sind in collinearer Beziehung, die Ebene ist collinear auf sich selbst bezogen.

38. In zwei collinearen Systemen sind die Geraden, welche zwei Paare entsprechender Punkte verbinden, entsprechende Gerade und die Punkte, in denen sich zwei Paare entsprechender Geraden schneiden, entsprechende Punkte. 12.

39. In einer durch zwei entsprechende Vierecke $ABCD$ und $A_1B_1C_1D_1$ bestimmten collinearen Beziehung zu einer Geraden g die entsprechende Gerade g_1 zu finden.

Es mögen sich AB und CD in E, A_1B_1 und C_1D_1 in E_1 schneiden; die beiden ersten Geraden AB und CD werden von g in P und Q geschnitten. Man bestimme die Punkte P_1 und Q_1 so, dafs

$$(ABEP) \barwedge (A_1B_1E_1P_1) \text{ und } (CDEQ) \barwedge (C_1D_1E_1Q_1)$$

ist, dann ist P_1Q_1 die gesuchte Gerade g_1.

40. In zwei collinearen Systemen Σ und Σ_1 zu einem Punkte R den entsprechenden Punkt R_1 zu konstruieren.

Die collineare Beziehung sei bestimmt durch die einander entsprechenden Vierecke $ABCD$ und $A_1B_1C_1D_1$; man verbinde A und B mit R durch die Strahlen p und q und konstruiere in A_1 und B_1 die Strahlen p_1 und q_1 so, dafs

$$(AB,\ AC,\ AD,\ p) \barwedge (A_1B_1,\ A_1C_1,\ A_1D_1,\ p_1) \text{ und}$$
$$(BA,\ BC,\ BD,\ q) \barwedge (B_1A_1,\ B_1C_1,\ B_1D_1,\ q_1) \text{ ist,}$$

dann ist der Schnittpunkt von p_1 und q_1 der gesuchte Punkt.

41. Wenn in einer centrischen Collineation mit dem Centrum O und der Axe o die Systeme Σ und Σ_1 verwandt sind und man diese Systeme irgendwie gegeneinander verschiebt, so sind dieselben in allgemeiner collinearer Beziehung zu einander.

Jeder Geraden a, welche zur Axe o parallel ist, entspricht in der centrischen Collineation, eine Gerade a_1, die auch zu o parallel ist, denn jeder Punkt von o, also auch der unendlich ferne entspricht sich selbst und zwei entsprechende Gerade schneiden sich auf der Axe.

Dreht sich eine Gerade um O und schneidet a in $BCDE..$,

a_1 in $B_1C_1D_1E_1$ . ., so ist wegen der Parallelität von a und a_1

$$BC : CD : DE = B_1C_1 : C_1D_1 : D_1E_1.$$

Die Punktreihen auf je zwei zur Axe parallelen entsprechenden Geraden sind also projektivisch-ähnlich.

Wenn a und a_1 die von O auf o gefällte Senkrechte OO_1 in A und A_1 schneiden, dann ist

$$\frac{OA}{O_1A} = \mu \cdot \frac{OA_1}{O_1A_1}.$$

Soll nun $OA = OA_1$ werden, so mufs

$$O_1A_1 = \mu \cdot O_1A$$

sein. Bezeichnet man $OA = OA_1$ mit x, so ist

$$O_1A_1 = OO_1 + x, \quad O_1A = OO_1 - x, \text{ also}$$

$$OO_1 + x = \mu (OO_1 - x)$$

$$x = \frac{\mu - 1}{\mu + 1} \cdot OO_1.$$

Daraus folgt: *Es giebt in jeder centrischen Collineation zwei zur Axe parallele entsprechende Gerade in gleichem Abstande vom Centrum. Auf diesen sind die durch entsprechende Punkte gebildeten Punktreihen projektivisch gleich.*

Bringt man die centrischen Systeme in allgemein collineare Lage, so ergiebt sich sofort:

In zwei collinearen Systemen giebt es zwei Paare paralleler entsprechender Geraden, auf denen die Punktreihen entsprechender Punkte projektivisch gleich sind.

42. In zwei collinearen Systemen Σ und Σ_1 die entsprechend gleichen Punktreihen zu konstruieren.*)

In der centrischen Lage entspricht der Geraden g_∞ eine andere g, welche Gegenaxe genannt wurde; nach der Verschiebung habe g in den Systemen Σ und Σ_1 die Lagen r und q_1 angenommen. Da g zur Axe parallel war, so müssen die unendlich fernen Punkte R^∞ und $Q_1{}^\infty$ dieser Geraden einander entsprechen und auf je zwei zu ihnen parallelen entsprechenden Geraden müssen die entsprechenden Punktreihen projektivisch ähnlich sein.

Es giebt zwei entsprechende zu r und q_1 normale Gerade der collinearen Systeme.

Um sie zu finden, denke man sich auf einer zu r normalen Geraden den unendlich fernen Punkt $\mathfrak{R}^\infty$, so entspricht ihm im

*) Schroeter, Theorie der Oberflächen II. O. S. 364.

Systeme Σ_1 der Punkt $\mathfrak{Q}_1$; dem zu q_1 senkrechten Strahle e_1 des Punktes $\mathfrak{Q}_1$ entspricht ein durch $\mathfrak{R}^\infty$ gehender, also zu r normaler, Strahl e.

Dem Schnittpunkte $\mathfrak{Q}_1 = (q_1 e_1)$ entspricht in Σ der Schnittpunkt $(g_\infty e) = \mathfrak{R}^\infty$ und dem Punkte $(g_\infty e_1) = \mathfrak{Q}_1{}^\infty$ von Σ_1 entspricht in Σ der Punkt $(r e) = \mathfrak{R}$.

Zieht man nun in Σ zwei zu e parallele Gerade xx' in gleichem Abstande von e, so sind $g_\infty exx'$ harmonische Strahlen, also sind die entsprechenden $q_1 e_1 x_1 x_1'$ in Σ_1, welche durch $\mathfrak{Q}_1$ gehen, auch harmonisch und da $\sphericalangle (q_1 e_1) = 90^0$ ist, so halbieren die Strahlen q_1 und e_1 die von x_1 und x_1' gebildeten Winkel. — Sind ferner $y_1 y_1'$ zwei Strahlen in gleichem Abstande von e_1 und zwar demselben, wie x und x' von e, so entsprechen ihnen in Σ zwei gegen e und r gleich geneigte Strahlen yy' durch $\mathfrak{R}$.

Die Geraden $xx'yy'$ und $x_1 x_1' y_1 y_1'$ schneiden sich in den Ecken zweier entsprechenden Rechtecke der Systeme Σ und Σ_1. Diejenigen entsprechenden Seiten derselben, welche gleich grofs sind, sind die gesuchten Geraden.

43. Wenn zwei entsprechende projektivisch gleiche Gerade der collinearen Systeme Σ und Σ_1 aufeinander fallen, so liegen dieselben perspektivisch.

44. Jedem Kegelschnitte eines von zwei collinearen Systemen entspricht im anderen auch ein Kegelschnitt.

45. Zwei Kegelschnitte K und K_1 können stets als entsprechend in zwei collinearen Systemen betrachtet werden.

Auf K seien $ABCDE$ fünf beliebige Punkte; den drei ersten werden als entsprechend auf K_1 drei Punkte $A_1 B_1 C_1$ zugewiesen. Auf letzterem sei P_1 ein beliebiger Punkt; man bestimme dann einen Strahl p_1 so, dafs

$$(EA,\ EB,\ EC,\ ED) \barwedge (P_1 A_1,\ P_1 B_1,\ P_1 C_1,\ p_1)$$

ist. Dieser Strahl p_1 schneide K in D_1. Ordnet man D und D_1 einander zu, so ist durch die Beziehung von

$$ABCD \text{ und } A_1 B_1 C_1 D_1$$

aufeinander eine collineare Beziehung hergestellt, in welcher K und K_1 einander entsprechen müssen.

46. Wenn bei zwei centrisch collinearen Systemen die Collineationsaxe ins Unendliche rückt, so werden je zwei entsprechende Gerade parallel und je zwei entsprechende Dreiecke ähnlich. Die Systeme heifsen dann *ähnlich.*

47. Zwei collineare Systeme heifsen *affin*, wenn die unend-

lich ferne Gerade sich selbst entspricht (ohne dafs ihre Punkte entsprechende sind).

Zwei affine Systeme sind daher bestimmt durch drei Paare entsprechender Geraden.

Sind abc und $a_1 b_1 c_1$ die entsprechenden Geraden, ABC die den Seiten abc gegenüberliegenden Ecken des Dreiseits abc und ebenso $A_1 B_1 C_1$ diejenigen des Dreiseits $a_1 b_1 c_1$, so sind AA_1, BB_1, CC_1 Paare entsprechender Punkte.

Wird nun g_∞ von abc und $a_1 b_1 c_1$ in $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1$ geschnitten, so sind auch $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$ entsprechende Punkte und durch das Entsprechen von $ABC\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ und $A_1 B_1 C_1 \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1$ ist die collineare Beziehung bestimmt. 37.

48. *In affinen Systemen sind entsprechende Punktreihen ähnlich.*

Auf den Geraden g und g_1 seien ABC und $A_1 B_1 C_1$ entsprechende Punkte, D^∞ und D_1^∞ ihre einander entsprechenden unendlich fernen Punkte; also

$$(ABCD^\infty) \barwedge (A_1 B_1 C_1 D_1^\infty) \text{ oder}$$

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD^\infty}{BD^\infty} = \frac{A_1 C_1}{B_1 C_1} : \frac{A_1 D_1^\infty}{B_1 D_1^\infty} \text{ und daraus}$$

$$AC : BC = A_1 C_1 : B_1 C_1 \text{ oder } AC : A_1 C_1 = BC : B_1 C_1.$$

49. In affinen Systemen stehen je zwei entsprechende Figuren in konstantem Verhältnisse.

Es seien $ABCD$ und $A_1 B_1 C_1 D_1$, $EFGH$ und $E_1 F_1 G_1 H_1$ zwei Paare entsprechender Parallelogramme. Die Durchschnitte von

AB mit EH und FG sowie von CD mit EH und FG seien

J und K sowie M und L

Die Punkte $JKLM$ und die entsprechenden Durchschnittspunkte $J_1 K_1 L_1 M_1$ der Seiten der Parallelogramme $A_1 B_1 C_1 D_1$ und $E_1 F_1 G_1 H_1$ bilden die Ecken entsprechender Parallelogramme. Es verhält sich nun

$$ABCD : JKLM = AB : JK \text{ und}$$

$$A_1 B_1 C_1 D_1 : J_1 K_1 L_1 M_1 = A_1 B_1 : J_1 K_1$$

weil die Parallelogramme zwischen parallelen Geraden liegen. Da aber nach dem vorigen Satze

$$AB : JK = A_1 B_1 : J_1 K_1, \text{ so mufs auch}$$

$$ABCD : A_1 B_1 C_1 D_1 = JKLM : J_1 K_1 L_1 M_1 \text{ und ebenso}$$

$$EFGH : E_1 F_1 G_1 H_1 = JKLM : J_1 K_1 L_1 M_1$$

sich verhalten, woraus sich ergiebt

$$ABCD : EFGH = A_1B_1C_1D_1 : E_1F_1G_1H_1.$$

50. In affinen Systemen kann einer Ellipse nur eine Ellipse, einer Parabel nur eine Parabel, einer Hyperbel nur eine Hyperbel verwandt sein.

51. In affinen Ellipsen und Hyperbeln entsprechen einander die Mittelpunkte, als Pole der sich selbst entsprechenden unendlich fernen Geraden, und daher auch die Durchmesser.

52. Zwei affine Systeme Σ und Σ_1 sind durch drei Paare entsprechender Punkte gegeben; man soll zu einer beliebigen Geraden die entsprechende Gerade und zu einem beliebigen Punkte den entsprechenden Punkt konstruieren.

Die gegebenen Paare entsprechender Punkte seien AA_1, BB_1, CC_1.

Um zur Geraden g von Σ die entsprechende Gerade g_1 von Σ_1 zu konstruieren, schneide man AB und AC mit g in D und E und konstruiere auf A_1B_1 und A_1C_1 die entsprechenden Punkte D_1 und E_1 so, dafs

$$AD : BD = A_1D_1 : B_1D_1 \text{ und } AE : CE = A_1E_1 : C_1E_1.$$

dann ist D_1E_1 die verlangte Gerade g_1.

Soll nun zum Punkte P der entsprechende Punkt P_1 gefunden werden, so schneide man AB und AC mit PC und PB in $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{B}$, konstruiere zu diesen Punkten die entsprechenden Punkte $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{B}_1$, so schneiden sich $C_1\mathfrak{C}_1$ und $B_1\mathfrak{B}_1$ in P_1.

53. Ein Kegelschnittbüschel, von welchem zwei Kegelschnitte gegeben sind, enthalte einen Kreis; man soll ihn konstruieren.

Eine Gerade g wird von den Kegelschnitten des Büschels in einer Involution geschnitten; es sei Q der Centralpunkt und q^2 die Potenz der Involution. Beschreibt man um Q mit q einen Kreis, so wird dieser von dem gesuchten entweder rechtwinklig oder unter dem Durchmesser geschnitten. Wiederholt man diese Konstruktion dreimal, so ist die Aufgabe auf eine einfache Kreiskonstruktion zurückgeführt.

54. Einen Kegelschnitt durch harmonische Verwandtschaft in sich selbst zu verwandeln, so dafs zwei konjugierte Durchmesser in die beiden Axen verwandelt werden.

Die konjugierten Durchmesser seien $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$, die beiden Axen AA_1 und BB_1.

Man gelangt zur gewünschten Verwandtschaft, wenn man den zu einer der vier Sehnen

$$A\mathfrak{A},\ A\mathfrak{A}_1,\ B\mathfrak{A},\ B\mathfrak{A}_1$$

konjugierten Durchmesser als Axe und seinen unendlich entfernten Pol als Centrum nimmt.

55. Ein Kegelschnittbüschel durch harmonische Verwandtschaft in ein anderes zu verwandeln, welches einen Kreis und einen Kegelschnitt des ersten Büschels enthält.*)

Wenn ein Kegelschnittbüschel einen Kreis enthalten soll, so sind die Axen aller seiner Kegelschnitte zwei festen Richtungen parallel, nämlich den Hauptaxen der beiden im Büschel vorkommenden Parabeln. Der Mittelpunktskegelschnitt hat also zwei im Unendlichen in normalen Richtungen liegende Punkte und ist daher eine gleichseitige Hyperbel.

Es seien nun $KK'K''\ldots$. Kegelschnitte des gegebenen Büschels und M der Mittelpunktskegelschnitt desselben. Falls in dem Büschel, was hier angenommen werden soll, eine Ellipse vorkommt, so enthält es unendlich viele Ellipsen und die Involution, in welcher die unendlich ferne Gerade von den Kegelschnitten des Büschels geschnitten wird, hat zwei Doppelpunkte. Da diese Involution mit der Polarinvolution in Bezug auf M identisch ist, so hat M auf g_∞ zwei reelle Punkte und ist eine Hyperbel. (401. 414.) In jedem Kegelschnitte des Büschels giebt es ein Paar konjugierter Durchmesser, welches diesen Asymptoten parallel ist.

Der Mittelpunkt von K sei O; die beiden zu den Asymptoten von M parallelen konjugierten Durchmesser von K seien $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$; die Axen von K seien AA_1 und BB_1.

Man verwandle nun nach 54. durch harmonische Verwandtschaft K in sich selbst, $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$ in AA_1 und BB_1, $K'K''\ldots$ in die Kegelschnitte $\mathfrak{K}'\mathfrak{K}''\ldots$. Weil g_∞ sich selbst verwandt ist, (denn das Centrum der Verwandtschaft liegt im Unendlichen), so ist jedem Kegelschnittsmittelpunkte des Büschels $(KK'\ldots)$ ein Kegelschnittsmittelpunkt im Büschel $(K\mathfrak{K}'\ldots)$, also dem Mittelpunktskegelschnitt M des ersten Büschels der Mittelpunktskegelschnitt $\mathfrak{M}$ des zweiten verwandt. Den Asymptoten von M sind diejenigen von $\mathfrak{M}$ verwandt und da die ersteren zu $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$ parallel sind, so müssen die letzteren den verwandten Axen AA_1 und BB_1 parallel, also rechtwinklig sein, folglich mufs $\mathfrak{M}$ eine gleichseitige Hyperbel sein und das Büschel $(K\mathfrak{K}'\ldots)$ enthält einen Kreis.

*) Kortum. Über geometrische Aufgaben III. und IV. Grades.

56. Ein Kegelschnitt K ist durch funf Punkte $ABCDE$ gegeben, man soll seine Schnittpunkte mit einem gezeichnet vorliegenden Kegelschnitte $\mathfrak{K}$, allein mit Zirkel und Lineal, konstruieren.

Man stelle eine solche Verwandtschaft her (55), dafs K sich selbst verwandt ist und das dem Büschel $(K\mathfrak{K}\ \ldots)$ verwandte Büschel einen Kreis O enthält. Diesen Kreis konstruiere man (53), und suche zu seinen Schnittpunkten mit $\mathfrak{K}$ die verwandten Punkte, so sind es die Schnittpunkte von K und $\mathfrak{K}$.

57. Zwei Kegelschnitte K und K_1 sind durch hinreichende Bestimmungsstücke gegeben, aufserdem giebt es einen gezeichnet vorliegenden Kegelschnitt $\mathfrak{K}$. Man soll die Schnittpunkte von K und K_1 mit Hilfe von Zirkel und Lineal und mit Benutzung von $\mathfrak{K}$ konstruieren.

Man stelle eine collineare Beziehung her, in welcher dem Kegelschnitte K der gezeichnet vorliegende Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ und dem Kegelschnitte K_1 ein anderer K_1' entspricht; die den Schnittpunkten von $\mathfrak{K}$ und K_1' collinear entsprechenden Punkte sind die gesuchten Schnittpunkte von K und K_1.

58. Die gemeinschaftlichen Sekanten zweier gezeichnet vorliegenden Kegelschnitte K und K_1 mit Benutzung von Zirkel und Lineal, zu konstruieren.

K und K_1 sollen keine gemeinschaftlichen Punkte haben; sie besitzen deshalb ein reelles gemeinschaftliches Poldreieck ABC und dieses kann man mit Hilfe von 57. konstruieren.

Es seien g und g_1 zwei beliebige Gerade; ihre Polarkegelschnitte $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$ gehen durch ABC und treffen sich noch in einem vierten Punkte D, der dem Schnittpunkte (gg_1) in Bezug auf K und K_1 konjugiert ist.

Man konstruiere nach 57. die Schnittpunkte von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$. Von diesen Schnittpunkten liegt der eine, etwa A, aufserhalb beider Kegelschnitte. Man konstruiere nun irgend zwei bezüglich beider Kegelschnitte konjugierte Punkte B_1 und C_1, so sind die Doppelstrahlen der durch die Strahlenpaare AB, AC und AB_1, AC_1 bestimmten Involution die gesuchten gemeinschaftlichen Sekanten.

59. Die gemeinschaftlichen Tangenten zweier gezeichnet vorliegenden Kegelschnitte zu konstruieren.

60. Zwei Kegelschnitte K und K_1, die keinen reellen Schnittpunkt haben sollen, sind durch die Punktgruppen $ABCDE$ und

$A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$ bestimmt; man soll ihre gemeinschaftlichen Sekanten nur mit Hilfe von Zirkel und Lineal und eines gezeichnet vorliegenden Kegelschnittes $\mathfrak{K}$ konstruieren.

Man konstruiere wie in 58. das gemeinschaftliche Poldreieck und vermittelst desselben die gemeinschaftlichen Sekanten.

*61. Die sich selbst entsprechenden Punkte zweier collinearen Systeme Σ und Σ_1 zu konstruieren.

Im Punkte A sei ein Strahlenbüschel; ihm entspricht im Punkte A_1 ein projektivisches, welches mit jenem einen Kegelschnitt K erzeugt. Zählt man diesen zu Σ, so entspricht ihm in Σ_1 ein Kegelschnitt K_1, der durch A_1 gehen mufs und daher im Allgemeinen mit K noch drei Schnittpunkte hat. Jeder von ihnen entspricht sich selbst.

*62. Durch die Scheitel P und P_1 zweier projektivischen Strahlenbüschel $P\,(abcd\ \ldots)$ und $P_1\,(a_1 b_1 c_1 d_1\ \ldots)$ lege man einen Kegelschnitt K; diesen schneiden die projektivischen Büschel in den *krumm-projektivischen Punktreihen* $ABCD$ und $A_1 B_1 C_1 D_1 \ldots$.

Die Büschel $A\,(A_1 B_1 C_1 D_1\ \ldots)$ und $A_1\,(ABCD\ \ldots)$ sind projektivisch und in perspektivischer Lage; sie erzeugen daher eine Gerade p. In dem Sechsecke $AB_1 CA_1 BC_1$ liegen die Schnittpunkte

$$(AB_1,\ A_1 B),\ (B_1 C,\ BC_1),\ (CA_1,\ AC_1)$$

in einer Geraden, die mit p zusammenfällt. Daher erzeugen die perspektivischen Büschel $B\,(A_1 B_1 C_1\ \ldots)$ und $B\,(ABC\ \ldots)$ dieselbe Gerade p. Diese hängt somit allein von der Lage der beiden Punktreihen ab. Sie heifst die *Richtungslinie* derselben; wenn sie den Kegelschnitt K in reellen Punkten M und N trifft, so entsprechen diese sich in den krumm-projektivischen Punktreihen selbst und heifsen die *Doppelpunkte* derselben.

Es sei S der Schnittpunkt von AB_1 und BA_1, er liegt auf p. Dann mufs die Verbindungslinie der Schnittpunkte (AA_1, BB_1) und $(AB,\ A_1 B_1)$ durch den Pol P von p in Bezug auf K gehen.

63. *Die Verbindungslinien entsprechender Punkte zweier krumm-projektivischen Punktreihen auf einem Kegelschnitte K hüllen einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ ein, welcher den ersten doppelt berührt.*

Die projektivischen Punktreihen auf K seien

$$ABC\ \ldots \text{ und } A_1 B_1 C_1\ \ldots$$

Man verbinde irgend einen Punkt Q mit $ABC\ \ldots$ und schneide den Kegelschnitt K mit den Verbindungslinien in $A_2 B_2 C_2\ \ldots$, so ist

$$(A_2 B_2 C_2\ \ldots) \barwedge (ABC\ \ldots) \barwedge (A_1 B_1 C_1\ \ldots)$$

Sind M_{12} und N_{12} die Doppelpunkte der krumm-projektivischen Punktreihen $A_1 B_1 C_1 \ldots$ und $A_2 B_2 C_2 \ldots$, so sind $Q M_{12}$ und $Q N_{12}$ die einzigen Geraden durch Q, welche entsprechende Punkte der beiden Punktreihen verbinden. Daher ist der Ort der Verbindungslinien ein Kegelschnitt $\mathfrak{K}$.

Liegt Q auf der Richtungslinie p und treffen die Tangenten durch Q an $\mathfrak{K}$ den Kegelschnitt K in den Punktpaaren EE_1 und FF_1, so mufs der Schnittpunkt $\mathfrak{D}$ von EF_1 und $E_1 F$ auf p liegen und die Geraden EF und $E_1 F_1$ müssen sich im Pole P von p bezüglich K schneiden.

Da aber die Tangenten QE und QF durch p und QP harmonisch getrennt sind, so mufs der Pol von p in Bezug auf $\mathfrak{K}$ auf QP liegen und da dies für jeden Punkt Q von p gilt, mit P zusammenfallen. Somit ist $P\mathfrak{D}$ die Polare von Q bezüglich beider Kegelschnitte K und $\mathfrak{K}$.

Wenn aber ein Paar von Pol und Polare, P und p, in Bezug auf zwei Kegelschnitte K und $\mathfrak{K}$ die Eigenschaft hat, dafs die Polaren eines jeden Punktes von p bezüglich beider Kegelschnitte zusammenfallen, so sagt man, *die Kegelschnitte sind in doppelter Berührung.* Diese ist *reell*, wenn die Gerade p den Kegelschnitt K trifft, sonst *imaginär.*

*64. Sind zwei Kegelschnitte K und $\mathfrak{K}$ in doppelter Berührung, so schneidet eine veränderliche Tangente des einen den anderen in den Punktpaaren zweier krumm-projektivischen Punktreihen.

*65. An die Träger g und g_1 zweier projektivischen Punktreihen $ABCD \ldots$ und $A_1 B_1 C_1 D_1 \ldots$ lege man einen Kegelschnitt K und an ihn von $ABCD \ldots$ und $A_1 B_1 C_1 D_1 \ldots$ die Tangenten $abcd \ldots$ und $a_1 b_1 c_1 d_1 \ldots$, so bilden diese auf K zwei *krumm-projektivische Strahlenbüschel.*

*66. Die Schnittpunkte entsprechender Strahlen zweier krumm-projektivischen Strahlenbüschel auf einem Kegelschnitte K liegen auf einem Kegelschnitte $\mathfrak{K}$, welcher den ersten doppelt berührt.

*67. Zieht man von einem veränderlichen Punkte eines von zwei sich doppelt berührenden Kegelschnitten Tangenten an den anderen, so bilden sie die Strahlenpaare zweier krumm-projektivischen Strahlenbüschel.

*68. In einen Kegelschnitt K ein Dreieck zu zeichnen, dessen Seiten durch drei feste Punkte $U V W$ gehen.

Eine Gerade g durch U schneide K in A und B, die Gerade VB treffe K in C und CW treffe K in A_1, dann durchlaufen

A und A_1 bei der Drehung von g um U zwei krumm-projektivische Punktreihen. Sind M und M' die Doppelpunkte derselben, so schneide man K mit UM in N, mit VN in O, mit WO in M und MNO ist ein Dreieck von der verlangten Beschaffenheit.

*69. In einen Kegelschnitt K ein n-Eck zu zeichnen, dessen Seiten der Reihe nach durch $n$feste Punkte gehen.

*70. Um einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ ein Dreieck zu zeichnen, dessen Ecken der Reihe nach auf drei festen Geraden liegen.

*71. Um einen Kegelschnitt ein n-Eck zu zeichnen, dessen Ecken der Reihe nach auf $n$festen Geraden liegen.

*72. Gegeben sind zwei Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$; man soll um das erste ein Dreieck zeichnen, welches dem zweiten eingeschrieben ist.

Eine beliebige Gerade g durch A schneide B_1C_1 in A', BA' schneide A_1C_1 in B', $B'C$ schneide A_1B_1 in C' und endlich schneide $C'A$ die Seite B_1C_1 in A_1', dann durchlaufen bei der Drehung von g um A die Punkte A' und A_1' zwei projektivische Punktreihen auf B_1C_1. Ist M ein reeller Doppelpunkt derselben und schneidet man A_1C_1 mit BM in N, A_1B_1 mit CN in O, so mufs MO durch A gehen.

*73. Gegeben sind zwei n-Ecke; man soll ein n-Eck zeichnen, welches dem ersten um- und dem zweiten eingeschrieben ist.

*74. An einer Bande eines rechteckigen Billards steht ein Ball; man soll ihn so stofsen, dafs er an allen übrigen Banden abprallt und in seine Anfangsstellung zurückkehrt.

*75. Ein n-Eck zu zeichnen, dafs einem anderen n-Ecke gleichzeitig ein- und umgeschrieben ist.

Das gegebene n-Eck sei $A_1A_2A_3 \ldots A_{n-1}A_n$. Man projiciere die Punkte von A_2A_3 aus A_1 auf A_3A_4, diese aus A_2 auf A_4A_5, diese aus A_3 auf A_5A_6, ..., diejenigen von $A_{n-1}A_n$ aus A_{n-2} auf A_nA_1, letztere aus A_{n-1} auf A_1A_2 und diese endlich aus A_n auf A_2A_3, so erhält man auf A_2A_3 zwei projektivische Punktreihen, deren Doppelpunkte die Aufgabe lösen.

76. Die vorige Aufgabe läfst beim Vierecke keine Lösung zu.)

Es sei $ABCD$ das gegebene Viereck. Man projiziere die Punkte von BC aus A auf CD, die Projectionen aus B auf AD, deren Projectionen aus C auf AB und diese endlich aus D auf BC; man erhält dann auf BC zwei projektivische Punktreihen. Schneiden sich AD und BC in E, so entsprechen

den Punkten BCE die Punkte EBC.

*) Pfaff. Neuere Geometrie. II. Teil. Seite 48 und 50.

Durchläuft also ein Punkt der ersten Reihe in der durch BCE bestimmten Richtung die Gerade BC, so bewegt sich der entsprechende Punkt in der Richtung EBC. Der zweite Punkt kann also nie den ersten treffen.

*77. Die Aufgabe 75. läfst beim Fünfecke unendlich viele Lösungen zu.

Um dieses zu beweisen, projiziere man stets zwei solche Seiten aufeinander, die durch eine andere Seite getrennt sind, also aus den Ecken A, C, E, B, D die Seite BC auf DE, DE auf AB, AB auf CD, CD auf AE, AE auf BC, so erhält man auf BC zwei projektivische Punktreihen. In diesen entsprechen sich B, C und der Schnittpunkt F von BC und DE selbst, also sind die Punktreihen identisch und jeder Punkt entspricht sich selbst. Es löst also jeder Punkt von BC die Aufgabe.

*78. Einem Vierecke ein Rechteck einzuschreiben, dessen eine Seite durch einen gegebenen Punkt geht.

*79. Man soll durch einen Punkt P zwei solche Gerade ziehen, dafs sie auf zwei gegebenen Geraden g und g_1 die Strecken s und s_1 abschneiden.

*80. Auf einer festen Geraden eine solche Strecke zu bestimmen, dafs sie aus zwei festen Punkten unter bestimmten Winkeln gesehen wird.

*81. Durch einen Punkt eine solche Gerade zu legen, dafs sie ein gegebenes Dreieck nach einem bestimmten Verhältnisse teilt.

*82. In zwei projektivischen Strahlenbüscheln die Schenkel der entsprechenden rechten Winkel zu konstruieren.

83. *Salmon'sche Erzeugungsart des Kegelschnittes.*

Wenn man in den Scheiteln A und A_1 der Hauptaxe eines Kegelschnittes K die Tangenten a und a_1 zieht, diese mit einer dritten Tangente b in B und B_1 schneidet, ferner B mit den Brennpunkten F und F_1 durch die Geraden x und x_1 und ebenso B_1 mit denselben durch y und y_1 verbindet, so ist

$$1.\ \sphericalangle(ax) = \sphericalangle(bx_1),\quad 2.\ \sphericalangle(xy) = (x_1y_1) = 90^0,$$

also stehen die Doppelstrahlen mn der Involution ab, xx_1 auf einander senkrecht.

Man polarisiere die Figur in Bezug auf einen beliebigen Kreis mit dem Mittelpunkte $\mathfrak{D}$ und bezeichne die polaren Stücke mit deutschen Buchstaben.

Die Polarfigur von K ist ein Kegelschnitt $\mathfrak{K}$; $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}\mathfrak{X}\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}\mathfrak{Y}_1\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ seien die Pole von $aa_1bxx_1yy_1mn$, dann bestimmen $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, $\mathfrak{X}\mathfrak{X}_1$

auch eine Involution, deren Doppelpunkte $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ sind. — Da m und n auf einander senkrecht stehen, so müssen dies auch $\mathfrak{D}\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{D}\mathfrak{N}$ thun; daher halbieren diese Geraden die Winkel $\mathfrak{A}\mathfrak{D}\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{X}\mathfrak{D}\mathfrak{X}_1$ und es ist

$$\mathfrak{A}\mathfrak{D} : \mathfrak{B}\mathfrak{D} = \mathfrak{A}\mathfrak{M} : \mathfrak{B}\mathfrak{M} = \mathfrak{A}\mathfrak{N} : \mathfrak{B}\mathfrak{N}.$$

Aus den Eigenschaften der Involution folgt:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{M}^2 : \mathfrak{B}\mathfrak{M}^2 = \mathfrak{A}\mathfrak{X} \,.\, \mathfrak{A}\mathfrak{X}_1 : \mathfrak{B}\mathfrak{X} \,.\, \mathfrak{B}\mathfrak{X}_1$$

also auch $$\mathfrak{A}\mathfrak{D}^2 : \mathfrak{B}\mathfrak{D}^2 = \mathfrak{A}\mathfrak{X} \,.\, \mathfrak{A}\mathfrak{X}_1 : \mathfrak{B}\mathfrak{X} \,.\, \mathfrak{B}\mathfrak{X}_1.$$

Sind $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}_1$ die Polaren von F und F_1, ferner $\mathfrak{A}\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{B}\mathfrak{Q}$ senkrecht auf $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{A}\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{B}\mathfrak{Q}_1$ senkrecht auf $\mathfrak{f}_1$, so ist auch

$$\mathfrak{A}\mathfrak{D}^2 : \mathfrak{B}\mathfrak{D}^2 = \mathfrak{A}\mathfrak{P} \,.\, \mathfrak{A}\mathfrak{P}_1 : \mathfrak{B}\mathfrak{Q} \,.\, \mathfrak{B}\mathfrak{Q}_1 \text{ oder}$$

$$\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{D}^2}{\mathfrak{A}\mathfrak{P} \,.\, \mathfrak{A}\mathfrak{P}_1} = \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{D}^2}{\mathfrak{B}\mathfrak{Q} \,.\, \mathfrak{B}\mathfrak{Q}_1}$$

Bewegt sich nun die Tangente b auf K, so durchläuft ihr Pol den Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ so, dafs der Quotient $\mathfrak{B}\mathfrak{D}^2 : \mathfrak{B}\mathfrak{Q} \,.\, \mathfrak{B}\mathfrak{Q}_1$ konstant bleibt. Daraus folgt:

Der Ort eines Punktes, für welchen das Quadrat seines Abstandes von einem festen Punkte zum Produkte seiner Entfernungen von zwei festen Geraden in einem konstanten Verhältnisse steht, ist ein Kegelschnitt.

Da die senkrechten Strahlen xy in F sowie $x_1 y_1$ in F_1 konjugierte Strahlen in Bezug auf K sind, so müssen die senkrechten Geraden $\mathfrak{D}\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{D}\mathfrak{Y}$, sowie $\mathfrak{D}\mathfrak{X}_1$ und $\mathfrak{D}\mathfrak{Y}_1$ die Geraden $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}_1$ in konjugierten Punktpaaren bezüglich des Kegelschnittes $\mathfrak{K}$ schneiden.

Es gilt nun auch die Umkehrung:

Sind $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}_1$ zwei solche Gerade, deren Polarinvolutionen (konjugierter Punkte) bezüglich eines Kegelschnittes $\mathfrak{K}$ von einem Punkte O durch eine circulare Involution projiziert werden, so steht das Quadrat des Abstandes eines Kegelschnittpunktes von O zum Produkte seiner Abstände von $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}_1$ in einem konstanten Verhältnisse.

84. Gegeben ein Punkt O und zwei Gerade $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}_1$; man soll einen Punkt P konstruieren, so dafs das Quadrat seines Abstandes von O zum Produkte seiner Entfernungen von $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}_1$ in einem bestimmten Verhältnisse μ steht.

Sind PQ und PQ_1 die Abstände des Punktes P von $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}_1$, also $PO^2 : PQ \,.\, PQ_1 = \mu$, so zerlege man μ in $\mu_1 \,.\, \mu_2$ und konstruiere P als Durchschnitt der Örter, für welche $PO : PQ = \mu_1$ und $PO : PQ_1 = \mu_2$ ist. Diese Örter sind zwei Kegelschnitte mit dem gemeinschaftlichen Brennpunkte P und den Leitlinien $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}_1$.

85. Verbindet man die Punktpaare AA_1, BB_1, CC_1, ... einer Punktinvolution auf der Geraden g mit zwei festen Punkten P und P' durch die Strahlenpaare

$$aa_1,\ bb_1,\ cc_1,\ \ldots \text{ und } a'a'_1,\ b'b_1',\ c'c_1',\ \ldots$$

so liegen die Schnittpunkte

$$\mathfrak{A} \text{ und } \mathfrak{A}_1,\ \mathfrak{B} \text{ und } \mathfrak{B}_1,\ \mathfrak{C} \text{ und } \mathfrak{C}_1,\ \ldots \text{ von}$$

$$aa_1' \text{ und } a'a_1,\ bb_1' \text{ und } b'b_1,\ cc_1' \text{ und } c'c_1,\ \ldots$$

auf einem Kegelschnitte $\mathfrak{K}$.

Ist Q_0 der Schnittpunkt von $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ und P_0 derjenige von g mit PP', so sind PP' durch Q_0P_0 harmonisch getrennt und die Geraden $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$, ... müssen durch Q_0 gehen.

Aus den Eigenschaften der vollständigen Vierseite

$$AA_1\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1PP' \text{ und } BB_1\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1PP'$$

folgt, dafs die Punktpaare $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$, PP' durch Q_0 und g harmonisch getrennt sind. Es liegen also $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1PP'$ auf einem Kegelschnitte $\mathfrak{K}$, in Bezug auf welchen Q_0 und g Pol und Polare sind. Daher liegen $\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$, ... auch auf diesem Kegelschnitte.

86. Gegeben sind zwei Strahleninvolutionen mit den Scheiteln S und S_1; man soll eine solche Gerade suchen, welche von beiden in derselben Punktinvolution geschnitten wird.

I. In einer harmonischen Verwandtschaft, in welcher SS_1 die Mittellinie ist, sind den Involutionen zwei andere verwandt, deren Scheitel $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}_1$ im Unendlichen liegen. Es seien $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{s}_1$ diejenigen Strahlen, welche dem gemeinsamen Strahle $\mathfrak{S}\mathfrak{S}_1 = g_\infty$ involutorisch zugeordnet sind. Von jedem der beiden Büschel wird jede Gerade in einer Involution geschnitten, deren Centralpunkt auf $\mathfrak{s}$ resp. $\mathfrak{s}_1$ liegt. Durch den Schnittpunkt $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{s}_1$ seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$ diejenigen Geraden, welche auf $\mathfrak{s}$ bezüglich $\mathfrak{s}_1$ senkrecht stehen. Die Involutionen auf ihnen mögen die Potenzen $P_\mathfrak{a}$ und $P_{\mathfrak{a}_1}$ haben; bilden $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{s}_1$ den Winkel σ und bestimmt man einen Winkel aus der Gleichung

$$\frac{\sin x}{\sin(\sigma - x)} = \sqrt{\frac{P_\mathfrak{a}}{P_{\mathfrak{a}_1}}}$$

so ist die Gerade durch $\mathfrak{A}$, welche gegen $\mathfrak{s}$ unter dem Winkel x geneigt ist, eine solche, dafs die Involutionen, in denen sie von den Strahleninvolutionen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}_1$ geschnitten wird, zusammenfallen. Die harmonisch verwandte Gerade ist die gesuchte.

II. Dem gemeinsamen Strahle $s_0 = SS_1$ entsprechen s' und s_1' in den Involutionen; man suche in beiden diejenigen Strahlenpaare aa' und a_1a_1', so dafs

$$s_0s'aa' \text{ und } s_0s_1'a_1a_1'$$

harmonisch sind, dann sind die Geraden, welche die Schnittpunkte

$$(s's_1'),\ (aa_1),\ (a'a_1') \text{ oder } (s's_1'),\ (aa_1'),\ (a_1a')$$

verbinden, die gesuchten.

87. Auf einem Kegelschnitte K seien AA_1 zwei feste Punkte, aufserdem sei P ein beliebiger dritter fester Punkt, der nicht auf K liegt. Um P drehe sich eine veränderliche Gerade p, welche K in QQ_1 schneidet, dann durchlaufen die Schnittpunkte $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_1$ von AQ und A_1Q_1, AQ_1 und A_1Q einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$.

I. Wenn p die Gerade AA_1 in Q_0 schneidet, so ist $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_1$ die Polare von Q_0 in Bezug auf K, also schneiden sich bei der Drehung von p um P die Geraden $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_1$ im Pole $\mathfrak{P}$ von AA_1 für K.

Es sei p' eine andere Lage von p und sind $Q'Q_1'$ ihre Schnittpunkte mit K, $\mathfrak{Q}'\mathfrak{Q}_1'$ die Schnittpunkte von AQ' und A_1Q_1', A_1Q' und AQ_1'. In dem Sechsecke

$$A\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_1A_1\mathfrak{Q}_1'\mathfrak{Q}'$$

seien $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{P}$ die Schnittpunkte von $A\mathfrak{Q}$ und $A_1\mathfrak{Q}_1'$, $A_1\mathfrak{Q}_1$ und $A\mathfrak{Q}'$, $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}'\mathfrak{Q}_1'$.

Da man $A\mathfrak{Q}$ mit AQ, $A_1\mathfrak{Q}_1'$ mit A_1Q', $A_1\mathfrak{Q}_1$ mit A_1Q, $A\mathfrak{Q}'$ mit AQ' verwechseln kann, AQ und A_1Q' sowie A_1Q und AQ' sich auf der Polare des Schnittpunktes von AA_1 und QQ' schneiden, auf dieser Polare aber auch der Pol $\mathfrak{P}$ von AA_1 liegt, so ist $A\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_1A_1\mathfrak{Q}_1'\mathfrak{Q}'$ ein Pascalsches Sechseck. Seine sechs Ecken liegen auf einem Kegelschnitte $\mathfrak{K}$.

Es mag $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_1$ die Gerade AA_1 in $\mathfrak{Q}_o$ schneiden, dann ist QQ_1 die Polare von $\mathfrak{Q}_o$ in Bezug auf $\mathfrak{K}$ und deshalb P der Pol von AA_1 für $\mathfrak{K}$.

Wenn p' in die Lage p'' gelangt, $\mathfrak{Q}'\mathfrak{Q}_1'$ in die Lage $\mathfrak{Q}''\mathfrak{Q}_1''$ kommen, so liegen auch die sechs Punkte

$$A\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_1A_1\mathfrak{Q}''\mathfrak{Q}_1''$$

auf einem Kegelschnitte, in Bezug auf welchen auch P und AA_1 Pol und Polare sind; deshalb fällt dieser Kegelschnitt mit $\mathfrak{K}$ zusammen und alle Punkte $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_1$ liegen auf demselben.

87a. Mit Hilfe der Aufgabe 86. hat man folgenden Beweis

für 87, falls P innerhalb des Kegelschnittes liegt, die Involutionen also keine Doppelstrahlen haben.

Man schneide die beiden Involutionen in A und A_1 durch diejenige Gerade g, welche von beiden in derselben Punktinvolution geschnitten wird, suche diejenigen beiden Punkte O und O', welchen alle Segmente zwischen den Punktpaaren der Involution auf g unter rechten Winkeln erscheinen, so sind in einer harmonischen Verwandtschaft mit den Centrum O und der Mittellinie g den Involutionen (A) und (A_1) zwei cirkulare Involutionen verwandt und der Kurve der Schnittpunkte $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_1$ ist ein Kreis verwandt, also ist diese Kurve ein Kegelschnitt.

87b. Wenn die Involutionen Doppelstrahlen haben, so ergiebt sich der Beweis auf folgende einfache Art.

Da in diesem Falle P aufserhalb des Kegelschnittes K liegt, so lassen sich von P zwei Tangenten PM und PN an K ziehen und $A(MNQQ_1)$ sowie $A_1(MNQQ_1)$ und deshalb auch $A(MN\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_1)$ sowie $A_1(MN\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_1)$ sind je vier harmonische Strahlen, also liegen $AA_1MN\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_1$ auf einem Kegelschnitte $\mathfrak{K}$, für welchen, wie sich unmittelbar aus der Konstruktion ergiebt, P und AA_1 Pol und Polare sind. Ändern sich $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_1$ in $\mathfrak{Q}'\mathfrak{Q}_1'$, so liegen auch $AA_1MN\mathfrak{Q}'\mathfrak{Q}_1'$ auf einem Kegelschnitt $\mathfrak{K}'$, für welchen P und AA_1 Pol und Polare sind, der also mit $\mathfrak{K}$ zusammenfällt.

*87c. Mit Zuhilfenahme projektivischer Beziehungen ergiebt sich folgender Beweis:

Aus der involutorischen Eigenschaft folgt

$$A(Q\ldots Q_1\ldots) \barwedge A(Q_1\ldots Q\ldots) \barwedge A_1(Q_1\ldots Q\ldots),$$

also liegen $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_1\ldots$ mit AA_1 auf einem Kegelschnitte.

88. Alle durch P und $\mathfrak{P}$ gezogenen Sehnen eines der beiden Kegelschnitte K und $\mathfrak{K}$ werden durch den anderen harmonisch geteilt.

89. Ist $M(aa_1bb_1cc_1\ldots)$ eine Involution und fällt man aus einem Punkte P auf a die Senkrechte $\mathfrak{a}$ und bringt sie in A mit a_1 zum Durchschnitte, so durchläuft A einen Kegelschnitt, wenn a das involutorische Büschel durchläuft.

Die Fufspunkte der Senkrechten aus P auf a und a_1, b und $b_1,\ldots$ seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_1,\ldots$ und liegen auf einem Kreise mit dem Durchmesser MP; diese Senkrechten selbst bilden eine Involution und daher treffen sich die Geraden $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1,\ldots$ in einem Punkte $\mathfrak{P}$ und folglich ist nach 87. der Ort des Punktes A ein Kegelschnitt.

90. *Das Normalenproblem.*

Ist $M(aa_1bb_1cc_1\ldots)$ die Involution konjugierter Durchmesser eines Kegelschnittes K, fällt man aus einem beliebigen Punkte P die Senkrechten auf $abc\ldots$ und bringt sie mit $a_1b_1c_1\ldots$ in $ABC\ldots$ zum Durchschnitte, so liegen diese Punkte auf einer gleichseitigen Hyberbel $\mathfrak{K}$, welche K in solchen Punkten schneidet, daſs ihre Verbindungslinien mit P die Normalen von P sind.

Sei Q einer der Schnittpunkte von K nnd $\mathfrak{K}$, q_1 der durch ihn gehende und q der konjugierte Durchmesser, so muſs der letztere parallel zu der Tangente t durch Q sein, und da PQ auf q senkrecht steht, so muſs es auch auf t senkrecht stehen und somit ist PQ eine Normale von K. Da K und $\mathfrak{K}$ im Allgemeinen vier Schnittpunkte haben, so lassen sich durch einen Punkt im Allgemeinen vier Normalen an einen Kegelschnitt legen.

Die Senkrechte auf eine der Axen trifft die andere im Unendlichen; somit hat $\mathfrak{K}$ zwei im Unendlichen in senkrechten Richtungen liegende Punkte und ist eine gleichseitige Hyperbel, deren Asymptoten mit den Axen von K parallel sind. Also folgt:

Von einem Punkte P lassen sich an einen Kegelschnitt im Allgemeinen vier Normalen ziehen, deren Fuſspunkte auf einer gleichseitigen Hyperbel $\mathfrak{K}$ liegen, welche die Axen von K zu Asymptotenrichtungen hat.

Diese gleichseitige Hyperbel geht durch P und den Mittelpunkt M des Kegelschnittes. Fällt man die Senkrechte aus P auf den zu PM konjugierten Durchmesser, welcher der Polare p von P parallel ist, so ist sie, wie sich aus der Entstehung der gleichseitigen Hyperbel ergiebt, die Tangente derselben in P und ebenso findet man als Tangente in M den konjugierten Durchmesser zu dem auf MP in M senkrechten Durchmesser.

91. Die gleichseitige Hyperbel $\mathfrak{K}$ geht durch den Mittelpunkt M von K und durch seine unendlich fernen Axenpunkte A_∞ und B_∞, also durch ein Poldreieck von K. Sind RS zwei Punkte von $\mathfrak{K}$ und konjugiert in Bezug auf K, ist T der Pol von RS, so sind RST die Ecken eines Poldreiecks und liegen mit $MA_\infty B_\infty$ auf einem Kegelschnitte, also auf $\mathfrak{K}$ (193). Es giebt daher unendlich viele Poldreiecke von K, welche der gleichseitigen Hyperbel $\mathfrak{K}$ eingeschrieben sind.

Die sechs Seiten der beiden Poldreiecke $MA_\infty B_\infty$ und RST berühren einen Kegelschnitt $\mathfrak{P}$, der natürlich eine Parabel ist, weil er die unendlich ferne Gerade $A_\infty B_\infty$ zur Tangente hat. (196.)

Da aber die Polaren der Punkte von $\mathfrak{K}$ in Bezug auf K einen Kegelschnitt umhüllen, dieser aber mit $\mathfrak{P}$ sechs gemeinschaftliche Tangenten hat, so mufs er mit der Parabel $\mathfrak{P}$ zusammenfallen:

Die gleichseitige Hyperbel $\mathfrak{K}$ und die Parabel $\mathfrak{P}$ sind Polarfiguren in Bezug auf den Kegelschnitt K.

Ist Q einer der Schnittpunkte von K und $\mathfrak{K}$, so mufs die Tangente t in ihm die Parabel $\mathfrak{P}$ berühren und da PQ auf t senkrecht steht, so hat man eine zweite Lösung des Normalenproblems mittelst der Parabel $\mathfrak{P}$. Die Berührungspunkte der gemeinschaftlichen Tangenten des Kegelschnittes K und der Parabel $\mathfrak{P}$ sind die Fufspunkte der Normalen aus P.

92. Die Polarinvolution konjugierter Strahlen in P bezüglich K hat zwei zu einander normale Strahlen n und n_1, welche die Polare von P in N und N_1 schneiden mögen, so dafs also N_1 der Pol von n und N derjenige von n_1 ist. Zieht man durch M die zu n und n_1 parallelen Durchmesser d und d_1, konstruiert die zu ihnen konjugierten Durchmesser d' und d_1', so sind die Schnittpunkte (nd_1') und $(n_1 d')$ Punkte der gleichseitigen Hyperbel. Die Polare des ersteren mufs durch N_1 und den Pol von d_1' gehen, der auf d_1 im Unendlichen liegt, also der Schnittpunkt von n_1 und d_1 ist. Deshalb ist n_1 die Polare des Punktes (nd_1') und n diejenige des Punktes $(n_1 d')$, d. h. die Punkte (nd_1') und $(n_1 d')$ fallen mit den Punkten N und N_1, in denen die zu einander normalen konjugierten Strahlen des Punktes P die Polare von P treffen, zusammen:

Die gleichseitige Hyperbel $\mathfrak{K}$ schneidet die Polare des Punktes P in ihren Schnittpunkten mit den konjugierten Normalstrahlen des Punktes P.

Das Poldreieck NN_1P bezüglich des Kegelschnittes K ist der gleichseitigen Hyperbel $\mathfrak{K}$ eingeschrieben, also der Parabel $\mathfrak{P}$ umgeschrieben:

Die Parabel $\mathfrak{P}$ berührt die konjugierten Normalstrahlen des Punktes P.

Man kennt also von der Parabel $\mathfrak{P}$ zwei Paar senkrechter Tangenten, nämlich die Axen von K im Punkte M und die konjugierten Normalstrahlen in P. Daher ist MP die Leitlinie der Parabel. (214.)

Im Punkte P ist die Senkrechte auf die Polare p dieses Punktes die Tangente der gleichseitigen Hyperbel, ihr Pol P' also der Berührungspunkt von p mit der Parabel. Ist F der Brennpunkt der Parabel und fällt man $P'Q'$ senkrecht auf die Leitlinie

MP, so ist $P'Q' = P'F$. Die Tangente p ist aber die Mittelsenkrechte von $Q'F$ (210b.), also kann man den Brennpunkt F finden:

Die Parabel $\mathfrak{P}$ *hat die Gerade* PM *zur Leitlinie; fällt man aus dem Berührungspunkte* P' *der Parabel mit der Polare* p *die Senkrechte* $P'Q'$ *auf die Leitlinie, so ist der Spiegelpunkt von* Q' *in Bezug auf* p *der Brennpunkt.*

93. Wie ändert sich die Konstruktion, wenn der Kegelschnitt K selbst Parabel wird?

94. Von einem Punkte P an einen gezeichnet vorliegenden Kegelschnitt die Normalen mit Cirkel und Lineal zu konstruieren.

95. *Das zweite Kepplersche Gesetz.*

a. Ein Punkt bewege sich auf einem Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ in Folge der Wirkung einer beschleunigenden Kraft φ, deren Richtung beständig durch den einen Brennpunkt B geht. Wie ändert sich dieselbe für die verschiedenen Entfernungen des bewegten Punktes vom Brennpunkte?

Zu einer bestimmten Zeit befinde sich der Punkt in C (Figur 125. auf Seite 207); in C konstruiere man den Krümmungskreis, dessen Mittelpunkt K und dessen Radius $CK = r$ sei. In dem betrachteten Moment τ fällt die Bahn des bewegten Punktes für eine sehr kleine Strecke σ mit einem Bogen des Krümmungskreises zusammen. Hat der Punkt in C die Geschwindigkeit v und bezeichnet man den Winkel BCK mit ω, so ist die Normalkomponente der Beschleunigung $\varphi \,.\, \cos\omega = \frac{v^2}{r}$. Der Radius Vektor BC beschreibt, wie bei jeder Centralbewegung in gleichen Zeiten gleiche Flächen; nennt man den Inhalt der von ihm in der Zeiteinheit durchlaufenen Fläche $\frac{1}{2}\gamma$, so legt er in der Zeit τ die Fläche $\frac{1}{2}\gamma \,.\, \tau$ zurück. Diese ist aber ein Dreieck, dessen Grundlinie der Kreisbogen σ und dessen Spitze B ist. Von letzterer fälle man p senkrecht auf die Verlängerung von σ, also auf die Tangente in C, so ist

$$\gamma \,.\, \tau = p \,.\, \sigma.$$

Die Geschwindigkeit in C ist $v = \frac{\sigma}{\tau} = \frac{\gamma}{p}$, also erhält man für die Normalkomponente der Beschleunigung

$$\varphi \,.\, \cos\omega = \frac{v^2}{r} = \frac{\gamma^2}{p^2 \,.\, r}.$$

Nach 343. ist, wenn man $BC = \varrho$ setzt,

$$p = \varrho \,.\, \cos\omega,\ \cos\omega = \frac{b}{b_1},\ r = \frac{{b_1}^3}{a \,.\, b},$$

daher
$$\varphi = \frac{\gamma^2}{p^2 \,.\, r \,.\, \cos\omega} = \frac{\gamma^2}{\varrho^2 \,.\, r \,.\, \cos^3\omega} = \frac{\gamma^2 \,.\, a^2}{b} \,.\, \frac{1}{\varrho^2}.$$

Demnach ist die beschleunigende Kraft in jedem Augenblicke dem reciproken Quadrate der Entfernung proportional.

b. Ein Punkt bewegt sich auf einer Geraden $g = O_1 N_1$ mit der konstanten Geschwindigkeit v. In einem bestimmten Moment befindet er sich (Fig. 125) in C und wird von einer beschleunigenden Kraft φ, deren Richtung stets durch einen festen Punkt B geht und welche dem reciproken Quadrate der Entfernung proportional ist, angezogen. Welches ist seine Bahn?

Die Normale in C bilde mit der Richtung g den Winkel ω; dann ist die Normalcomponente von φ gleich $\varphi \,.\, \cos \omega$. Man bestimme eine Strecke r aus der Gleichung $\frac{v^2}{r} = \varphi \,.\, \cos \omega$ und schneide diese gleich CK auf der Normale ab, so kann man einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ konstruieren, welcher g in C berührt, B zum Brennpunkte und K zum Mittelpunkte des Krümmungskreises hat.

Um die Axe dieses Kegelschnittes zu konstruieren, fälle man (Siehe 343. die Newtonsche Konstruktion) $KE \perp CB$ und $EO \perp CK$, so ist O ein Punkt der Hauptaxe. Den zweiten Brennpunkt B_1 erhält man aus der Bedingung, dafs die Normale den Winkel BCB_1, welchen die beiden Brennpunktsstrahlen bilden, halbiert. Dadurch aber ist der Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ bestimmt. Wenn sich nun auf diesem ein Punkt bewegt in Folge der Wirkung einer Kraft φ_1, deren Richtung stets durch B geht, so ist die Beschleunigung dieses Punktes dem reciproken Quadrate der Entfernung $BC = \varrho$ proportional. Hat dieser Punkt in C dieselbe Gröfse und Richtung der Geschwindigkeit v, so ist die normale Beschleunigungskomponente $\varphi_1 \,.\, \cos \omega = \frac{v^2}{r}$, also auch $\varphi_1 = \varphi$. Mithin mufs die Bewegung auf dem Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ identisch mit derjenigen sein, welche die Kraft φ hervorruft.

Es erübrigt noch zu bestimmen, unter welchen Bedingungen der Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ Ellipse, Parabel oder Hyperbel wird. Da bei einer Ellipse beide Brennpunkte auf derselben Seite einer Tangente, bei einer Hyperbel auf entgegengesetzten Seiten liegen, so ist $\mathfrak{K}$ Ellipse, wenn B_1 auf derselben Seite von g liegt wie B, Parabel, wenn B_1 ins Unendliche fällt und endlich Hyperbel, wenn B_1 und B auf entgegengesetzten Seiten von g liegen. Um diese Bedingungen durch die Konstanten der Bewegung auszudrücken, denke man sich in Fig. 125. durch B die Parallele zu CB_1 gelegt, welche die Normale CK in J schneiden mag, so ist für die

Ellipse: $CO < CJ$

Parabel: $CO = CJ$

Hyperbel: $CO > CJ$.

Da $\sphericalangle BJC = JCB_1 = JCB$, so ist $\triangle BCJ$ gleichschenklig und $CJ = 2\varrho \,.\, \cos\omega$.

Aus 343. folgt:

$$CO = n = r \,.\, \cos^2\omega = \frac{v^2 \,.\, \cos^2\omega}{\varphi \,.\, \cos\omega} = \frac{v^2 \,.\, \cos\omega}{\varphi}.$$

Bezeichnet man mit μ einen konstanten Faktor, so ist

$$\varphi = \mu \,.\, \frac{1}{\varrho^2};$$

daher
$$CO = n = \frac{v^2 \,.\, \varrho^2 \,.\, \cos\omega}{\mu}$$

und
$$CO - CJ = \frac{v^2 \,.\, \varrho^2 \,.\, \cos\omega}{\mu} - 2\varrho \,.\, \cos\omega$$

$$= \frac{\varrho^2 \,.\, \cos\omega}{\mu}\left(v^2 - \frac{2\mu}{\varrho}\right).$$

Da $\frac{\varrho^2 \,.\, \cos\omega}{\mu}$ positiv ist und der Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ Ellipse, Parabel oder Hyperbel ist, jenachdem $CO - CJ$ negativ, Null oder positiv, so hat man als Endbedingung: Der Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ ist Ellipse, Parabel, Hyperbel, jenachdem $v^2 \lessgtr \frac{2\mu}{\varrho}$ ist.

96. *Das Kreisnetz.*

Sind $O_1 O_2 O_3$ drei Kreise, die nicht demselben Büschel angehören, so liegt ihr Potenzcentrum P entweder aufserhalb oder innerhalb aller drei Kreise. Im ersten Falle haben die Kreise einen reellen, im anderen einen imaginären Orthogonalkreis; es seien P_r und P_i diese Kreise; den letzteren kann man durch denjenigen Kreis P_d ersetzen, der die Kreise $O_1 O_2 O_3$ unter dem Durchmesser schneidet.

Es giebt unendlich viele Kreise, welche den Kreis P_r rechtwinklig schneiden; ihre Gesamtheit heifst *Kreisnetz* oder Kreisbündel. Alle Kreise desselben, deren Mittelpunkte auf einer Geraden g liegen, bilden ein Kreisbüschel, denn sie schneiden den Kreis P_r und die Gerade g rechtwinklig (33.). Im Netze giebt es also unendlich viele Kreisbüschel; je zwei müssen einen Kreis gemeinschaftlich haben, dessen Mittelpunkt der Schnittpunkt der Centralen der beiden Büschel ist.

Haben die Kreise keinen reellen Orthogonalkreis, so werden sie von einem Kreise P_d unter dem Durchmesser geschnitten. Es

giebt unendlich viele Kreise, welche P_d unter dem Durchmesser schneiden. Sind $O_m O_n$ irgend zwei solche Kreise, so mufs ihre gemeinschaftliche Sehne durch P_d gehen. Ist P_d' ein zweiter Punkt derselben, so läfst sich auch um ihn ein Kreis P_d' ziehen, der von O_m und O_n unter dem Durchmesser geschnitten wird; alle Kreise des Büschels $(O_m O_n)$ schneiden aber P_d und P_d' unter dem Durchmesser (47a.). In der Gesamtheit der Kreise, welche P_d unter dem Durchmesser schneiden, kommen unendlich viele Büschel vor; je zwei derselben haben einen Kreis gemeinschaftlich, dessen Mittelpunkt wieder der Schnittpunkt der Centralen der Büschel ist. Somit hat die Gesamtheit aller Kreise, welche einen Kreis unter dem Durchmesser schneiden, analoge Eigenschaften, wie die Gesamtheit der Kreise, welche zu einem anderen orthogonal sind; auch sie bilden ein Netz.

Hat man umgekehrt eine Gesamtheit von unendlich vielen Kreisen (Σ) in der Lage, dafs je zwei derselben ein Büschel bestimmen, dessen Kreise jener Gesamtheit angehören, so läfst sich zeigen, dafs alle Kreise der letzteren einen Kreis entweder rechtwinklig oder unter dem Durchmesser schneiden.

Sind $O_1 O_2 O_3$ drei beliebige jener Kreise und ist P_r ihr reeller Orthogonalkreis, so gehören alle Kreise des durch P_r bestimmten Kreisnetzes (N) zu jener Gesamtheit (Σ); es fragt sich nur, ob in der letzteren nicht Kreise enthalten sind, die im Netze (N) nicht vorkommen. Ist O_x ein beliebiger Kreis von (Σ), so gehört er unendlich vielen Büscheln an; irgend eines derselben hat mit jedem der Büschel $(O_1 O_2)$, $(O_2 O_3)$, $(O_3 O_1)$ einen Kreis gemein; es seien dies die Kreise O_{12}, O_{23}, O_{31}. Da der Kreis P_r diese drei Kreise senkrecht trifft, so mufs er auch O_x orthogonal schneiden und O_x gehört somit dem Netze an.

Schneiden irgend drei Kreise von (Σ) einen Kreis P_d unter dem Durchmesser, so thun dies alle und bilden somit ein Netz. Also:

Die Gesamtheit aller Kreise von der Lage, dafs je zwei derselben ein Büschel bestimmen, dessen Kreise jener Gesamtheit angehören, und dafs irgend zwei solche Büschel einen Kreis gemeinschaftlich haben, bildet ein Kreisnetz.

Berichtigungen.

Seite 5, Zeile 22 und 23 von oben: E statt M, F statt N.
„ 27, „ 1 von oben: P statt M.
„ 46, „ 16 „ „ α' statt α'.
„ 26, „ 19 „ „ Polarsystems statt Polarsystem.
„ 190, „ 7 „ unten: X statt Y.
„ 190, „ 3 „ „ Zieht man nämlich in B und B_1 die Senkrechten zu BD und B_1D_1, so sind dieselben (248) die Polaren von D und D_1 in Bezug auf den Kegelschnitt und den Kreis, letzteres, weil EE_1BD harmonisch sind. Die Geraden, welche den Schnittpunkt jener Polaren mit F und F_1 verbinden, sind also gleichzeitig Tangenten an Kreis und Kegelschnitt (249 b.).

Klempt, Diedr. Aug., Realschullehrer in Rostock, Lehrbuch zur Einführung in die moderne Algebra. Mit einigen Hundert Beispielen. [XII u. 260 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 4.—

Königsberger, Leo, zur Geschichte der Theorie der elliptischen Transcendenten in den Jahren 1826—1829. [104 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 3.—

Lagrange's mathematische Elementarvorlesungen. Deutsche Separatausgabe von Dr. H. Niedermüller, Oberlehrer am Nicolaigymnasium zu Leipzig. [IV u. 116 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 2.40.

Milinowski, A., Oberlehrer am Gymnasium zu Weifsenburg i. E., die Geometrie für Gymnasien und Realschulen. I. Theil: Planimetrie. Mit Holzschnitten im Text und 4 Figurentafeln. [VII u. 123 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 2.—

——— ——— II. Teil: Stereometrie. I. Heft: Lehrbuch. Mit Holzschnitten. [VI u. 46 S.] gr. 8. geh. n. *M.* —.80. II. Heft: Übungsbuch. Mit 4 Figurentafeln. [IV u. 58 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 1.—

Neumann, Dr. **F.,** Professor der Physik und Mineralogie an der Universität zu Königsberg, Vorlesungen über die Theorie des Magnetismus, namentlich über die Theorie der magnetischen Induktion. [VIII u. 116 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 3.60.

Neumann, Dr. **C.,** Professor in Leipzig, über die nach Kreis-, Kugel- und Cylinderfunctionen fortschreitenden Entwicklungen, unter durchgängiger Anwendung des Du Bois-Reymond'schen Mittelwerthsatzes. [VIII u. 140 S.] gr. 4. geh. n. *M.* 7.20.

Reusch, E., Professor d. Physik in Tübingen, die stereographische Projection. Mit acht auf Stein gravirten Tafeln. [V u. 32 S.] Lex.-8. geh. n. *M.* 2.40.

Saalschütz, Prof. Dr. **Louis,** der belastete Stab unter Einwirkung einer seitlichen Kraft. Auf Grundlage des strengen Ausdrucks für den Krümmungsradius. Mit Holzschn. im Text u. 3 lithograph. Tafeln. [XXXI u. 247 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 9.—

Salmon, George, analytische Geometrie des Raumes. Deutsch bearbeitet von Dr. Wilhelm Fiedler, Professor am eidgenössischen Polytechnikum zu Zürich. II. Theil: Analytische Geometrie der Curven im Raume, der Strahlensysteme und der algebraischen Flächen. Dritte verb. Aufl. Mit Holzschn. im Text. [LXXII u. 686 S. u. Nachträge 8 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 16.—

——— analytische Geometrie der Kegelschnitte mit besonderer Berücksichtigung der neueren Methoden. Frei bearbeitet von Dr. W. Fiedler, Professor am eidgenössischen Polytechnikum zu Zürich. Vierte verbesserte Auflage. [XXIV u. 701 S. mit eingedruckten Holzschnitten.] gr. 8. 1878. geh. n. *M.* 14.40.

Schell, Dr. **Wilhelm,** Professor am Polytechnikum zu Karlsruhe, Theorie der Bewegung und der Kräfte. Ein Lehrbuch der theoretischen Mechanik. Mit besonderer Rücksicht auf das wissenschaftliche Bedürfniss technischer Hochschulen bearbeitet. Zweite umgearbeitete Auflage. Zwei Bände. Mit vielen in den Text gedruckten Holzschnitten. gr. 8. 1879. 1880. geh. n. *M.* 20.—

Einzeln, jeder Band à n. *M.* 10.—

I. Band. 1. Geometrie der Streckensysteme und Geometrie der Massen. 2. Geometrie der Bewegungszustände (Kinematik). [XVI u. 580 S.] 1879.

II. — 3. Theorie der Kräfte und ihrer Aequivalenz (Dynamik im weiteren Sinne einschl. Statik). 4. Theorie der durch Kräfte erzeugten Bewegung (Kinetik oder Dynamik im engeren Sinne). Mit vielen in den Text gedruckten Holzschnitten. [XII u. 618 S.] 1880.

Schottky, Dr. **F.,** Privatdocent an der Universität Breslau, Abriss einer Theorie der Abel'schen Funktionen von drei Variablen. [162 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 4.—

Schröter, Dr. **Heinrich,** Professor der Mathematik a. d. Universität zu Breslau, Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung und der Raumkurven dritter Ordnung als Erzeugnisse projektivischer Gebilde. Nach Jacob Steiner's Principien auf synthetischem Wege abgeleitet. [XV u. 720 S. mit vielen Figuren im Text.] gr. 8. geh. n. *M.* 16.—

Tait, P. G., Prof. der Physik a. d. Universität in Edinburg, elementares Handbuch der Quaternionen. Autoris. Uebersetzung von Dr. G. v. Scherff. [XVI u. 332 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 10.—

BUCHBINDEREI
VON
AUGUST WERZ
MÜNCHEN

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Milinowski, Alfons,

Elementar-synthetische Geometrie der Kegelschnitte

Leipzig 1882

Math.p. 358 l
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11651477-7